

XALİDƏ HƏSƏNOVA
CƏBRAYİL CƏFƏROV
KÖNÜL BƏDƏLOVA

ORTA MƏKTƏB RİYAZİYYAT
KURSUNDA BƏRABƏRSİZLİKLƏR VƏ
ONLARIN TƏDRİSİ METODİKASI

M.F.Axundov adına
Azərbaycan Milli
Kitabxanası

«Elm və Təhsil»
BAKİ – 2011

Elmi redaktor: **Zəfər Hüseynov**
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent

Rəyçilər: **Azadxan Adıgözəlov**
pedaqoji elmlər doktoru, professor

Xəlil Aliyev
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent

Əkbər Məmmədov
fizika-riyaziyyat elmləri namizədi, dosent

Xalidə Həsənova, Cəbrayıl Cəfərov, Könül Bədəlova.
Orta məktəb riyaziyyat kursunda bərabərsizliklər və onların
tədrisi metodikası. Bakı, "Elm və təhsil", 2011, 112 səh.

4702000000 *qırıqlı nəşr*
N098 – 2011

© «Elm və təhsil», 2011

1. ƏDƏDİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏRİN YERİNƏ YETİRİLMƏSİ METODİKASI

Hal-hazırda ümumtəhsil məktəblərinin tədris proqramında bərabərsizliklərin təliminə geniş yer verilmişdir. Hələ ibtidai siniflərdə şagirdlər ədədlərin müqayisə edilməsində bərabərsizlik işarələrinin işlədilməsi ilə tanış edirlər. Tədris proqramında bərabərsizliklərə aid vərdislərə yiyələnmək üçün ardıcılığın gözlənilməsi nəzərdə tutulur. Bunun üçün geniş imkanlar vardır. Hər dəfə yeni təbiətli ədədlər, yəni müsbət və mənfi ədədlər, adi və onluq kəsrlər keçilərkən bərabərsizlik anlayışından istifadə edərək onları müqayisə edirlər. Bərabərsizlik işarəsindən tədricən istifadə edilməsi və onun tez-tez tətbiq olunması bu anlayışın formalaşması üçün əsas təşkil edir.

Orta məktəb dərslərlərində bərabərsizlik mövzusunun məzmunu təqribən aşağıdakılardan ibarətdir:

- I. Ədədi bərabərsizliklər və onların əsas xassələri.
 1. Ədədi bərabərsizliklər;
 2. Ədədi bərabərsizliklərin əsas xassələri;

3. Ədədi bərabərsizliklərin toplanması və vurulması.

II. Birdəyişənli bərabərsizliklər sistemi.

1. Eynigüclü bərabərsizliklər;

2. Birdəyişənli bərabərsizliklərin həlli;

3. Birdəyişənli bərabərsizliklər sisteminin həlli;

4. Mütləq qiymət işarəsi daxilində dəyişəni olan sadə bərabərsizliklərin həlli.

Xassələrin öyrənilməsinə başlamazdan əvvəl müəllim şagirdlərə “eyni mənalı” və “əks mənalı” bərabərsizliklər haqqında məlumat verməlidir.

Dərsliklərdə əvvəlcə bu mövzu üzrə aşağıdakı xassələr öyrədilməlidir:

1. $a > b$ olduqda $b < a$ nəticəsi alınır.

2. Tranzitivlik xassəsi: $a < b$ və $b < c$ isə, $a < c$ olar.

3. Toplamanın monotonluq xassəsi $a > b$ və $c = d$ isə $a + c > b + d$ olar. Yəni bərabərsizliyin hər iki tərəfinə bərabər ədədlər əlavə etsək bərabərsizliyin işarəsi dəyişməz.

4. Vurmanın monotonluq xassəsi.

$a > b$ və $m > 0$ olarsa, $am > bm$, yəni bərabərsizliyin hər iki tərəfini eyni müsbət ədədə vursaq (bölsək)

bərabərsizliyin işarəsi dəyişməz. $a > b$ və $m < 0$ olarsa, $a \cdot m < b \cdot m$ olar, yəni bərabərsizliyin hər iki tərəfini eyni mənfi ədədə vursaq (bölsək) bərabərsizliyin işarəsi əksinə dəyişər. Bu xassələrin isbatı da şagirdlərdə çətinlik törətməməlidir. Onların isbatı “ a ədədi b ədədindən yalnız və yalnız o zaman böyük olar ki, $a - b$ fərqi müsbət ədəd olsun” tərifinə əsaslanır. Müəllim bu tərifə şagirdlərə düşüncəli surətdə öyrətməlidir. Bu xassələrdən birini, vurmanın monotonluq xassəsini isbat edək. Tutaq ki, $a > b$ və $m > 0$ -dır.

İsbat edək ki, $a \cdot m > b \cdot m$ olar.

İsbatı: $a > b$ olduğu üçün tərifə əsasən $a - b > 0$ olmalıdır. Şərtə görə isə $m > 0$ -dir. İki müsbət ədədin hasili də müsbət ədəd olduğu üçün $(a - b)m > 0$ və ya $am - bm > 0$ olmalıdır. $am - bm$ fərqi müsbət olduğu üçün isə tərifə əsasən $am > bm$ olar ki, bunu da isbat etmək tələb edilirdi.

Ədədi misallar üzərində şagirdlərə izah edilməlidir ki, iki bərabərsizliyin tərəfləri üzərində aparılan əməllərdə aşağıdakı hallar vardır.

1. Eyni mənalı iki bərabərsizliyi tərəf-tərəfə toplamaq

olar. $a > b$ və $c > d$ olarsa,

$$\begin{array}{r} a > b \\ + \\ c > d \\ \hline a + c > b + d \end{array}$$

olar.

Əks mənalı bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplamağın mümkün olmadığına aid

$$-1 > -2$$

+

$$\begin{array}{r} -15 < -3 \\ -16 > -5 \end{array} \quad \text{misalını göstərmək yerinə düşər.}$$

2. Əks mənalı bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə çıxmaq olar. Bu zaman birinci bərabərsizliyin işarəsi saxlanılır. $a > b$ və $c < d$ olarsa,

$$\begin{array}{r} a < b \\ - \\ c > d \\ \hline a - c < b - d \end{array}$$

olar.

3. Müsbət hədlı eyni mənəli iki bərabərsizliyi tərəf-tərəfə vurmaq olar. $a > b$ və $c > d$ olduqda a , b , c , d müsbət ədədlər olarsa,

$$\begin{array}{r} \times \left\{ \begin{array}{l} a > b \\ c > d \end{array} \right. \\ \hline a \cdot c > b \cdot d \end{array}$$

olar.

Bu təklifin mənfi hədlı bərabərsizliklər üçün ödənilmədiyini bir misalla, məsələn

$$-10 > -11$$

–

$$\begin{array}{r} -15 < -3 \\ \hline -25 > -14 \end{array}$$

göstərmək şagirdlərin biliyini

dərinləşdirər.

Bundan sonra təkliflərin isbatına keçmək olar. Məsələn, çıxma əməli üçün bunu isbat edək. Fərz edək ki, $a > b$ və $c < d$ -dir. İsbat edək ki, bu halda $a - c > b - d$ olar.

İsbatı: $a > b$ şərtinə əsasən $a - b > 0$, $c < d$ şərtinə əsasən $d - c > 0$ olar. İki müsbət ədədin cəmi də müsbət olduğundan $(a - b) + (d - c) > 0$ olar. Buradan da $a - c > b - d$ alınar ki, bunun da isbatı tələb olunurdu.

4. Müsbət həddli bərabərsizliyi qüvvətə yüksəltmək olar və bərabərsizlik işarəsi dəyişməz. $a > b$, $b > 0$ olduqda $a > b$ olarsa, onda $a^n > b^n$ olar.

Bərabərsizliklər üzərində aparılan əməllərə aid bir neçə misal göstərək:

1) Bərabərsizlikləri toplayın:

$$+ \begin{cases} 0 > -100 \\ 65 > 64 \end{cases}; \quad + \begin{cases} 14 < 15 \\ -20 < -15 \end{cases}$$

$$\frac{65 > -36}{-6 < 0}$$

2) Bərabərsizlikləri çıxın:

$$- \begin{cases} 2 > 0 \\ -3 < 6 \end{cases}; \quad - \begin{cases} 10 < 15 \\ 3 > 2 \end{cases}$$

$$\frac{5 > -6}{7 < 13}$$

3) Bərabərsizlikləri vurun:

$$\times \begin{cases} 2 > 1 \\ 6 > 4 \end{cases}; \quad \times \begin{cases} 5 > 3 \\ 100 > 10 \end{cases}; \quad \times \begin{cases} 1 < 7 \\ 9 < 10 \end{cases}$$

$$\frac{12 > 4}{500 > 30}; \quad \frac{9 < 70}{9 < 70}$$

4) $\sqrt{5} + \sqrt{6}$ və ya $\sqrt{3} + \sqrt{8}$ ədədlərdən hansının böyük olduğunu göstərin:

Hər bir ədədi ayrılıqda kvadrata yüksəldirik:

$$(\sqrt{5} + \sqrt{6})^2 = 5 + 2\sqrt{30} + 6 = 11 + 2\sqrt{30};$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{8})^2 = 3 + 2\sqrt{24} + 8 = 11 + 2\sqrt{24}.$$

Aşkıdır ki, $11 + 2\sqrt{30} > 11 + 2\sqrt{24}$.

Birinci ədədin kvadratı ikinci ədədin kvadratından böyükdür. Bu ədədlərin hər biri müsbət olduğundan

$$\sqrt{5} + \sqrt{6} > \sqrt{3} + \sqrt{8}$$

olar.

2. BİRDƏYİŞƏNLİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR

Tutaq ki, $y = f(x)$ və $y = \varphi(x)$ funksiyaları $G \subset R$ oblastında təyin olunmuşdur. Əgər $x_0 \in G$ üçün $f(x_0) > g(x_0)$ ədədi bərabərsizliyi doğru olarsa, onda x_0 -a $f(x) > g(x)$ bərabərsizliyinin həlli, bu şərti ödəyən x_0 -lar çoxluğuna isə $f(x) > g(x)$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğu deyilir. Tənliklərdə olduğu kimi bərabərsizliyi həll etmək, onun həllər çoxluğunu tapmaq və ya həllinin olmadığını göstərmək deməkdir.

Həllər çoxluğu eyni olan bərabərsizliklərə eynigüclü və ya ekvivalent bərabərsizliklər deyilir.

Bərabərsizlikləri həll edərkən bir qayda olaraq onların ekvivalentlik xassələrinə əsaslanmaq lazımdır. Bunlar aşağıdakılardır:

$$\begin{aligned} f(x) > \varphi(x) &\leftrightarrow f(x) - \varphi(x) > 0, \\ f(x) > \varphi(x), \forall a \in R &\leftrightarrow f(x) \pm a > \varphi(x) \pm a, \\ f(x) > \varphi(x), \forall a < 0 &\leftrightarrow af(x) < a\varphi(x), \\ f(x) > \varphi(x), \forall a > 0 &\leftrightarrow af(x) > a\varphi(x), \\ f(x) > \varphi(x), g(x) > 0 &\leftrightarrow f(x)g(x) > \varphi(x)g(x), \end{aligned}$$

$$f(x) > \varphi(x), g(x) < 0 \leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{\varphi(x)}{g(x)},$$

$$f(x) > \varphi(x), g(x) > k(x) \leftrightarrow f(x) + g(x) > \varphi(x) + k(x),$$

$$f(x) > \varphi(x), g(x) < k(x) \leftrightarrow f(x) - g(x) > \varphi(x) - k(x),$$

$$f(x) > \varphi(x), g(x) > k(x) > 0 \leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > \varphi(x) \cdot k(x).$$

Misal həll edərkən eyni mənalı bərabərsizliklər sistemi alınarsa və $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ olarsa, onda

$$\begin{cases} x < a_1 \\ x < a_2 \\ \dots\dots\dots \\ x < a_n \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi $x < a_1$ bərabərsizliyi ilə,

$$\begin{cases} x > a_1 \\ x > a_2 \\ \dots\dots\dots \\ x > a_n \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi isə $x > a_n$ bərabərsizliyi ilə ekvivalentdir.

Xətti bərabərsizliklər

Tərif: $ax + b > 0$ və ya $ax + b < 0$ ($a \neq 0$) şəklində olan bərabərsizliyə xətti bərabərsizlik deyilir.

Əgər $a > 0$ olarsa, onda $ax + b > 0$ bərabərsizliyinin həlli $x > -\frac{b}{a}$, $a < 0$ olarsa, $x < -\frac{b}{a}$ olar.

Qeyd edək ki, bir sıra bərabərliklər üzərində eyni çevirmələr apardıqdan sonra onlar xətti bərabərsizliyə gətirilir. Məsələn, $ax + b < cx + d$ bərabərsizliyi $a \neq c$ olduqda xətti bərabərsizliyə gətirilir.

Misallar. Aşağıdakı bərabərsizlikləri həll edin.

1. $12 - 4x > 0$.

Əvvəlcə 12 ədədini bərabərsizliyin sağ tərəfinə keçirək. Onda verilən bərabərsizliklə eynigüclü olan

$$-4x > -12$$

bərabərsizliyini alarıq.

Hər tərəfi (-4) -ə bölsək (bu zaman bərabərsizliyin işarəsi əksinə çevrilir), $x < 3$ alınır.

Deməli, bərabərsizliyin həllər çoxluğu $x \in (-\infty; 3)$ olar.

2. $5x - 2(3x - 4) > 3 - 2x$.

Mötərizəni açaq:

$$5x - 6x + 8 > 3 - 2x$$

və məchulları bərabərsizliyin bir, məlumları isə digər tərəfinə keçirək, onda

$$5x - 6x + 2x > 3 - 8,$$

Və buradan da oxşar hədləri islah etdikdən sonra

$$x > -5$$

alırıq.

Nəticədə verilmiş bərabərsizliyin həllər çoxluğunu $x \in (-5; \infty)$ alırıq.

$$3. \quad 4\left(\frac{2x}{3} + 0,3\right) < \frac{10x}{3} - 1.$$

Mötərizəni açaq:

$$\frac{8}{3}x + 1,2 < \frac{10}{3}x - 1.$$

Bərabərsizliyi kəsrdən qurtaraq:

$$8x + 3,6 < 10x - 3.$$

Məchulları bərabərsizliyin bir tərəfinə, məlumları isə digər tərəfinə keçirək:

$$8x - 10x < -3 - 3,6,$$

$$-2x < -6,6.$$

Hər tərəfi – 2 -yə bölək (bu zaman bərabərsizliyin işarəsi dəyişər):

$$x > 3,3.$$

Beləliklə, $x \in (3,3; \infty)$ bərabərsizliyin həllər çoxluğu olar.

Qeyd edək ki, xətti tənliklərin həllində olduğu kimi, xətti bərabərsizliklərin həlli zamanı da bərabərsizlikdə kəsər varsa, əvvəlcə kəsrdən qurtarmaq, sonra isə mötərizələri açıb məchulları bərabərsizliyin bir tərəfinə, məlumları isə bərabərsizliyin digər tərəfinə keçirmək lazımdır.

4. Bərabərsizliyim ən böyük tam həllini tapın.

$$x + \frac{3x + 10}{5} > 2\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

Mötərizəni açaq:

$$x + \frac{3x + 10}{5} > 2x - 3.$$

Kəsrdən qurtaraq:

$$5x + 3x + 10 > 10x - 15.$$

Məchulları bərabərsizliyin bir tərəfinə, məlumları isə digər tərəfinə keçirək:

$$10x - 5x - 3x < 10 + 15,$$

$$2x > 25.$$

Bərabərsizliyin hər iki tərəfini 2-yə bölərək $x < 12,5$ alarıq.

Beləliklə, bərabərsizliyin həllər çoxluğu $(-\infty; 12,5)$ olar, buradan bərabərsizliyi ödəyən ən böyük tam ədəd 12 alınar.

Çalışmalar. Bərabərsizlikləri həll edin.

$$1) 5x + (3x - 3) > 6x + 11;$$

$$2) 12 - (4x - 18) < (36 + 4x) + (18 - 6x);$$

$$3) 15x + 6x(2 - 3x) < 9x(5 - 2x) - 36;$$

$$4) 24x - 6x(13x - 9) > 13x(1 - 6x);$$

$$5) \frac{2x}{5} - \frac{4x}{3} > 7;$$

$$6) \frac{5x}{12} - \frac{1}{3} < \frac{x}{8};$$

$$7) \frac{3x}{5} + 1,5 > 2 + x;$$

$$8) 0,3\left(5 - \frac{x}{3}\right) < \frac{x-1}{3};$$

$$9) 0,2(5x - 6) + 4x < 3,8;$$

$$10) 1,3x - 2 - (3,3x + 5) \leq 2x + 1.$$

3. XƏTTİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR SİSTEMİ

$$\begin{cases} a_1x + b_1 > 0 \\ a_2x + b_2 > 0 \end{cases}$$

şəklində bərabərsizliklər birdəyişənli iki xətti bərabərsizliklər sistemi adlanır.

Xətti bərabərsizliklər sistemini həll etmək üçün, hər bir bərabərsizliyin ayrılıqda həlli tapılır və tapılmış həllər çoxluğunun kəsişməsi verilən bərabərsizliklər sisteminin həlli olur.

Misallar. Aşağıdakı bərabərsizliklər sistemini həll edin:

$$1. \begin{cases} 3(x - 2) > 5 + x \\ 4x - 13 < 2x + 7 \end{cases}$$

Birinci bərabərsizliyin həllər çoxluğunu tapaq:

$$3x - 6 > 5 + x, \quad x > 5,5.$$

İkinci bərabərsizliyin həllər çoxluğunu tapaq:

$$\begin{aligned} 4x - 2x < 7 + 13, \quad x < 10, \\ \{ \{ x/3(x - 2) > 5 + x \} = (5,5; \infty) \\ \{ x/4x - 13 < 2x + 7 \} = (-\infty; 10) \end{aligned}$$

Beləliklə,

$$\left\{ x \left/ \begin{array}{l} 3(x-2) > 5+x \\ 4x-13 < 2x+7 \end{array} \right. \right\} = (5,5;\infty) \cap (-\infty;10) = (5,5;10)$$

olur.

$$2. \left\{ \begin{array}{l} \frac{2x-3}{2} < \frac{x-1}{3}, \\ \frac{5x+9}{3} + 1 \geq \frac{x-1}{4}. \end{array} \right.$$

Hər iki bərabərsizliyi kəsrdən qurtaraq:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3(2x-3) < 2(x-1) \\ 4(5x+9) + 12 \geq 3(x-1) \end{array} \right.$$

Sadələşdirək:

$$\left\{ \begin{array}{l} 6x-9 < 2x-2 \\ 20x+36+12 \geq 3x-3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x < 7 \\ 17x \geq -51 \end{array} \right.$$

Sonuncu bərbərsizliklər sistemindən:

$$\left\{ \begin{array}{l} x < 1\frac{3}{4}, \\ x \geq -3, \end{array} \right.$$

alarıq. Beləliklə, bərabərsizliklər sisteminin həlli

$$\left(-\infty; 1\frac{3}{4}\right) \cap \left[-3; 1\frac{3}{4}\right) \text{ çoxluğu olur.}$$

$$3. \begin{cases} 3x - 54 < 5(2 - x), \\ 5x + 3(x - 1) \leq 6x + 11, \\ 8(x + 7) - 3(2x + 9) > 15. \end{cases}$$

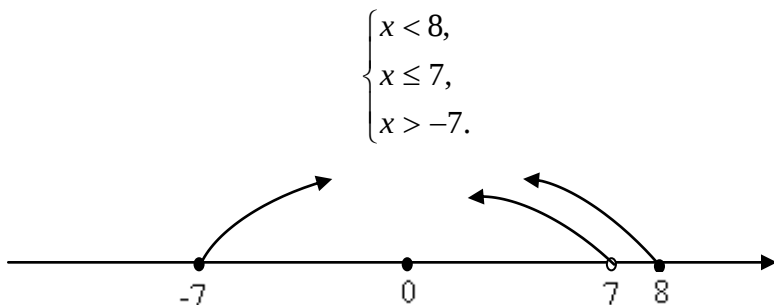
Mötərizələri açaq:

$$\begin{cases} 3x - 54 < 10 - 5x, \\ 5x + 3x - 3 \leq 6x + 11, \\ 8x + 56 - 6x - 27 > 15, \end{cases}$$

Məchulları bir, məlumları digər tərəfə keçirək:

$$\begin{cases} 8x < 64, \\ 2x \leq 14, \\ 2x > -14. \end{cases}$$

Məchulların bərabərsizlikləri ödəyən həllər çoxluqlarını təyin edək və ədəd oxu üzərində göstərək:



Şəkil 1.

Şəkildən göründüyü kimi, bərabərsizliklər sisteminin həlli $(-7, 7]$ yarım parçası olar.

Qeyd edək ki, ilk iki bərabərsizlik eyni mənalı olduğundan alınan bərabərsizliklər sistemini, onunla eynigüclü olan $\begin{cases} x \leq 7 \\ x > -7 \end{cases}$ bərabərsizliklər sisteminə gətirmək olardı. Buradan da ədəd oxu üzərində göstərmədən həllin $(-7, 7]$ olacağını müəyyən etmək olardı.

4. Bərabərsizliklər sisteminin ən böyük həllini tapın.

$$\begin{cases} \frac{2+3x}{3} \leq 2x-2 - \frac{5x+7}{3}, \\ \frac{x+6}{2} - \frac{x}{2} > \frac{2x}{5} - 2. \end{cases}$$

Sistemin bərabərsizliklərini kəsrdən qurtaraq:

$$\begin{cases} 2+3x \leq 6x-6-5x-7, \\ 5x+30-5x > 4x-20. \end{cases}$$

Məchulları bir, məlumları digər tərəfə keçirək:

$$\begin{cases} 2x \leq -15, \\ 4x < 50. \end{cases}$$

Buradan birinci bərabərsizliyin hər iki tərəfini 2-yə,

ikinci bərabərsizliyi 4-ə bölərək $\begin{cases} x \leq -7,5 \\ x < 12,5 \end{cases}$ alırıq.

Alınmış eyni mənalı bərabərsizliklər sisteminin həlli $x \leq -7,5$ olar.

Aşkardır ki, $(-\infty; -7,5]$ çoxluğunun ən böyük elementi $-7,5$ -dir.

Çalışmalar: Bərabərsizliklər sistemini həll edin.

$$1) \begin{cases} 2x - 3 > 5x - 1, \\ 3x + 18 > 8 - 2x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3 - 2x < 3x - 7, \\ 5x - 1 > 4 - x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{4x+3}{5} - 0,6 > \frac{6x-5}{3} - \frac{11}{5}, \\ \frac{8x+3}{2} - \frac{9x}{5} < \frac{6x-1}{3} + 0,1; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{4x+9}{2} < \frac{8x+1}{3} + \frac{x-1}{3}, \\ \frac{2x+13}{2} > \frac{x-2}{3} + \frac{x+2}{3}; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 7x + 6(1-x) \geq 3(x+1) - 2, \\ 7x + 2(x-1) < 5(2x-1) + 3; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2(4-x) + 13 < \frac{5x}{3} + 5(4-x), \\ \frac{3+4x}{5} \geq \frac{7-x}{2} - 3; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{x+5}{3} > \frac{x-3}{5}, \\ 1,3x + \frac{x}{5} \leq \frac{3(x-1)}{2} + 1,5; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} (x+1)(x+2)+4 \geq (x+3)(x-6), \\ 7(2x-4) < 2(6x-1); \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 11x-8 \leq 15x+4, \\ 2(x-1) > 5(x-1), \\ 3x-4 < 2(4x+3); \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 14x+9 \leq 10x+21, \\ 2x-6 > -x-15, \\ 2(x+1) > 2(x-1). \end{cases}$$

4. KƏSR-XƏTTİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR

$$\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2} > 0, \quad (a_2 \neq 0) \quad (1)$$

şəklində bərabərsizliklər kəsir-xətti bərabərsizliklər adlanır. Belə bərabərsizlikləri analitik və məntiqi olmaqla iki üsulla həll edək:

I üsul. Burada iki mümkün hal ola bilər:

a) $a_2x + b_2 > 0$.

Bu halda bərabərsizliyin hər iki tərəfini $a_2x + b_2$ ifadəsinə vurmaqla

$$\begin{cases} a_2x + b_2 > 0, \\ a_1x + b_1 > 0, \end{cases} \quad (2)$$

xətti sistemini alırıq.

b) $a_2x + b_2 < 0$ olduqda isə yenə də hər iki tərəfi $a_2x + b_2$ ifadəsinə vurmaqla

$$\begin{cases} a_2x + b_2 < 0, \\ a_1x + b_1 < 0, \end{cases} \quad (3)$$

xətti bərabərsizliklər sistemini alırıq. Alınmış hər iki xətti bərabərsizliklər sistemini həll etməklə (1) bərabərsizliyinin həllini tapırıq. Aşağıdakı 1-3 nömrəli misallar bu üsulla

həll edilmişdir.

II üsul. Burada kəsrin işarəsinə əsasən surət və məxrəcin işarələrinin mümkün olan iki halına baxılır (məsələn, kəsr müsbətdirsə, onun surət və məxrəci eyni işarəlidir):

$$\begin{cases} a_1x + b_1 > 0, \\ a_2x + b_2 > 0, \end{cases} \quad (2')$$

və

$$\begin{cases} a_1x + b_1 < 0, \\ a_2x + b_2 < 0. \end{cases} \quad (3')$$

Yenə də alınmış bərabərsizliklər sistemi məlum qayda ilə həll olur. Aşağıdakı 4 nömrəli misal bu üsulla həll edilmişdir. Alınmış (2) ilə (2') və (3) ilə (3') bərabərsizliklərinin eyni olması hər iki halda bərabərsizliyin həllinin eyni xətti bərabərsizliklər sisteminə gətirildiyini göstərir. Həll zamanı üsulun seçilməsi sərbəstdir.

Misallar. Aşağıdakı kəsr-xətti bərabərsizlikləri həll edin.

$$1. \frac{5x+4}{3x-2} \leq 0, \quad x \neq \frac{2}{3}.$$

a) $3x - 2 > 0$ olsun. İndi hər tərəfi $3x - 2$ -yə vurmaqla

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0, \\ 5x + 4 \leq 0, \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemini alırıq. Buradan

$$\begin{cases} x > \frac{2}{3}, \\ x \leq -\frac{4}{5}, \end{cases}$$

Uyuşmanın bərabərsizliklər sistemini alırıq. Deməli, bu halda bərabərsizliyin həlli yoxdur.

b) $3x - 2 < 0$. Bu halda verilən bərabərsizlik

$$\begin{cases} 3x - 2 < 0, \\ 5x + 4 \geq 0, \end{cases}$$

sisteminə gətirilir. Buradan

$$\begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x \geq -\frac{4}{5} \end{cases} \quad \text{və ya} \quad -\frac{4}{5} \leq x < \frac{2}{3},$$

alınar. Beləliklə, bərabərsizliyin həllər çoxluğu $\left[-\frac{4}{5}; \frac{2}{3}\right)$

olur.

$$2. \frac{x+2}{3-x} > 2. \text{ Aydındır ki, } x \neq 3 \text{ olmalıdır. Əvvəlcə}$$

bərabərsizliyi aşağıdakı kimi eynigüclü çevirək:

$$\frac{x+2}{3-x} - 2 > 0, \text{ və ya } \frac{3x-4}{3-x} > 0.$$

a) $3-x > 0$ olsun, onda hər tərəfi $(3-x)$ -a vurmaqla bərabərsizliyi

$$\begin{cases} 3-x > 0, \\ 3x-4 > 0, \end{cases}$$

sisteminə gətiririk. Buradan

$$\begin{cases} x < 3, \\ x > \frac{4}{3}, \end{cases} \text{ və yaxud } x \in \left(\frac{4}{3}; 3\right).$$

b) $3-x < 0$ olsun. Bu halda verilən bərabərsizlik

$$\begin{cases} 3-x < 0, \\ 3x-4 < 0, \end{cases} \text{ və ya } \begin{cases} x > 3 \\ x < \frac{4}{3} \end{cases}$$

uyuşmayan bərabərsizlik sisteminə gətirilir. Göründüyü kimi bu sistemin həlli yoxdur.

Beləliklə, verilən bərabərsizliyin həllər çoxluğu

$\left(\frac{4}{3}; 3\right)$ intervalı olur.

$$3. \frac{5x-3}{2x+7} \leq \frac{5}{2}.$$

a) $2x+7 > 0$ olsun. Onda

$$2(5x-3) \leq 5(2x+7),$$

$$10x-6 \leq 10x+35,$$

alırıq ki, bu bərabərsizlik bütün $x > -3,5$ üçün doğru olar.

Deməli, x -in $x > -3,5$ şərtini ödəyən bütün qiymətlərində verilən bərabərsizlik doğrudur.

b) $2x+7 < 0$ olsun. Bu halda bərabərsizlik

$$\begin{cases} 2x+7 < 0, \\ 2(5x-3) \geq 5(2x+7), \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} x < -3,5, \\ -6 \geq 35, \end{cases}$$

sisteminə gətirilir. Sistemin ikinci bərabərsizliyi doğru olmayan ədədi bərabərsizlik olduğundan onun həlli yoxdur.

Beləliklə, bərabərsizliyin həllər çoxluğu $(-3,5; \infty)$ olur.

$$4. \frac{5-2x}{13+6x} < -\frac{1}{2}.$$

Verilən bərabərsizliyin sağ tərəfindəki həddini sol tərəfə keçirək və sadələşdirək:

$$\frac{5-2x}{13+6} + \frac{1}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{10-4x+13+6x}{2(6x+13)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+23}{2(6x+13)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+\frac{23}{2}}{6\left(x+\frac{13}{6}\right)} < 0.$$

Bərabərsizliyin hər tərəfini 6-ya vursaq: $\frac{x+\frac{23}{2}}{x+\frac{13}{6}} < 0$

alırıq.

Buradan

$$a) \begin{cases} x + \frac{23}{2} < 0, \\ x + \frac{13}{6} > 0, \end{cases} \text{ və yaxud } \begin{cases} x < -11\frac{1}{2} \\ x > -2\frac{1}{6} \end{cases}$$

alırıq ki, onun da həlli yoxdur (şəkil 2).



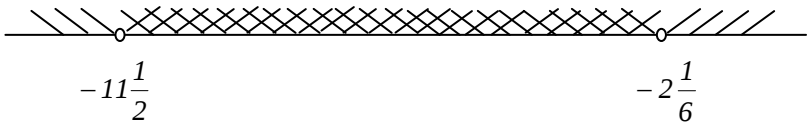
Şəkil 2.

$$b) \begin{cases} x + \frac{23}{2} > 0, \\ x + \frac{13}{6} < 0, \end{cases} \text{ və ya } \begin{cases} x > -11\frac{1}{2} \\ x < -2\frac{1}{6} \end{cases}$$

alarıq. Nəticədə (şəkil 3):

$$-11\frac{1}{2} < x < -2\frac{1}{6}$$

alarıq.



Şəkil 3.

Qeyd: Kəsr xətti bərabərsizlikləri intervallar üsulunun köməyi ilə daha asan həll etmək olar.

Çalışmalar: Bərabərsizlikləri həll edin.

1) $\frac{9}{3x-7} > 1,$

2) $\frac{31}{x+15} \leq -1,$

3) $\frac{14}{x-5} < -2,$

4) $\frac{x}{x+6} < \frac{1}{3},$

5) $\frac{11x-9}{3x-1} > 4,$

$$6) \frac{3x+11}{x+20} \leq 2.$$

Bərabərsizliklərin ən kiçik tam həllini tapın.

$$7) \frac{5}{3-x} > 3 \quad , \quad 8) \frac{x+2}{3-x} \geq 2.$$

Bərabərsizliklərin ən böyük mənfi tam həllini tapın

$$9) \frac{7x+6}{6x+1} > 1 \quad , \quad 10) \frac{x-22}{2x+17} \geq 0.$$

5. İKİQAT BƏRABƏRSİZLİKLƏR

$$f(x) < \varphi(x) < g(x) \quad (f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)) \quad (1)$$

şəklindəki bərabərsizliklər ikiqat bərabərsizliklər adlanır.

(1) bərabərsizliyi

$$\begin{cases} f(x) < \varphi(x) \\ \varphi(x) < g(x) \end{cases} \quad \left(\begin{cases} f(x) \leq \varphi(x) \\ \varphi(x) \leq g(x) \end{cases} \right) \quad (2)$$

bərabərsizliklər sistemi ilə eynigüclüdür.

Fəslin əvvəlində verilən xassələr, ikiqat bərabərsizliklər üçün də doğrudur. Məsələn, ikiqat bərabərsizliyin hər tərəfini müsbət ədədə və ya məchulun bütün mümkün qiymətində mənası olan müsbət ifadəyə vurduqda və ya böldükdə, onunla eynigüclü olan ikiqat bərabərsizlik alınar. İkiqat bərabərsizliklərin həlli zamanı onu bir qayda olaraq eynigüclü sistemə gətirirlər.

Misallar. Verilən ikiqat bərabərsizlikləri həll edin.

$$1) \frac{x-1}{2} - 3 < 2x + 1 < 3 - 2x.$$

Bərabərsizliyin hər tərəfini 2-yə vuraq:

$$x - 1 - 6 \leq 4x + 2 < 6 - 4x,$$

Buradan

$$x - 7 < 4x + 2 < 6 - 4x,$$

alarıq. Bu isə

$$\begin{cases} x - 7 < 4x + 2, \\ 4x + 2 < 6 - 4x, \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi ilə eynigüclüdür. Buradan

$$\begin{cases} x > -3 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{və ya} \quad -3 < x < \frac{1}{2}$$

alarıq.

$$2) \quad 1 < \frac{3x - 1}{2x + 1} < 2.$$

a) $2x + 1$ ifadəsi $x > -\frac{1}{2}$ olduqda müsbətdir.

Bərabərsizliyin hər tərəfini $2x + 1 > 0$ ifadəsinə vursaq, bərabərsizlik işarəsini dəyişməz. Yəni,

$$2x + 1 < 3x - 1 < 2(2x + 1),$$

alınar. Buradan

$$\begin{cases} 2x + 1 < 3x - 1, \\ 3x - 1 < 2(2x + 1), \end{cases} \quad \text{və yaxud} \quad \begin{cases} x > 2, \\ x > -3. \end{cases}$$

sistemini alarıq.

Sonuncu sistemi və $x > -\frac{1}{2}$ olmasını nəzərə alsaq,

bərabərsizliyin həlli $2 < x < \infty$ olur.

Bərabərsizliyin hər tərəfini mənfi $2x + 1$ ifadəsinə vursaq,

$$2x + 1 > 3x - 1 > 2(2x + 1),$$

alınar. Buradan

$$\begin{cases} 2x + 1 > 3x - 1, \\ 3x - 1 > 2(2x + 1), \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} x < 2, \\ x < -3. \end{cases}$$

Sonuncu sistemi və $x < -\frac{1}{2}$ olmasını nəzərə alsaq bu halda bərabərsizliyin həlli $-\infty < x < -3$ olur.

Beləliklə, verilən ikiqat bərabərsizliyin həlli $(-\infty; -3) \cup (2; \infty)$ çoxluğudur.

$$3) -1 < \frac{3 - 2x}{5 - x} < 3.$$

a) $x < 5$ olduqda $5 - x > 0$ olur. Odur ki, bərabərsizlik

$$-(5 - x) < 3 - 2x < 3(5 - x)$$

şəklinə gətirilir. Buradan

$$\begin{cases} -(5 - x) < 3 - 2x \\ 3 - 2x < 3(5 - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{8}{3}, \\ x < 12. \end{cases}$$

$$x < 5; \quad x < \frac{8}{3} \quad \text{və} \quad x < 12 \quad \text{bərabərsizliklərindən} \quad x < \frac{8}{3}$$

alınır.

b) $x > 5$ olduqda $5 - x < 0$ olur. Onda verilmiş bərabərsizlik

$$-(5 - x) > 3 - 2x > 3(5 - x),$$

yaxud

$$\begin{cases} -(5 - x) > 3 - 2x, \\ 3 - 2x > 3(5 - x), \end{cases}$$

şəklinə düşər. Buradan $\begin{cases} x > \frac{8}{3} \\ x > 12 \end{cases}$ alınar.

$$x > 5; \quad x > 8 \quad \text{və} \quad x > 12 \quad \text{bərabərsizliklərindən} \quad x > 12$$

alınar.

Beləliklə, verilmiş bərabərsizliyin həlli

$$\left(-\infty; 2\frac{2}{3}\right) \cup (12; \infty) \text{ çoxluğu olar.}$$

Aşağıdakı ikiqat bərabərsizlikləri həll edin.

$$1) -1 < \frac{3x-2}{x+1} < 2, \quad 2) -\frac{4}{5} < 8 - \frac{x}{2} < \frac{2}{3},$$

$$3) \frac{1}{2} < \frac{3-x}{x+5} < 3 \quad .$$

$$4) -\frac{1}{2} < \frac{2}{3} - \frac{5}{x} < \frac{1}{4},$$

$$5) -5 < \frac{2x+3}{3x-5} < -2 \quad ,$$

$$6) 1\frac{1}{2} < 2x - \frac{3x}{4} < 3\frac{3}{4},$$

$$7) 0 < x - \frac{3-x}{2} < 6,$$

$$8) -\frac{10}{9} < \frac{1-3x}{5} < \frac{9}{10},$$

$$9) -8,5 < \frac{5-x}{2} - x < 5,8,$$

$$10) x - \frac{1}{2} < 2x - 3 < \frac{3x}{5}$$

6. KVADRAT BƏRABƏRSİZLİKLƏR

Tərif. a, b və c verilmiş həqiqi ədədlər olduqda

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (a \neq 0)$$

şəklində bərabərsizliklərə kvadrat bərabərsizliklər deyilir.

Məlumdur ki,

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (1)$$

münasibəti doğrudur.

İndi aşağıdakı halları nəzərdən keçirək:

1) $D = b^2 - 4ac < 0$. Bu halda (1) ifadəsinin sağ tərəfindəki hər iki toplananın işarəsi a -nın işarəsilə eyni olacaqdır. Deməli, $a > 0$ olarsa, $ax^2 + bx + c > 0$, $a < 0$ olarsa, $ax^2 + bx + c < 0$ olar.

2) $D = 0$. Bu halda (1) ifadəsinin işarəsi x -in $\left(x \neq -\frac{b}{2a} \right)$ bütün qiymətlərində a -nın işarəsinin eyni olar.

Deməli, $x \neq -\frac{b}{2a}$ olduqda

$$a > 0 \quad \text{olarsa,} \quad ax^2 + bx + c > 0,$$

$$a < 0 \quad \text{olarsa,} \quad ax^2 + bx + c < 0.$$

3) $D > 0$. Bu halda kvadrat üçhədli aşağıdakı şəkildə yazıla bilər:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Burada x_1 $ax^2 + bx + c$ kvadrat üçhədlisinin kiçik kökü, x_2 isə böyük köküdür.

a) $x < x_1$ *olduqda* $x - x_1 < 0$, $x - x_2 < 0$ *olar* və $(x - x_1)(x - x_2) > 0$,

b) $x > x_2$ *olduqda* $x - x_2 > 0$ və $x - x_1 > 0$ *olar* və $(x - x_1)(x - x_2) > 0$,

v) $x_1 < x < x_2$ *olduqda* $x - x_1 > 0$; $x - x_2 < 0$ *olur* və $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ *olar..*

Deməli, $x < x_1$ və $x > x_2$ *olduqda* kvadrat üçhədlinin işarəsi a -nın işarəsinin eyni $x_1 < x < x_2$ *olduqda* isə a -nın işarəsinin əksinə olur.

Misallar. Verilən bərabərsizlikləri həll edin.

1) $x^2 - 8x - 20 < 0$.

$x^2 - 8x - 20$ kvadrat üçhədli üçün $a = 1 > 0$ və $D = b^2 - 4ac = 144 > 0$ olduğundan onun iki həqiqi müxtəlif kökü var.

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$

tənliyini həll etməklə, kvadrat üçhədlinin köklərinin $x_1 = -2$; $x_2 = 10$ olduğunu müəyyən edirik. Buradan da üçüncü hala görə ($a > 0$, $D > 0$) bərabərsizliyin həlli $-2 < x < 10$ olar.

$$2) 3x^2 - 7x - 6 \geq 0.$$

$$a = 3 > 0 \quad \text{və} \quad D = b^2 - 4ac = 49 + 72 = 121 > 0$$

olduğundan kvadrat üçhədlinin iki həqiqi kökü vardır:

$$x_1 = -\frac{2}{3} \quad \text{və} \quad x_2 = 3.$$

Odur ki, bərabərsizliyin həlli:

$$x \leq -\frac{2}{3} \quad \text{və} \quad x_2 \geq 3 \quad \text{və ya} \quad \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [3; \infty)$$

coxluğu olar.

$$3) 2x^2 - 5x + 4 < 0.$$

$$a = 2 > 0 \quad \text{və} \quad D = b^2 - 4ac = 25 - 32 = -7 < 0$$

olduğundan $2x^2 - 5x + 4$ kvadrat üçhədlisi x -in bütün qiymətlərində (yəni $x \in (-\infty; \infty)$) müsbətdir. Deməli, verilən bərabərsizliyin həlli yoxdur ($x \in \emptyset$).

$$4) 4x^2 - 4x + 1 \leq 0.$$

$a=4>0$ və $D=b^2-4ac=16-16=0$ olduğundan kvadrat üçhədlinin kökləri $x_1=x_2=\frac{1}{2}$ olur. Yəni,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Deməli, yalnız $x=\frac{1}{2}$ olduqda bərabərsizlik doğrudur.

Çalışmalar. Aşağıdakı kvadratik bərabərsizlikləri həll edin.

1) $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$, 2) $x^2 - 6x + 8 < 0$,

3) $4x^2 - x < 3$, 4) $15x^2 + 14x - 1 < 0$,

5) $2x^2 - 5x > 0$, 6) $3x^2 - \frac{3}{5} < 0$,

7) $2x^2 - \frac{2}{3} > 0$, 8) $4x^2 - x < 3$,

9) $x^2 - 4x + 5 \leq 0$, 10) $2x^2 - 3x + 4 > 0$.

7. RASİONAL BƏRABƏRSİZLİKLƏR

Hər tərəfi məchula görə rasiional ifadə olan bərabərsizliklərə rasiional bərabərsizliklər deyilir. Belə bərabərsizliklərin bütün hədlərini bir tərəfə keçirməklə ümumi şəkildə

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \quad (1)$$

kimi yazmaq olar. Burada $P(x)$, $Q(x)$ funksiyaları x -ə nəzərən çoxhədlilərdir. Müəyyənlik üçün bu

bərabərsizliyin $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ halına baxacağıq. Məlumdur ki,

hər bir çoxhədli həqiqi ədədlər çoxluğunda $(x - a)$, $(x - a)^k$, $(x^2 + px + q)(x^2 + p_1x + q_1)^n$; $(k, n \in \mathbb{N})$ şəklində vuruqlara ayrılır. Burada $x^2 + px + q$ və $x^2 + p_1x + q_1$ üçhədliləri həqiqi kökləri olmayan kvadrat üçhədlilərdir. Bu halda onların müsbət olduğu aydındır. Ona görə də (1) bərabərsizliyində həmin kvadrat üçhədliləri yazmasaq (əgər varsa), onda onunla eynigüclü olan bərabərsizlik alarıq.

$(x - a_1)^k$ ifadəsini $k = 2m$ olduqda $(x - a_1)^{2m}$;
 $k = 2m + 1$ olduqda isə $(x - a_1)^{2m+1} = (x - a_1)^{2m}(x - a_1)$
şəklində yazmaqla yenə də $(x - a_1)^{2m}$ -i yazmasaq alınan
bərabərsizlik $x \neq a_1$ olduqda yenə (1) bərabərsizliyi ilə
eynigüclü olar. Bundan əlavə (1) bərabərsizliyinin surət və
məxrəcində eyni $(x - a)$ xətti vuruğu varsa, onu ixtisar
etmək olar ($x \neq a$ şəklində). Beləliklə, (1) bərabərsizliyini

$$\frac{(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)}{(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n)} > 0 \quad (2)$$

şəklində yazmaq olar (sol tərəf ixtisar olunmayan kəsrdir).

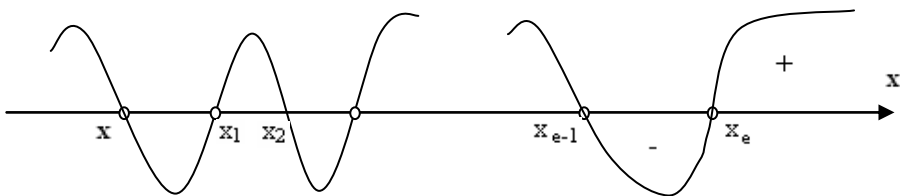
$$x \neq b_1, \quad x \neq b_2, \dots, x \neq b_n$$

və $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k) > 0$ olduqda (2)

bərabərsizliyini, onunla eynigüclü olan

$$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)(x - b_1)(x - b_2) \dots (x - b_n) > 0$$

bərabərsizliyi ilə əvəz edək. Bu bərabərsizliyi sıfıra çevirən
 $a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_n$ ədədlərini ədəd oxu üzərində qeyd
edək (şəkil 1). Tutaq ki, həmin ədədlər artan sıra ilə
 $x_1, x_2, \dots, x_e$ kimi işarə olunub ($k + n = e$).



Şəkil 1.

$x > x_e$ olduqda $x - x_e$ deməli, qalan bütün vuruqlar müsbət olduğundan x_e nöqtəsində əyri xətt x oxunu kəsməklə müsbətdən mənfiyə doğru çəkilir. Bundan sonra əyri xəttin çəkildiyi nöqtə ilə x oxunu kəsmək şərti ilə davam etdiririk. Alınan sxematik qrafikin müsbət və mənfi qiymətlər aldığı intervallar müəyyənləşdirilir. Nəticədə tələb olunan bərabərsizliyin həllər çoxluğu yazılır. Bərabərsizliyin sol tərəfi sıfırdan kiçik olan halda da bərabərsizlik analoji qaydada həll olunur. Bu qayda ilə bərabərsizliyin həllinin tapılmasına intervallar üsulu deyilir.

Qeyd 1: xüsusi halda (1) bərabərsizliyində $Q(x)=1$ yaxud hər hansı sabit ədəd ola bilər ki, bu halda bərabərsizlik $p(x) \geq 0$ şəklinə düşür.

Qeyd 2: (1) şəklindəki rəasional bərabərsizliyi o zaman intervallar üsulu ilə həll etmək mümkündür ki, $P(x)$ və $Q(x)$ çoxhədlilərinin kökləri məlum olsun.

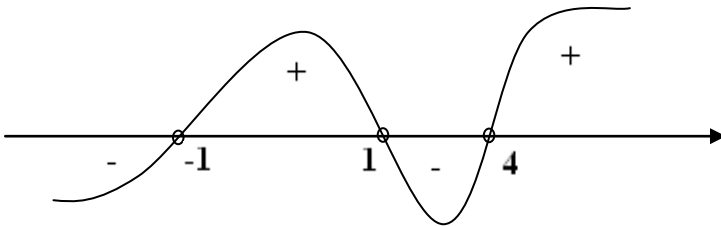
Misallar. Verilmiş bərabərsizlikləri həll edin.

$$1) x > 2 - \frac{6}{1-x}.$$

Həlli: Bərabərsizliyin bütün hədlərini sol tərəfə keçirək, onda

$$x - 2 + \frac{6}{1-x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 4}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-4)}{x-1} > 0$$

alınar. Bu bərabərsizliyi $x-1 > 0$ olduqda $(x+1)(x-1)(x-4) > 0$ şəklində yazaraq. Buradan $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$ götürüb intervallar üsulu ilə



Şəkil 2.

(Şəkil 2) alırıq. Deməli, $-1 < x < 1$ və $x > 4$ yəni $(-1, 1) \cup (4, \infty)$ çoxluğu bərabərsizliyin həllidir.

$$2) \frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1.$$

Həlli: Bütün hədləri sol tərəfə keçirib, ortaq məxrəcə gətirək:

$$\frac{8-4x+x^2}{(2-x)(2+x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+8}{(x+2)(x-2)} > 0$$

alırıq. Bərabərsizliyi

$$(x^2-4x+8)(x+2)(x-2) > 0$$

şəklində yazaq. $D < 0$ olduğundan bütün x -lar üçün $x^2-4x+8 > 0$ olur. Deməli, verilən bərabərsizlik, onunla eynigüclü olan

$$(x+2)(x-2) > 0,$$

bərabərsizliyə gətirilir. Son bərabərsizliyin həlli isə $x < -2$ və $x > 2$ olar. Yəni $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$.

$$3) \frac{1}{3x-2-x^2} - \frac{3}{7x-4-3x^2} > 0.$$

Həlli:

$$3x-2-x^2 = (x-1)(2-x),$$

$$7x-4-3x^2 = (x-1)(4-3x)$$

olduğundan verilən bərabərsizlik

$$\frac{1}{(x-1)(2-x)} - \frac{2}{(x-1)(4-3x)} > 0$$

şəklinə düşər. Buradan isə

$$\frac{2}{3(x-1)(x-2)\left(x-\frac{4}{3}\right)} < 0$$

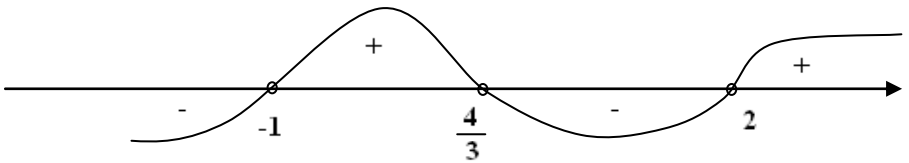
alınır. Aydındır ki, bu bərabərsizlik

$$(x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-2) < 0$$

bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür. Buradan intervallar üsulu ilə (şəkil 3)

$$-\infty < x < 1; \quad \frac{4}{3} < x < 2$$

alarıq.



Şəkil 3.

Beləliklə, $x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right)$ çoxluğu verilmiş

bərabərsizliyin həlli olur.

$$4) (x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 < 0.$$

Həlli: $x^2 + 4x + 10 = y$ ilə işarə etsək, verilən bərabərsizliyi $y^2 - 7(y + 1) + 7 < 0$ və yaxud $y^2 - 7y < 0$ şəklində yazı bilərik. Bu bərabərsizliyin həlli $0 < y < 7$ intervalıdır. Onda əvəzləməni nəzərə alsaq $0 < x^2 + 4x + 10 < 10$ alarıq. Buradan $x^2 + 4x + 3 < 0$ bərabərsizliyini alarıq ki, onun da həllər çoxluğu $a = 1$, $D > 0$ olduğundan $(-1, -3)$ intervalı olar.

Çalışmalar. Bərabərsizlikləri həll edin.

$$1) \frac{(x+1)(x+5)}{x+2} < 0,$$

$$2) \frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1,$$

$$3) \frac{x-1}{x^2-5x+6} > 0,$$

$$4) \frac{x^2+5x+4}{x^2+5x-6} < 0,$$

$$5) \frac{5-2x}{3x^2-2x-16} < 1,$$

$$6) \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} > \frac{1}{x},$$

$$7) \frac{6x+5}{x^2-3x+2} < \frac{3x+4}{x^2-3x+2},$$

$$8) \frac{4x-7}{x^2-5x+6} > \frac{2x+9}{x^2-5x+6}.$$

8. İRRASİONAL BƏRABƏRSİZLİKLƏR

Kök altında məchulu olan bərabərsizliklər irrasional bərabərsizliklər adlanır. İrrasional bərabərsizlikləri həll etmək üçün aşağıdakıları bilmək lazımdır.

Tənliyə daxil olan cüt dərəcəli köklər hesabi köklərdir. Yəni cüt dərəcədən kökaltı ifadə mənfi olarsa, kök mənasını itirər, sıfıra bərabər olarsa, kökün qiyməti sıfır olur, kökaltı ifadə müsbət olduqda kökün qiyməti müsbət götürülür.

Bərabərsizliyə daxil olan bütün tək dərəcəli köklər kökaltı ifadənin istənilən həqiqi qiymətində təyin olunur. Bu halda kökün işarəsi kökaltı ifadənin işarəsi ilə eyni olur.

Məlumdur ki, $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in N$; $n \geq 2$) funksiyası təyin olunduğu oblastda artan funksiyadır.

Tərəfləri mənfi olmayan bərabərsizliyin hər iki tərəfini, işarəsini saxlamaqla, kvadrata yüksəltdikdə onunla eynigüclü bərabərsizlik alınır.

Tərəfləri ixtiyari ədəd olan bərabərsizliyin hər iki tərəfini tək dərəcədən qüvvətə yüksəltdikdə, onunla eynigüclü olan bərabərsizlik alınır.

İndi irrasional bərabərsizliklərin həllində rast gəlinən ayrı-ayrı xüsusi hallara baxaq:

$$1. \sqrt{f(x)} < \varphi(x).$$

Bu halda verilən bərabərsizlik

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ \sqrt{f(x)} < \varphi(x). \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi ilə eynigüclüdür. Buradan

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) < (\varphi(x))^2. \end{cases}$$

yazmaqla alınan bərabərsizliklər sisteminin həlli verilən bərabərsizliyin həlli olur.

$$2. \sqrt{f(x)} > \varphi(x).$$

Burada $\varphi(x) \geq 0$ və $\varphi(x) < 0$ olmaqla iki halı nəzərdən keçirək:

a) $\varphi(x) \geq 0$ olduqda verilən bərabərsizlik

$$\begin{cases} \varphi(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) > (\varphi(x))^2. \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi ilə;

b) $\varphi(x) < 0$ olduqda isə,

$$\begin{cases} \varphi(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi ilə eynigüclüdür.

Əvvəlcə araşdırmanın köməyi ilə həll edilən bərabərsizliklərə baxaq.

Misallar. Verilən bərabərsizlikləri həll edin.

1) $\sqrt{3-x} \leq -1$.

Həlli: Hesabi kökün qiyməti mənfi ola bilmədiyindən bərabərsizliyin həlli yoxdur.

2) $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-7} < 0$.

Həlli: Mənfi olmayan iki ədədin cəmi (hesabi kökləri) mənfi ola bilməz, ona görə də bərabərsizliyin həlli yoxdur.

3) $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} \geq 2$.

Həlli: Burada

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+9 \geq 0 \end{cases}$$

olmalıdır. $\sqrt{x} \geq 0$, yəni $x \geq 0$ olarsa, $\sqrt{x+9} \geq 3$ olar, yəni

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+9} \geq 2$$

bərabərsizliyi x -in mənfi olmayan bütün qiymətlərində doğrudur: $x \in [0, \infty]$.

$$4) \sqrt{x-3} - \sqrt{x+9} \geq \sqrt{x-2}.$$

Həlli: Əvvəlcə bərabərsizliyin təyin oblastını tapaq:

$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x+9 \geq 0, \\ x-2 \geq 0. \end{cases}$$

Buradan $x \geq 3$ alınır.

İstənilən x üçün $x-3 < x+9$ doğru olduğundan $\sqrt{x-3} < \sqrt{x+9}$ olur. Bu isə $\sqrt{x-3} - \sqrt{x+9} < 0$ deməkdir. Lakin verilən bərabərsizliyin sağ tərəfi $\sqrt{x-2} \geq 0$ olduğundan ziddiyət alınır. Deməli, verilən bərabərsizliyin həlli yoxdur.

İndi bərabərsizliklərin analitik həllinə baxaq:

Misallar. Verilən bərabərsizlikləri həll edin.

$$1) \sqrt{x^2 - 13} \leq 6,$$

Həlli: Verilən bərabərsizliyin tərəfləri mənfi olmadığından hər tərəfini kvadrata yüksəltmək olar:

$$\begin{cases} x^2 - 13 \geq 0, \\ x^2 - 13 \leq 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 13 \\ x^2 \leq 49. \end{cases}$$

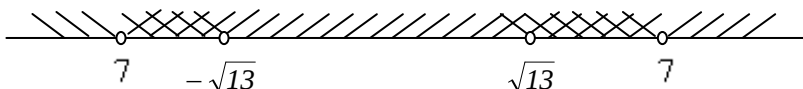
Buradan

$$\begin{cases} x \geq -\sqrt{13}, & x \leq -\sqrt{13} \\ -7 \geq x \leq 7 \end{cases}$$

alınır. Beləliklə,

$$x \in [-7; -\sqrt{13}] \cup [\sqrt{13}; 7]$$

çoxluğu bərabərsizliyin həlli olar (şəkil 1).



Şəkil 1.

$$2) \sqrt{2x^2 + x - 1} < \sqrt{2x}.$$

Həlli: Bərabərsizlik

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 \geq 0, \\ 2x > 0, \\ \sqrt{2x^2 + x - 1} < \sqrt{2x}, \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi ilə eynigüclüdür. Bu sistemi həll etsək:

$$\begin{cases} x \leq -1, \\ x > 0 \\ -\frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \quad x \geq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

alınar. Beləliklə, bərabərsizliyin həlli $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$ olur.

$$3) \sqrt{x-3} > \sqrt{20-3x}.$$

Həlli:

$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ 20-3x \geq 0 \\ x-3 > 20-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \leq 6\frac{2}{3} \\ x > 5\frac{3}{4} \end{cases}$$

Buradan $5\frac{3}{4} < x \leq 6\frac{2}{3}$ alınır. Deməli, bərabərsizliyin

həlli $\left(5\frac{3}{4}; 6\frac{2}{3}\right]$ yarımparçası olur.

$$4) \sqrt{x^2-3x+2} < x-1.$$

Həlli: Bərabərsizlik

$$\begin{cases} x^2-3x+2 \geq 0, \\ x-1 > 0, \\ x^2-3x+2 < (x-1)^2. \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi ilə eynigüclüdür. Bərabərsizliklər sistemini həll etsək,

$$\begin{cases} x \leq 1, & x \geq 2 \\ x > 1 \end{cases}$$

alırıq. Buradan aşkardır ki, verilən bərabərsizliyin həlli $x \geq 2$ olar, yəni $x \in [2; \infty)$.

Çalışmalar. Bərabərsizlikləri həll edin.

1) $\sqrt{2x-3} > 0$,

2) $\sqrt{x} > x-1$,

3) $x + \sqrt{x+5} < 1$,

4) $\sqrt{x+1} < x-1$,

5) $\sqrt{10 - \sqrt[3]{2-x}} < 3$,

6) $x + \sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8$,

7) $\sqrt{x^2 - 3x + 1} > \sqrt{2x - 3}$,

8) $\frac{1 - \sqrt{1 - 9x^2}}{x} < 1$,

9) $2x + \sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8$,

10) $\frac{\sqrt{2-x}-3}{x} \geq -2$.

9. ÜSTLÜ VƏ LOQARİFMİK BƏRABƏRSİZLİKLƏR

Üstlü və loqarifmik bərabərsizlikləri həll edərkən, üstlü və loqarifmik funksiyaların xassələrindən istifadə edilir.

Bu funksiyaların monotonluq xassəsinə əsasən aşağıdakı təkliflər doğrudur.

1) $a > 1$ olduqda $a^{x_1} < a^{x_2}$ bərabərsizliyindən $x_1 < x_2$, $0 < a < 1$ olduqda isə $x_1 > x_2$ alınar.

2) $a > 1$ olduqda $\log_a x_1 < \log_a x_2$ bərabərsizliyindən $x_1 < x_2$, $0 < a < 1$ olduqda isə $x_1 > x_2$ alınar.

Qeyd etmək lazımdır ki, bir sıra hallarda üstlü və loqarifmik bərabərsizliklər əvəzetmə üsulunun köməyi ilə cəbri bərabərsizliklərə gətirilir.

Əvvəlcə üstlü bərabərsizliklərə aid nümunələrə baxaq:

Misallar. Verlən bərabərsizlikləri həll edin.

$$1) 32^{-3x} > \frac{1}{8}.$$

$$32^{-3x} > \frac{1}{2^3} \Leftrightarrow (2^5)^{-3x} > 2^{-3} \Leftrightarrow 2^{-15x} > 2^{-3}$$

Burada $a = 2 > 1$ olduğundan $-15x > -3$ olmalıdır.

Buradan $x < \frac{1}{5}$ alınır. Deməli, verilən bərabərsizliyin həlli

$x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$ intervalıdır.

$$2) \sqrt[3]{3^{\frac{3x-1}{x-1}}} - 27^{\frac{x-3}{3x-7}} < 0.$$

Həlli: Verilən bərabərsizliyi özü ilə eynigüclü olan

$$3^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} < 3^{\frac{3(x-3)}{3x-7}}$$

bərabərsizliyi şəklində yazaraq.

Burada $a = 3 > 1$ olduğundan üstlü funksiyanın xassəsinə əsasən

$$\frac{3x-1}{3(x-1)} < \frac{3(x-3)}{3x-7}$$

alırıq. Bu bərabərsizliyi məlum üsulla həll edək:

$$\begin{aligned} \frac{3x-1}{3(x-1)} - \frac{3(x-3)}{3x-7} &< 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(3x-1)(3x-7) - 9(x-1)(x-3)}{3(x-1)(3x-7)} &< 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2 - 24x + 7 - 9x^2 + 36x - 27}{9(x-1)\left(x - \frac{7}{3}\right)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12x - 20}{9(x-1)\left(x - \frac{7}{3}\right)} < 0 \Leftrightarrow \frac{12\left(x - \frac{5}{3}\right)}{9(x-1)\left(x - \frac{7}{3}\right)} < 0.$$

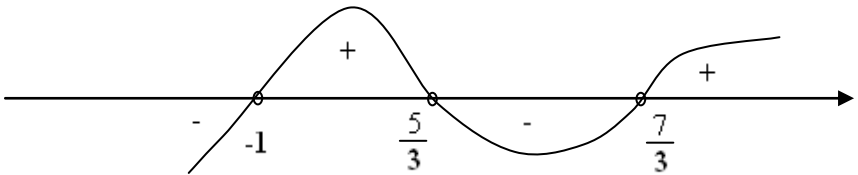
Sonuncu bərabərsizlik $(x-1)\left(x - \frac{7}{3}\right) > 0$ olduqda

$$\left(x - \frac{5}{3}\right)(x-1)\left(x - \frac{7}{3}\right) < 0,$$

bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür. Buradan intervallar üsuluna

əsasən bərabərsizliyin həllinin $x \in (-\infty; 1) \cup \left(1\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right)$

çoxluğu olduğunu alarıq (şəkil 1).



Şəkil 1.

$$3) \frac{6x^2}{2^{-15}} > \frac{3^{-15}}{6^{12-12x}}.$$

Həlli: $2^{-15} > 0$ və $6^{12-12x} > 0$ olduğundan, verilən bərabərsizlik

$$6x^2 \cdot 6^{12-12x} > 2^{-15} \cdot 3^{-15}$$

bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür. Buradan $6x^{2-12x+12} > 6^{-15}$ alınar. Üstlü funksiyanın əsası $a=6 > 1$ olduğundan, $x^2 - 12x + 12 > -15$ və yaxud $x^2 - 12x + 27 > 0$ alarıq. $x^2 - 12x + 27$ kvadrat üçhədlisinin $x_1=3$, $x_2=9$ həqiqi kökləri olduğundan və x^2 -nin əmsalı müsbət olduğundan $x^2 - 12x + 27 > 0$ bərabərsizliyinin həlli $x \in (-\infty; 3) \cup (9; +\infty)$ çoxluğu olar.

Beləliklə, verilən bərabərsizliyin həlli $x \in (-\infty; 3) \cup (9; +\infty)$ çoxluğu olur.

$$4) \sqrt[x^2-1]{32} \sqrt[x-1]{4} - \sqrt[x+1]{8} \leq 0.$$

Həlli: Verilən bərabərsizliyi eynigüclü çevirib

$$2^{\frac{5}{x^2-1}} \cdot 2^{\frac{2}{x-1}} \leq 2^{\frac{3}{x+1}}$$

və yaxud

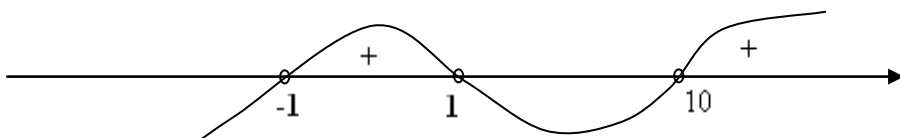
$$2^{\frac{5}{x^2-1} + \frac{2}{x-1}} \leq 2^{\frac{3}{x+1}}$$

şəklində yazaq. Bu halda $a=2 > 1$ olduğundan,

$$\frac{5}{x^2-1} + \frac{2}{x-1} \leq \frac{3}{x+1} \Leftrightarrow \frac{7+2x}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7+2x-3x+3}{x^2-1} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{x-10}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-10}{(x+1)(x-1)} \geq 0$$

olar. Buradan intervallar üsulu ilə (şəkil 2) $x \in (-1;1) \cup [10;+\infty)$ olduğunu alarıq.



Şəkil 2.

İndi isə loqarifmik bərabərsizliklərə aid misallara baxaq.

Qeyd edək ki, loqarifmik bərabərsizlikləri həll edərkən birinci növbədə loqarifmik funksiyalar üçün məchulun mümkün qiymətlər çoxluğu tapılmalıdır.

Misallar. Verilən bərabərsizlikləri həll edin.

$$1) \log_4(\sqrt{59-10x}-1) \leq 0,5 + \log_4(x-4).$$

Həlli: Əvvəlcə bərabərsizlik üçün məchulun mümkün qiymətlər çoxluğunu müəyyən edək:

$$\begin{cases} 59-10x \geq 0 \\ x-4 > 0 \\ \sqrt{59-10x}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5,9 \\ x > 4 \\ x < 5,8 \end{cases}$$

Buradan $x \in (4;5,8)$ alınır. Bərabərsizliyi çevirib

$$\log_4(\sqrt{59-10x}-1) \leq \log_4 4^{0,5} + \log_4(x-4)$$

şəklində yazaraq, buradan

$$\log_4(\sqrt{59-10x}-1) \leq \log_4 2(x-4)$$

alırıq.

$a = 4 > 1$ olduğundan isə

$$\sqrt{59-10x}-1 \leq 2(x-4)$$

yaxud

$$\sqrt{59-10x} \leq 2x-7$$

alınar. Bu bərabərsizlik

$$\begin{cases} 59-10x \geq 0, \\ 2x-7 \geq 0, \\ 59-10x \leq (2x-7)^2, \end{cases}$$

sistemi ilə eynigüclüdür. Buradan alınar ki,

$$\begin{cases} x \leq 5,9 \\ x \geq 3,5 \\ 4x^2 - 18x - 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5,9 \\ x > 3,5 \\ x \leq -0,5 \end{cases} \quad x \geq 5$$

Nəticədə: $x \in [5;5,9]$ parçası ilə bərabərsizliyin təyin oblastı olan $(4;5,8)$ intervalının kəsişməsi olan $[5;5,8)$ yarımintervalı verilən bərabərsizliyin həlli olur.

$$2) \frac{2\log_2(3-2x)}{\log_{0,2} 0,1} < 0.$$

Həlli: $\log_{0,2} 0,1 > 0$ olduğundan verilən bərabərsizlik $\log_2(3-2x) < 0$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür.

Burada $a = 2 > 0$ olduğundan bərabərsizlik $0 < 3 - 2x < 1$ olduqda doğrudur. Bu ikiqat bərabərsizlik

$$\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ 3 - 2x < 1 \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi ilə eynigüclüdür. Buradan $1 < x < 1,5$ alınır.

Beləliklə, $x \in (1; 1,5)$ intervalı verilən bərabərsizliyin həlli olur.

$$3) \ln(2x - 3) < \ln(x + 1).$$

Həlli: Əvvəlcə bərabərsizliyin təyin oblastını tapaq:

$$\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1,5 \\ x > -1 \end{cases}$$

Buradan $x \in (1,5; \infty)$ alınır.

Loqarifmin əsası e ədədi vahiddən böyük olduğu üçün verilən bərabərsizlik

$$2x - 3 < x + 1$$

bərabərsizliyi ilə eynigüclü olar. Nəticədə verilən bərabərsizliyin həlli $(1,5;4)$ və $(1,5;\infty)$ intervallarının kəsişməsi olan $(1,5;4)$ intervalı olar.

$$4) \log_4(3x-4) - \log_4(5-x^2) > 0,5.$$

Həlli: Bərabərsizliyi onunla eynigüclü olan bərabərsizliklər sistemi ilə əvəz edək:

$$\begin{cases} 3x-4 > 0, \\ 5-x^2 > 0, \\ \log_4 \frac{3x-4}{5-x^2} > \log_4 4^{0,5}. \end{cases}$$

Buradan

$$\begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \\ \frac{3x-4}{5-x^2} > 2 \end{cases}$$

və yaxud

$$\begin{cases} \frac{3}{4} < x < \sqrt{5}, \\ x < -\frac{7}{2}, \quad x > 2, \end{cases}$$

alınar. Beləliklə, bərabərsizliyin həlli $(2;\sqrt{5})$ intervalı olur.

Çalışmalar. I. Bərabərsizlikləri həll edin.

$$1) \left(\frac{4}{9}\right)^{x^2-1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+6},$$

$$2) 9^x < 3^x + 2,$$

$$3) \frac{1}{3^x + 5} < \frac{1}{3^{x+1} - 1},$$

$$4) 8^{x^2-x-2} > \frac{1}{64},$$

$$5) \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{x^2-45} > -0,81^x.$$

II. Bərabərsizliklərin ən kiçik tam həllini tapın.

$$6) \lg(3x - 2) > \lg(x + 7),$$

$$7) \lg(5x - 4) > \lg(x + 3).$$

III. Bərabərsizliklərin ən böyük tam həllini tapın.

$$8) \lg(x^2 - 4x - 12) < 1 + \lg 2,$$

$$9) \log_2(x^2 - 18x + 60) < 3.$$

IV. Bərabərsizliyin ən kiçik müsbət tam həllini tapın

$$10) \log_{0,1}(x^2 + 1) < \log_{0,1}(2x + 25).$$

10. TRIQONOMETRİK BƏRABƏRSİZLİKLƏR

Məchulu triqonometrik funksiya işarəsi altında olan bərabərsizliklər triqonometrik bərabərsizliklər adlanır.

$$\sin x \geq a, \quad \cos x \geq a, \quad \operatorname{tg} x \geq a, \quad \operatorname{ctg} x \geq a$$

sadə triqonometrik bərabərsizliklərdir.

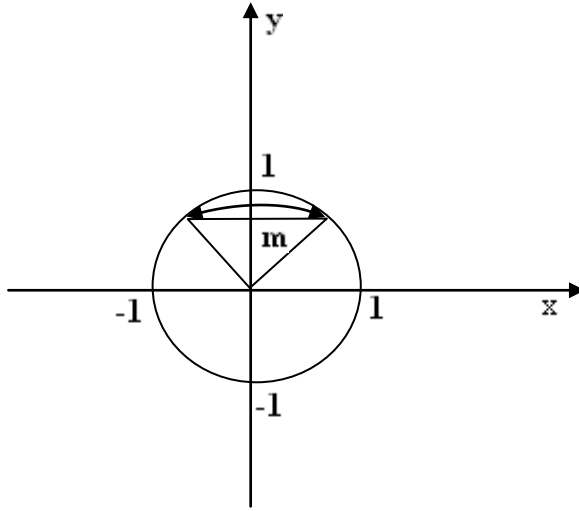
Triqonometrik bərabərsizliklərin həlii triqonometrik funksiyların və bərabərsizliklərin xassələrinə əsaslanır. Triqonometrik bərabərsizliklərin həlli sadə triqonometrik bərabərsizliklərin həllinə gətirildiyindən, əvvəlcə onların həllinə baxaq:

1. $\sin x > m$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu təyin edin.

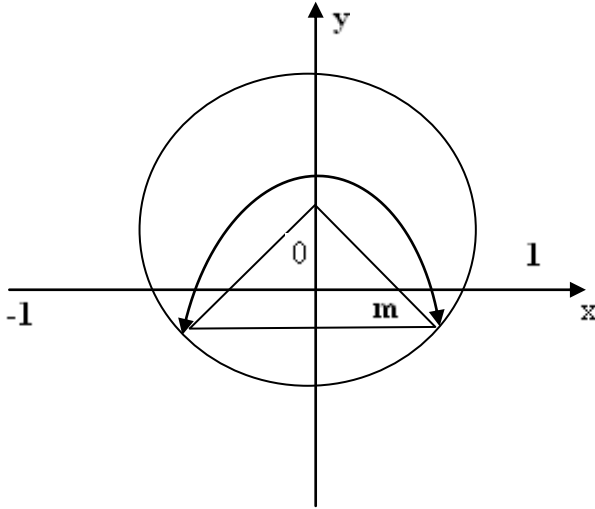
Həlli: Aşağıdakı mümkün hallara baxaq:

a) Əgər $m < -1$ olarsa, bərabərsizliyin həlli istənilən həqiqi ədəddir;

b) $-1 < m < 1$ olarsa, $\sin x > m$ bərabərsizliyini həll etmək üçün $-1 < m < 0$ və $0 < m < 1$ hallarını ayrı-ayrılıqda nəzərdən keçirmək lazımdır.



Şəkil 1. $0 < m < 1$



Şəkil 2. $-1 < m < 0$

Şəkillərdən aydın olur ki, $0 < m < 1$ olduqda (şəkil 1) $\sin x > m$ bərabərsizliyinin həlli

$$\left\{ 2k\pi + \arcsin m < x < \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi + \arcsin m, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

çoxluğu, $-1 < m < 0$ olduqda isə

$$\{ 2(k+1)\pi + \arcsin m < x < (2(k+1))\pi - \arcsin m, \quad k \in \mathbb{Z} \}$$

çoxluğu olar;

c) $m > 1$ olarsa, bərabərsizliyin həlli yoxdur.

II. $\sin x < m$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu təyin edin.

a) Əgər $m < -1$ olarsa, bərabərsizliyin həlli yoxdur;

b) Birinci misalın (b) bəndində olduğu kimi burada da $0 < m < 1$ və $-1 < m < 0$ hallarını nəzərdən keçirmək lazımdır. Şəkil 3 və 4-dən aydın olur ki,

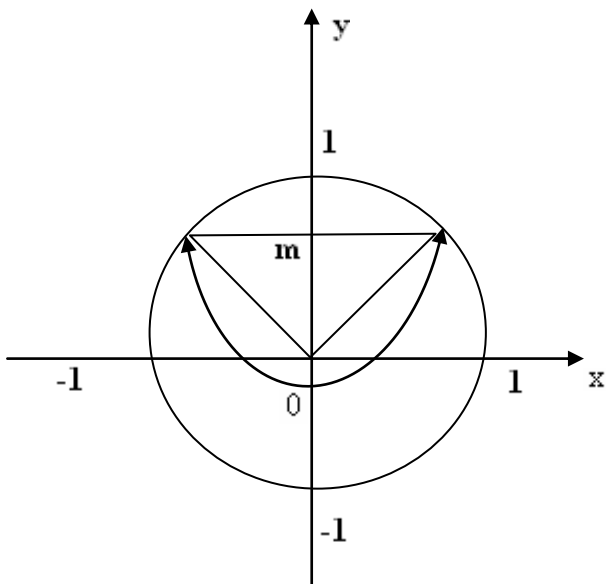
$0 < m < 1$ olduqda $\sin x < m$ bərabərsizliyinin həlli (şəkil 3)

$$\{ (2k+1)\pi - \arcsin m < x < (2(k+1))\pi + \arcsin m, \quad k \in \mathbb{Z} \}$$

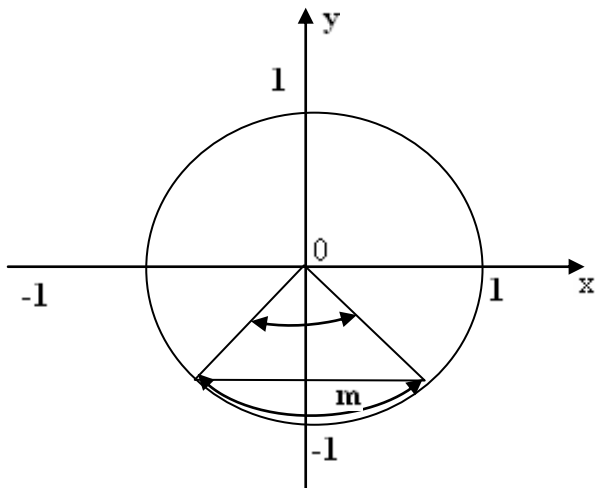
çoxluğu, $-1 < m < 0$ olduqda isə

$$\{ (2k+1)\pi + \arcsin m < x < (2(k+1))\pi - \arcsin m, \quad k \in \mathbb{Z} \}$$

çoxluğu olar;



Şəkil 3. $0 < m < 1$



Şəkil 4. $-1 < m < 0$

c) $m > 1$ olduqda, bərabərsizlik x -in bütün qiymətlərində doğrudur.

3) $\cos x > m$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu tapın.

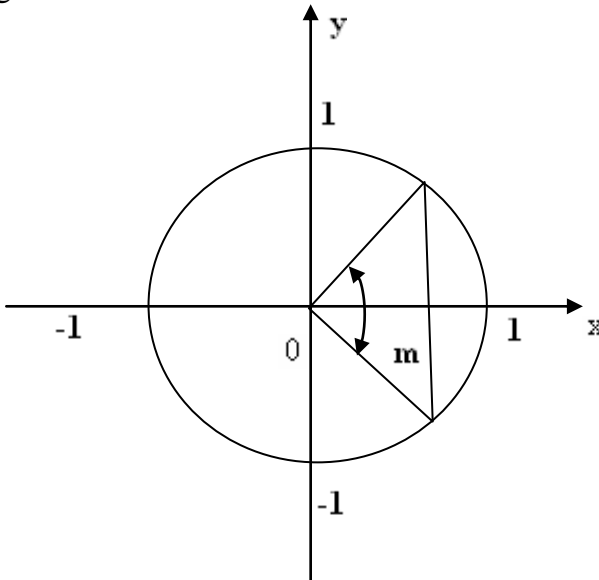
Həlli: a) $m < -1$ olarsa, istənilən həqiqi ədəd $\cos x > m$ bərabərsizliyinin həllidir.

b) $-1 < m < 1$ olduqda;

1) $0 < m < 1$ olarsa, onda $\cos x > m$ bərabərsizliyinin həlli

$$2k\pi - \arccos m < x < 2k\pi + \arccos m, \quad k \in \mathbb{Z}$$

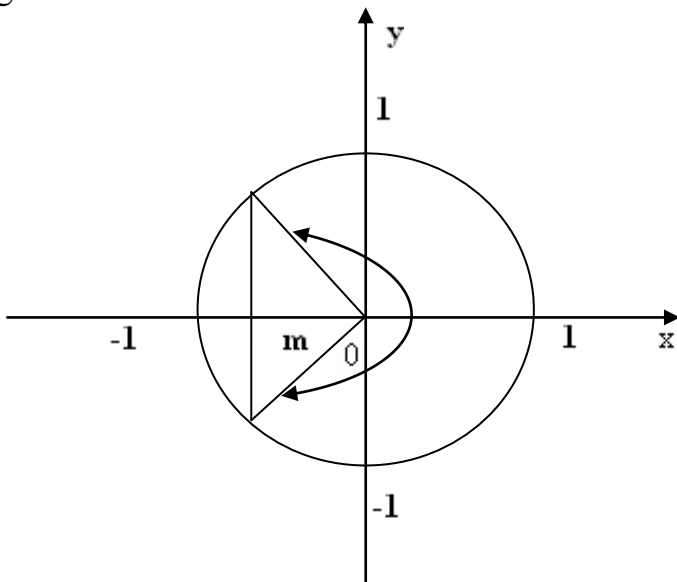
çoxluğu olar.



2) $-1 < m < 0$ olduqda isə $\cos x > m$ bərabərsizliyinin həlli

$$(2k-1)\pi + \arccos m < x < 2k\pi + \arccos m$$

çoxluğu olar.



Beləliklə,

$$x = \{(2k\pi - \arccos m, 2k\pi + \arccos m) \cup \\ \cup ((2k-1)\pi + \arccos m, 2k\pi + \arccos m)\}$$

olduqda $\cos x > m$ bərabərsizliyi ödənilər.

c) $m > 1$ olduqda, bərabərsizliyin həlli yoxdur.

4) $\cos x < m$ bərabərsizliyinin həllər

çoxluğunu tapın.

a) $m < -1$ olarsa, bərabərsizliyin həlli yoxdur;

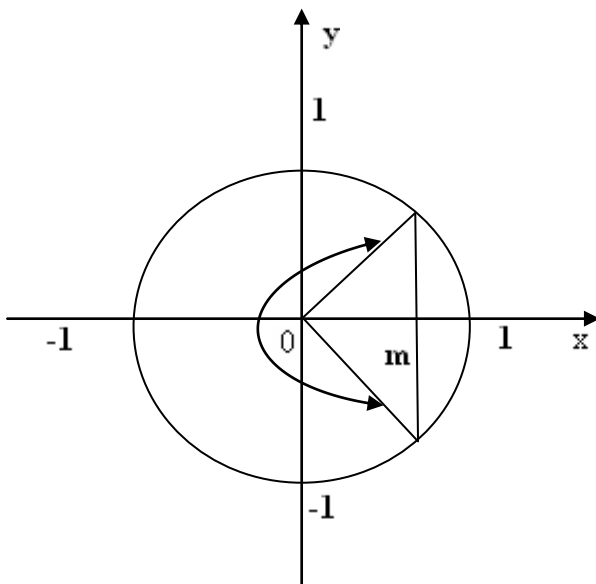
b) $-1 < m < 1$ olduqda;

1) $0 < m < 1$ olarsa, $\cos x < m$

bərabərsizliyinin həlli

$$2k\pi + \arccos m < x < (2k+1)\pi - \arccos m, \quad k \in \mathbb{Z}$$

çoxluğu olar.



2) $-1 < m < 0$ olduqda isə, $\cos x < m$

bərabərsizliyinin həlli

$$2k\pi + \arccos m < x < (2k+1)\pi - \arccos m, \quad k \in \mathbb{Z}$$

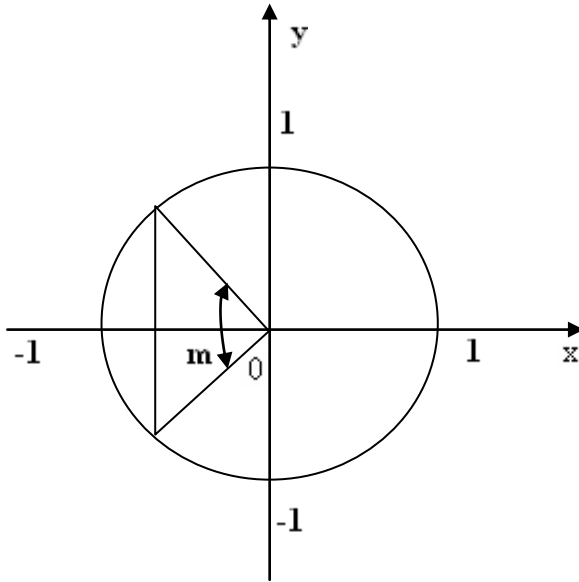
çoxluğu olar.

c) $m > 1$ olduqda, bərabərsizliyin

həlli bütün həqiqi ədədlər çoxluğu olur.

5) $\tan x > m$ bərabərsizliyinin həllər

çoxluğunu təyin edin.



Həlli: İstənilən m üçün verilən bərabərsizliyin həlli

$$\arctgm + \pi k < x < \frac{\pi}{2}(2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

kimidir.

6) $\operatorname{tg} x < m$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu tapın.

Həlli: Bərabərsizliyin həlli:

$$\frac{\pi}{2}(2k - 1) < x < \arctgm + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

kimidir.

7) $\operatorname{ctg} x > m$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu tapın.

Həlli: Bərabərsizliyin həllər çoxluğu

$$\pi k < x < \arctg m + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

şəklindədir.

8) $\operatorname{ctg} x < m$ bərabərsizliyinin həllini tapın.

Həlli: Bərabərsizliyin həlli:

$$\arctg m + \pi k < x < \pi(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Qeyd etmək lazımdır ki,

$$f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) \left(\begin{smallmatrix} < \\ > \end{smallmatrix} \right) m$$

şəklində bərabərsizliklərin həllində əgər $f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x)$ funksiyası dövrüdürsə, onun ən kiçik dövrü həll tapılır, sonra isə funksiyanın dövrülüyü xassəsinə əsasən bütün təyin oblastında bərabərsizliyin həlli yazılır.

Misallar. Verilən bərabərsizliyi həll edin:

$$1) \sin x > \frac{1}{2}.$$

Həlli: 1-nin (b) halındakı düstura əsasən bərabərsizliyin həlli

$$2\pi k + \frac{\pi}{6} < x < 2\pi k + \frac{5\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

çoxluğu olar.

$$2) \sin x < \frac{1}{2}.$$

Həlli: 2-nin (b) halında alınan düstura əsasən bərabərsizliyin həlli:

$$\pi(2k+1) - \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi(k+1)$$

yəni

$$2\pi k + \frac{5\pi}{6} < x < 2\pi k + \frac{13\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

çoxluğu olar.

$$3) \quad 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 \geq 0 \quad \text{bərabərsizliyinin həllər}$$

çoxluğunu tapın.

Həlli: Bərabərsizliyi

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2}$$

şəklində yazaraq, I (b) halındakı düstura əsasən

$$2\pi k - \frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi k$$

alınar. Buradan bərabərsizliyin həllər çoxluğunun

$$\left\{ \pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

şəklində olduğunu alırıq.

$$4) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 1 \text{ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu}$$

təyin edin.

Həlli: 5-ci misalda olduğu kimi bərabərsizliyin həllər çoxluğu

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x - \frac{\pi}{4} < k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

və yaxud

$$\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

şəklində olar.

Çalışmalar. Bərabərsizlikləri həll edin.

$$1) \sin x > \frac{1}{4}, \quad 2) \cos x > -\frac{1}{2},$$

$$3) \sin \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad 4) \operatorname{tg} x > -\sqrt{3},$$

$$5) \operatorname{tg} 3x < -1, \quad 6) \operatorname{ctg} \frac{x}{2} < 1,$$

$$7) \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{12}\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 8) 2\cos^2 x > \frac{3}{2},$$

$$9) \sin x \geq \cos x, \quad 10) \sin 3x < \sin x.$$

11. MÜTLƏQ QİYMƏT İŞARƏSİ ALTINDA MƏCHULU OLAN BƏRABƏRSİZLİKLƏR

Mütləq qiymət işarəsi altında məchulu olan bərabərsizliklərin həllində, bərabərsizliyin təyin oblastını elə çoxluqlara ayırmaq lazımdır ki, bu çoxluqların hər birində mütləq qiymət işarəsi daxilindəki ifadələr işarəsini saxlasın. Sonra mütləq qiymətin tərifindən istifadə etməklə bu çoxluqların hər birində bərabərsizlik həll edilir və alınan həllər çoxluğunun birləşməsi, verilən bərabərsizliyin həlli olur.

Misallar. Verilən bərabərsizlikləri həll edin.

1) $|5 - x| < 2$.

Həlli: Məchulun mümkün qiymətlər çoxluğu $(-\infty; +\infty)$ intervalıdır. Aşağıdakı hallara baxaq:

a) $x < 5$ olduqda $5 - x > 0$ olduğundan verilən bərabərsizlik $5 - x < 2$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür.

Buradan

$$\begin{cases} x < 5, \\ x > 3, \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi alınar ki, onun da həlli $(3; 5)$

intervalıdır;

b) $x \geq 5$ olduqda, $5 - x \leq 0$ olduğundan, verilən bərabərsizlik $-(5 - x) < 2$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür.

Buradan

$$\begin{cases} x \geq 5, \\ x < 7, \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi alınır ki, onun da həlli $[5,7)$ yarımintervalıdır. Alınan çoxluqların $(3,5)$ və $[5,7)$ birləşməsi $(3,5) \cup [5,7) = (3,7)$ intervalı verilmiş bərabərsizliyin həlli olur.

2) $3x^2 - 5|x| + 2 > 0$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu təyin edin.

Həlli: Məchulun mümkün qiymətlər çoxluğu $(-\infty; +\infty)$ intervalıdır. Verilən bərabərsizlik aşağıdakı bərabərsizliklər sisteminə gətirilir:

$$\text{a) } \begin{cases} x < 0 \\ 3x^2 + 5x + 2 > 0 \end{cases}$$

$D = 25 - 24 = 1 > 0$ olduğundan kvadrat üçhədlinin iki həqiqi kökü vardır. $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{2}{3}$. $a = 3 > 0$ olmasına

əsasən kvadrat bərabərsizliyin həlli $x_1 < -1$; $x_2 > -\frac{2}{3}$ olur. $x < 0$ şərtini nəzərə alsaq, bu halda alınan bərabərsizlik sisteminin həlli $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ olar;

$$\text{b) } \begin{cases} x \geq 0, \\ 3x^2 - 5x + 2 > 0. \end{cases}$$

$$D = 25 - 24 = 1 > 0 \text{ olduğundan } x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = 1 \text{ olur.}$$

Odur ki, kvadrat bərabərsizliyin həllinin $x < \frac{2}{3}$, $x > 1$ olmasını və $x \geq 0$ şərtini nəzərə alsaq, bu halda alınan bərabərsizlik sisteminin həlli $\left[0, \frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$ olur.

Hər iki çoxluğun birləşməsi, verilən bərabərsizliyin həlləri çoxluğu $(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$ olar.

3) $1 < 3^{|x^2 - x|} < 9$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu tapın.

Həlli: $(x^2 - x)$ ifadəsi $x < 0$ və $x > 1$ olduqda müsbət,

$0 < x < 1$ olduqda isə mənfi olduğundan $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \infty)$ intervallarında verilən bərabərsizliklərə ayrı-ayrılıqda baxmaq lazımdır.

a) $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$ çoxluğunda $x^2 - x > 0$ olduğundan bərabərsizlik $1 < 3^{x^2 - x} < 9$ şəklinə düşər. Buradan $3^0 < 3^{x^2 - x} < 3^2$, yəni $0 < x^2 - x < 2$ alınar.

Nəticədə isə $x^2 - x - 2 < 0$, yəni $-1 < x < 2$ olur ($a = 1 > 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 2$ olduğundan).

Odur ki, verilən bərabərsizliyin həlli üçün $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$ və $(-1; 2)$ çoxluqlarının kəsişməsi olan $(-1; 0) \cup (1; 2)$ çoxluğunu alarıq;

b) $(0; 1)$ intervalında $x^2 - x < 0$ olduğundan verilən bərabərsizlik $1 < 3^{x^2 - x} < 9$, yaxud $0 < -x^2 + x < 2$ şəklinə düşər. Buradan isə $x^2 - x + 2 > 0$ alınar. $a = 1 > 0$ və $D < 0$ olduğundan bərabərsizlik x -in bütün həqiqi qiymətlərində doğrudur. Onda verilən bərabərsizliyin həlli $(-\infty; +\infty)$ və $(0; 1)$ intervallarının kəsişməsi, yəni $(0, 1)$ olar.

Hər iki halı nəzərə alsaq, verilən bərabərsizliyin həlli

$(-1;0) \cup (0;1) \cup (1;2)$ olar.

4) $|3 - \log_2 x| < 2$ bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu təyin edin.

Həlli: Verilən bərabərsizlik aşağıdakı bərabərsizliklər sistemi ilə eynigüclüdür:

$$\text{a) } \begin{cases} x > 0, \\ 3 - \log_2^2 x \geq 0, \\ 3 - \log_2 x < 2, \end{cases} \quad \text{və} \quad \text{b) } \begin{cases} x > 0, \\ 3 - \log_2 x < 0, \\ -(3 - \log_2 x) < 2. \end{cases}$$

Bu bərabərsizliklər sistemini ayrı-ayrılıqda həll etsək

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \leq 3 \\ \log_2 x > 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq 8 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 8, \\ \text{b) } \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 3 \\ \log_2 x < 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 8 \\ x < 32 \end{cases} \Leftrightarrow 8 < x < 32, \end{aligned}$$

alırıq. Alınan çoxluqların birləşməsi $(2;8) \cup (8;32) = (2;32)$ intervalı verilmiş bərabərsizliyin həllər çoxluğu olar.

Çalışmalar. Bərabərsizlikləri həll edin.

- 1) $|3 - x| < 4$;
- 2) $|x - 2| < 2x - 10$;
- 3) $|x + 2| > |x|$;
- 4) $|x - 1| + |x - 3| > 2$;

$$5) \ x^2 - |x-6| > 0;$$

$$6) \ |x^2 - x - 3| < 9;$$

$$7) \ 5^{|4x-6|} \geq 25^{3x-4};$$

$$8) \ 3^{|3x-4|} \leq 9^{2x-2};$$

$$9) \ |\log_3(x-4)| < 1;$$

$$10) \ |4 - \log_2 x| > 2.$$

12. BƏRABƏRSİZLİKLƏRİN FUNKSİYANIN TƏYİN OBLASTININ TAPILMASINA TƏTBİQİ

Məlumdur ki, irrasional, loqarifmik, tərs triqonometrik və sair funksiyaların təyin oblastının tapılmasında bərabərsizliklərdən geniş istifadə olunur. Bunları misallar üzərində izah edək.

I. İrrasional funksiyalar. Bildiyimiz kimi, cüt dərəcədən kökün mənası olması üçün kökaltı ifadə mənfi olmamalıdır.

Misallar. Verilən funksiyaların təyin oblastını tapın.

$$1) y = \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-1}.$$

Hər iki kökün mənası olması üçün

$$\begin{cases} x \leq 3, \\ x \leq -1; \quad x \geq 1, \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemi alınar. Bu çoxluqların kəsişməsi olan $(-\infty, -1) \cup [1, 3]$ çoxluğu verilən funksiyanın təyin oblastıdır.

$$2) y = \frac{x}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}} \text{ funksiyanın təyin olunma}$$

oblastını tapın.

Həlli: Verilən funksiyanın təyin oblastı x -in elə qiymətlər çoxluğudur ki, orada

$$\begin{cases} 4+x \geq 0, \\ 4-x \geq 0, \\ \sqrt{4+x} - \sqrt{4-x} \neq 0, \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} x \geq -4, \\ x \leq 4, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

münasibətləri ödənsin. Buradan təyin oblastının $[-4;0) \cup (0;4]$ çoxluğu olduğu alınır.

II. Loqarifmik funksiyalar. Loqarifmik funksiyaların təyin oblastını taparkən onun əsasının müsbət və vahiddən fərqli olmasını, eləcə də loqarifmi alınan ifadənin müsbət olmasını nəzərə almaq lazımdır.

Misallar. Verilən funksiyaların təyin oblastını tapın.

$$1) y = \log_2 \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}.$$

Həlli: Aydındır ki, funksiya

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2} > 0, \text{ yəni } (x+2)(x+1)(x+2) > 0, x+2 > 0,$$

$$(x+2)^2(x+1) < 0, x+2 < 0.$$

olduqda təyin olunub. Buradan

$$\begin{cases} (x+2)^2(x+1) > 0, \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2(x+1) < 0, \\ x+2 < 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0, \\ x+2 > 0 \end{cases} \quad \text{və yaxud} \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ x+2 < 0 \end{cases} \quad \text{buradan}$$

$x > -1$ və $x < -2$ alarıq.

Beləliklə, funksiyanın təyin olunma oblastı $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$ çoxluğu olar.

Nəticədə $x > -1$ alarıq. Beləliklə, funksiyanın təyin oblastı $(-1, \infty)$ olur.

$$3) y = \log_x(4^x - 4 \cdot 2^x - 5).$$

Həlli: Loqarifmin əsası üçün $x > 0$ və $x \neq 1$ münasibətləri ödənilməlidir. Daha sonra loqarifması alınan ifadə

$$4^x - 4 \cdot 2^x - 5 > 0$$

şərtini ödəməlidir. Buradan

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 5 > 0$$

Nəticədə isə $2^x < -1$ və $2^x > 5$ alınar. Bu bərabərsizliklərdən birincisinin həlli boş çoxluq, ikincisinin isə $x > \log_2 5$ -dir. Beləliklə, funksiyanın təyin oblastı $(\log_2 5; +\infty)$ intervalı olur ($\log_2 5 > 1$ olması aydındır).

$$4) y = \sqrt{\lg(x^2 + 3x + 3)}.$$

Həlli: $\lg(x^2 + 3x + 3) > 0$ olmalıdır. Məlumdur ki,

vahiddən böyük ədədin loqarifması mənfi olmaz. Ona görə $x^2 + 3x + 3 \geq 1$, yəni $x^2 + 3x + 2 \geq 0$ alınar. Alınmış bərabərsizliyin həlli isə $(-\infty, -2] \cup [-1, +\infty)$ şəklindədir. Deməli, $(-\infty, -1] \cup [-1, +\infty)$ çoxluğu verilən funksiyanın təyin oblastıdır.

III. Triqonometrik və tərs triqonometrik funksiyalar. Triqonometrik funksiyalar və eləcə də tərs triqonometrik funksiyalar daxil olan funksiyaların təyin oblastını taparkən sadə triqonometrik və tərs triqonometrik funksiyaların təyin oblastını bilmək lazımdır.

Misallar. Verilən funksiyaların təyin oblastını tapın:

$$1) y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}.$$

Həlli: $\sin x$ və $\cos x$ funksiyaları bütün həqiqi oxda təyin olunduqlarından verilən funksiyanın təyin oblastı

$$1 - \sin x \neq 0, \text{ yəni } x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

şərtini ödəyən bütün ədədlər çoxluğu olar.

$$2) y = \arccos(x^2 - 2x - 2).$$

Həlli: Məlumdur ki, $\arccos m$ funksiyası $|m| \leq 1$

şərtini ödəyən ədədlər üçün təyin olunub. Ona görə də

$$|x^2 - 2x - 2| \leq 1$$

olmalıdır. Buradan

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{və} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 2 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 2 \geq -1 \end{cases}$$

və yaxud

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \quad \text{və} \quad \begin{cases} x^2 - 2x - 2 \leq 0 \\ x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

alınar. Alınan bərabərsizliklərdən birincisinin həlli $[-1; 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}; 3]$ çoxluğu, ikinci bərabərsizliyin həlli isə $(-1; 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{2}; 1 + \sqrt{3})$ çoxluğudur. Beləliklə, verilən funksiyanın təyin oblastı tapılan çoxluqların birləşməsi $[-1, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, 3]$ olar.

Misallar. Aşağıdakı funksiyların təyin oblastını tapın.

$$1) y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-4} ,$$

$$2) y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x-5}$$

$$3) y = \sqrt{x-2} + \lg(3-x) ,$$

$$4) y = \sqrt{x \lg(4-x^2)}$$

$$5) y = \sqrt{\frac{x-2}{1+x}} + \sqrt{\log_3(3^x - 6)} ,$$

$$6) y = \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 - 5x + 3}}$$

$$7) y = \lg \operatorname{tg} x ,$$

$$8) y = \sqrt{\log_3(\sqrt{x-6} - \sqrt{10-x})} ,$$

$$9) y = \sqrt{(\sin x + \cos x)^2 - 1} ,$$

$$10) y = \log_2 \log_3 \log_4 x .$$

13. FUNKSİYANIN ARTMA VƏ AZALMA İNTERVALLARININ TAPILMASINA BƏRABƏRSİZLİKLƏRİN TƏTBİQİ

Tutaq ki, hər hansı bir aralıqda $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir. Bu aralıq interval, parça, yarıminterval, yarımox və ya bütün ədəd oxu ola bilər.

Tərif. Funksiyanın təyin oblastından götürülmüş $x_1 < x_2$ şərtini ödəyən istənilən x_1 və x_2 nöqtələri üçün funksiyanın uyğun qiymətləri $f(x_1) < f(x_2)$ bərabərsizliyini ödəyərsə, onda belə funksiya həmin oblastda artan, $f(x_1) > f(x_2)$ şərtini ödədikdə isə azalan funksiya deyilir. $x_1 < x_2$ olduqda $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$) münasibəti ödənilərsə, $f(x)$ -ə azalmayan (artmayan) funksiya deyilir. Azalan və artan funksiyalar birlikdə monoton funksiya adlanır.

Misallar.

1) $y = 2x + 5$ funksiyası bütün ədəd oxunda təyin olunub və istənilən $x_1 < x_2$ üçün $2x_1 + 5 < 2x_2 + 5$ münasibəti ödənilir, yəni artan funksiya.

2) $y = 3x^2$ funksiyası da bütün ədəd oxunda təyin olunub, lakin istənilən $x_1 < x_2 < 0$ üçün $3x_1^2 > 3x_2^2$ münasibəti; $0 < x_1 < x_2$ üçün isə $3x_1^2 < 3x_2^2$ münasibəti ödənilir, yəni verilən funksiya $(-\infty, 0)$ intervalında azalan, $(0, \infty)$ intervalında isə artan funksiyadır.

İkinci misaldan aydın olur ki, funksiya təyin oblastının bir hissəsində artan, digər hissəsində (yaxud hissələrində) isə azalan ola bilər. Odur ki, onun artma və azalma intervallarını bilavasitə tərifinin köməyi ilə tapmaq həmişə mümkün olmur. Baxılan funksiya təyin oblastında diferensiallanan olduqda onun artma və azalma intervallarını aşağıdakı teoremlərin köməyi ilə tapmaq olur.

Teorem 1. $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz, (a, b) intervalında diferensiallanan funksiya isə və həmin intervalda:

1. $f'(x) > 0$ olduqda $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında artan;
2. $f'(x) < 0$ olduqda $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında azalan funksiyadır.

Qeyd etmək lazımdır ki, $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında artması (azalması) üçün $f'(x)$ törəməsinin bu parçanın bütün daxili nöqtələrində müsbət (mənfi) olması zəruri deyil. Törəmə parçanın daxilindəki sonlu sayda nöqtələrdə sıfıra bərabər ola bilər. Məsələn, $y = x^3$ funksiyası $(-\infty, +\infty)$ intervalında artır, lakin onun $y' = 3x^2$ törəməsi bu intervalın daxilindəki $x = 0$ nöqtəsində müsbət deyil $y'(0) = 0$.

Teorem 2. $f(x)$ funksiyası (a,b) intervalında diferensiallanan və artandırırsa (azalandırırsa), onda onun həmin intervalda törəməsi mənfi (müsbət) deyil, yəni $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Yuxarıdakı teoremlərdən aydın olur ki, funksiyanın monotonluq oblastını təyin etmək üçün aşağıdakı əməliyyatlar ardıcılığı yerinə yetirilməlidir:

1. Funksiyanın təyin olunma oblastını tapmalı;
2. Funksiyanın birinci tərtib törəməsini hesablamalı;
3. Funksiyanın birinci tərtib törəməsinin müsbət olduğu və mənfi olduğu oblastı təyin etməli;
4. Törəmənin müsbət olduğu oblastda funksiya artır,

törəmənin mənfi olduğu oblastda isə funksiya azalır.

Misallar. Verilən funksiyaların artma və azalma intervallarını tapın.

$$1) y = 2x^3 + 3x^2 - 2.$$

Həlli: Verilən funksiyanın təyin oblastı $(-\infty, +\infty)$ intervalıdır. Özü də orada həm kəsilməz, həm də diferensiallanandır.

Funksiyanın birinci tərtib törəməsini tapıb müsbət olduğu untervalı seçək:

$$y' = 6x^2 + 6x > 0 \Leftrightarrow 6x(x+1) > 0$$

Buradan

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \text{ yəni } x > 0,$$

və

$$\begin{cases} x < 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \text{ yəni } x < -1,$$

alınır. Deməli, $(-\infty, -1)$ və $(0, \infty)$ intervallarında verilən funksiya artandır. Onda $(-1, 0)$ intervalı azalma intervalıdır.

$$2) y = (x-3)e^{2x} \text{ funksiyaının monotonluq intervalını}$$

tapın.

Həlli: Verilən funksiya $(-\infty, +\infty)$ intervalında təyin olunub, kəsilməz və diferensiallananadır.

$$y' = [(x-3)e^{2x}]' = e^{2x} + 2(x-3)e^{2x} = e^{2x}(2x-5)$$

$$e^{2x}(2x-5) > 0 \quad \text{bərabərsizliyindən} \quad e^{2x} > 0$$

olduğundan $2x-5 > 0$ və yaxud $x > \frac{5}{2}$ alırıq. Deməli,

$x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ oblastında verilən funksiya artandır. Onda

funksiya $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$ intervalında azalar, çünki bu intervalda

funksiyanın birinci tərtib törəməsi mənfi qiymət alır.

3) $y = \lg(x^2 + 5x + 6)$ funksiyanın monotonluq intervalını tapın.

Həlli: Əvvəlcə verilən funksiyanın təyin oblastını tapaq. Loqarifmik funksiya yalnız müsbət ədədlər çoxluğunda təyin olunduğundan $x^2 + 5x + 6 > 0$ olmalıdır. Kvadrat üçhədli $(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$ oblastında müsbət olduğundan verilən funksiya bu oblastda təyin olunur. Funksiya törəməsinin müsbət olduğu çoxluğu tapaq:

$$y' = \frac{(x^2 + 5x + 6)'}{x^2 + 5x + 6} \lg e = \frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 6} \lg e > 0$$

Buradan $\lg e > 0$ olduğundan $\frac{2x + 5}{x^2 + 5x + 6} > 0$ alarıq.

Bu bərabərsizlik və funksiyanın təyin olunma oblastını nəzərə alsaq,

$$\begin{cases} 2x + 5 > 0 \\ x^2 + 5x + 6 > 0 \end{cases}$$

alarıq ki, bu bərabərsizliklər sistemin həllər çoxluğu da $(-2, +\infty)$ oblastı olar.

Deməli, $(-2, +\infty)$ oblastında funksiya artır. Onda funksiya $(-\infty, -3)$ oblastında azalan olar.

4) $y = \frac{x^2}{x-1}$ funksiyaının monotonluq intervalını

təyin edin.

Həlli: Funksiyanın təyin oblastı $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ çoxluğudur. Bu çoxluqda funksiya həm kəsilməz, həm də diferensiallanandır.

Törəmənin müsbət olduğu çoxluğu tapaq:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x-1} \right)' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} > 0.$$

Buradan $x(x-2) > 0$ alınar ($x \neq 1$ şərtilə).
 Bərabərsizliyin həlli $x < 0$ və $x > 2$, yəni $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 olur. Deməli, verilən funksiya $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 çoxluğunda artan, təyin oblastının qalan $(0, 1) \cup (1, 2)$
 hissəsində isə azalandır.

Çalışmalar. Verilən funksiyaların monotonluq
 intervallarını tapın.

$$1) y = \frac{1}{2}x^3 - x ,$$

$$2) y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 ,$$

$$3) y = 2x^3 - 6x^2 + 5 ,$$

$$4) y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 3 ,$$

$$5) y = 3x^5 - 5x^3 ,$$

$$6) y = \frac{x}{x-1} ,$$

$$7) y = xe^x ,$$

$$8) y = xe^{-x^2} ,$$

$$9) y = x \ln x ,$$

$$10) y = x - \ln x .$$

14. BƏRABƏRSİZLİKLƏRİN İSBATI

Bərabərsizlikləri isbat etmək ona daxil olan hərflərin, bərabərsizliyin təyin oblastından götürülmüş qiymətlərində doğru olduğunu göstərmək deməkdir. Bərabərsizliklərin isbatı §1-də verilmiş xassələri nəzərə almaqla müxtəlif üsullarla yerinə yetirilir. Aşağıdakı əsas üsullardan daha çox istifadə olunur:

a) Eynigüclülük xassələrinə əməl etməklə isbat ediləcək bərabərsizlik çevirmələrin köməyi ilə aşkar bərabərsizliyə gətirilir;

b) Eynigüclülük xassələrinə əməl etməklə aşkar və ya məlum bərabərsizlikdən, isbat ediləcək bərabərsizlik alınır;

c) Yuxarıdakı iki üsulun eyni zamanda tətbiqi, yəni məlum və verilən bərabərsizliklərin çevrilməsi nəticəsində aşkar bərabərsizliyə gətirilir.

Bərabərsizliklərin isbatında çox istifadə ediləcəyini nəzərə alaraq aşağıdakı aşkar və sadə bərabərsizlikləri nəzərdən keçirək:

1) İstənilən həqiqi a və b ədədləri üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ və ya $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$, burada bərabərlik yalnız və yalnız $a = b$ olduqda doğrudur. Bu bərabərsizliyin doğruluğu $(a - b)^2 \geq 0$ aşkar bərabərsizliyindən alınır;

b) $|a + b| \leq |a| + |b|$. Burada bərabərlik halı $a = b$ olduqda alınır. Bu bərabərsizliyi daha ümumi şəkildə

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

kimi yazmaq olar;

c) $|a - b| \geq |a| - |b|$. Burada bərabərlik halı $a > 0$ və $b > 0$ olduqda doğrudur;

d) $a > 0$ və $D = b^2 - 4ac \leq 0$ olduqda $ax^2 + bx + c \geq 0$ olur, bərabərlik $D = 0$ olduqda alınır və bu halda $x = -\frac{b}{2a}$ olar.

2) İstənilən müsbət ədədlər üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

a) $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Bərabərlik halı $a = b$ olduqda alınır.

$\frac{a + b}{2}$ iki ədədin ədədi ortası, $\sqrt{ab}$ isə iki ədədin həndəsi

ortası adlanır.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \text{ doğru bərabərsizliyindən}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, \text{ və yaxud } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

alırıq.

Beləliklə, məlum doğru bərabərsizlikdən istifadə edərək isbatı tələb olunan bərabərsizliyi

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

alırıq.

Bu isə o deməkdir ki, iki müsbət ədədin ədədi ortası, bu ədədlərin həndəsi ortasından kiçik deyildir.

Bu bərabərsizlik n sayda müsbət ədəd üçün də doğru olub,

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

şəklində yazılır və Koşi bərabərsizliyi adlanır. Bərabərlik halı $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ olduqda alınır;

$$\text{b) istənilən müsbət } a \text{ və } b \text{ ədədləri üçün } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Bərabərlik halı yalnız $a = b$ olduqda doğrudur. Bu bərabərsizlik $a^2 + b^2 \geq 2ab$ bərabərsizliyi ilə eynigüclüdür;

c) $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ bərabərsizliyi ixtiyari müsbət ədədləri üçün doğrudur.

Bərabərlik halı $a = b$ olduqda alınır. Bu bərabərsizlik məlum $a^2 - ab + b^2 \geq ab$ bərabərsizliyini a və b ədədlərinə vurub tərəf-tərəfə toplamaqla alınır;

d) $c > 0$ və $0 < a < b$ olarsa, $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$ doğrudur. Bu bərabərsizliyin doğruluğu $ab + ac < ab + bc$ aşkar bərabərsizliyindən alınır.

Misallar. Aşağıdakı bərabərsizliklərin doğru olduğunu isbat edin.

1) İstənilən müsbət a və b üçün $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı: İsbat olunacaq bərabərsizliyin hər tərəfini kvadrata yüksəldək (tərəflər müsbətdir):

$$a + b + 2\sqrt{ab} > a + b$$

Buradan aşkar

$$\sqrt{ab} > 0$$

bərabərsizliyini alarıq. Bu bərabərsizlik eynigüclülük xassəsinə əməl edilməklə alındığından isbat olunacaq bərabərlik doğrudur.

2) $p > 0$ və $q > 0$ olarsa, $(p+2)(q+2)(p+q) \geq 16pq$ bərabərsizliyi doğrudur.

İsbati: Məlum $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ bərabərsizliyinə əsasən

$$p + 2 \geq 2\sqrt{2p}$$

$$q + 2 \geq 2\sqrt{2q}$$

$$p + q \geq 2\sqrt{pq}$$

bərabərsizliklərini yaza bilərik. Tərəfləri müsbət olan bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə vuraq:

$$(p+2)(q+2)(p+q) \geq 8\sqrt{4p^2q^2}$$

Buradan

$$(p+2)(q+2)(p+q) \geq 16pq$$

alarıq.

$$3) \quad a > 0, \quad b > 0 \quad \text{olarsa,} \quad \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt[4]{ab}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

İsbati. Bərabərsizliyin hər tərəfini $\sqrt[4]{ab}$ -yə bölək.

$$\frac{2^4\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq 1 \text{ yaxud } \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 2^4\sqrt{ab}$$

Bu bərabərsizlik aşkar $(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})^2 \geq 0$ bərabərsizliyi ilə eynigüclü olduğundan verilən bərabərsizlik doğrudur.

4) $a \neq 2$ olduqda $\frac{1}{a^2 - 4a + 4} > \frac{2}{a^3 - 8}$ bərabərsizliyi doğrudur.

İsbatı: Bərabərsizliyi

$$\frac{1}{(a-2)^2} > \frac{2}{(a-2)(a^2+2a+4)} \quad (1)$$

şəklində yazaq. $a \neq 2$ bütün qiymətlərində $(a-2)^2 > 0$ və $a^2 + 2a + 4 > 0$ olduğundan (1) bərabərsizliyinin hər tərəfini müsbət $(a-2)^2(a^2+2a+4)$ ifadəsinə vursaq, onunla eynigüclü olan $a^2 + 2a + 4 > 2(a-2)$, yaxud $a^2 + 8 > 0$ aşkar bərabərsizliyini alarıq. Deməli, verilən bərabərsizlik doğrudur.

Çalışmalar. Bərabərsizlikləri isbat edin.

$$1) (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc, (a > 0, b > 0, c > 0),$$

$$2) (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

$$3) (a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4),$$

4) $a + b + c = 1$ olarsa, $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$,

5) $b > a > 1$ və $c > 0$ olduqda $\log_a^b > \log_{a+c}(b + c)$,

6) $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0$,

7) $2x + 2y = 10$ olarsa, $3xy - x^2 - y^2 < 7$,

8) $a + 4b = 1$ olarsa, $a^2 + 4b^2 \geq a^2$,

9) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ardıcılığı monoton artandır,

10) $x + y + z = 6$ olarsa, $x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$ olar.

CAVABLAR

§2. 1) $(7, +\infty)$, 2) $(-12, +\infty)$, 3) $(2, +\infty)$, 4) $(0, +\infty)$,

5) $(-\infty; -7,5)$, 6) $\left(-\infty; 1\frac{1}{7}\right)$, 7) $(-\infty; -1,25)$,

8) $\left(4\frac{3}{13}, +\infty\right)$, 9) $(-\infty, 1)$, 10) $[-2; +\infty)$.

§3. 1) $\left(-2; -\frac{2}{3}\right)$, 2) $[2; +\infty)$, 3) $\left(-\infty; -\frac{26}{3}\right)$, 4) $\left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$,

5) $\left[-4; \frac{5}{2}\right]$, 6) $\emptyset$, 7) $(17; +\infty)$, 8) $[-4; 13)$,

9) $(-2; 1)$, 10) $(-3; 3]$.

§4. 1) $\left(\frac{7}{3}; \frac{16}{3}\right)$, 2) $[-46; -15]$, 3) $(2; 5)$, 4) $(-6; 3)$,

5) $\left(-5; \frac{1}{3}\right)$, 6) $(-20; 29]$, 7) 2, 8) 2, 9) -4, 10) -9.

§5. 1) $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, 2) $\left(14\frac{10}{15}; 16\frac{12}{15}\right)$, 3) $(-3, 1)$, 4) $\left(4\frac{2}{7}; 12\right)$,

5) $\left(\frac{7}{8}; \frac{22}{17}\right)$, 6) $\left(1\frac{1}{5}; 3\right)$, 7) $(1; 5)$, 8) $\left(\frac{7}{6}; \frac{59}{27}\right)$,

9) $\left(-\frac{11}{5}; \frac{22}{3}\right)$, 10) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{15}{7}\right)$.

$$\S 6. 1) [1;1,5], 2) (2;4), 3) \left(-\frac{3}{4};1\right), 4) \left(-1,\frac{1}{15}\right),$$

$$5) (-\infty;0) \cup (2,5;+\infty), 6) \left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$7) \left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right), 8) \left(-1;\frac{3}{4}\right), 9) \emptyset,$$

$$10) (-\infty;+\infty).$$

$$\S 7. 1) (-\infty;-5) \cup (-2;-1), 2) (-\infty;-2) \cup (2;+\infty),$$

$$3) (1;2) \cup (3;+\infty), 4) (-6;-4) \cup (-1;1),$$

$$5) (-\infty;-3) \cup (-\sqrt{7};\sqrt{7}) \cup (4;+\infty),$$

$$6) (-\sqrt{2};0) \cup (1;\sqrt{2}) \cup (2;+\infty), 7) \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right) \cup (1;2),$$

$$8) (2;3) \cup (8;+\infty).$$

$$\S 8. 1) (1,5;+\infty), 2) \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2};\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right), 3) [-5;-1),$$

$$4) (3;+\infty), 5) [-98;1), 6) (-\infty;-2) \cup \left(5;\frac{74}{13}\right),$$

$$7) (4;+\infty), 8) (-\infty;0) \cup (5;+\infty), 9) (3;4\frac{3}{5}),$$

$$10) (-\infty;0) \cup [1;2].$$

$$\S 9. 1) (-\infty; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; +\infty) \quad 2) (-\infty; \log_3^2),$$

$$3) (-1; 1), 4) (-\infty, 0) \cup (1; +\infty), 5) (-\infty; +\infty),$$

$$6) 5, \quad 7) 2, \quad 8) 7, \quad 9) 13, \quad 10) 7.$$

$$\S 10. 1) \left\{ \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k, \pi - \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$2) \left\{ -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \frac{2}{3}\pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$3) \left\{ 2(2k+1)\pi - \frac{2\pi}{3}, 4(k+1)\pi + \frac{2\pi}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$4) \left\{ -\frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$5) \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$6) \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$7) \left\{ \frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi k}{3}, \frac{13\pi}{9} + \frac{4\pi k}{3}; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$8) \left\{ -\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$9) \left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$10) \left\{ \left(\frac{\pi}{4}(8k-1), 2\pi k \right) \cup \left(\frac{\pi}{4}(8k+1), \frac{\pi}{4}(8k+3) \right) \cup \right. \\ \left. \cup \left(\pi + 2\pi k, \frac{\pi}{4}(8k+5) \right); k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\S 11. 1) (-1; 7), 2) (4, 8) \cup (8, +\infty), 3) \left(-\frac{1}{2}, +\infty \right),$$

$$4) (-\infty, 1) \cup (3, \infty), 5) (-\infty; -1) \cup (3, +\infty),$$

$$6) (-3, 4), 7) \left[\frac{7}{5}; \infty \right), 8) \left(-\infty; \frac{8}{7} \right), 9) \left(\frac{12}{3}; 7 \right),$$

$$10) (0, 4) \cup (64, \infty).$$

$$\S 12. 1) [2, +\infty), 2) \{5\}, 3) [2, 3),$$

$$4) (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2), 5) [2, +\infty),$$

$$6) (-1, 1) \cup (1, 5, +\infty), 7) \left\{ k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$8) \left(\frac{17}{2}, 10 \right), 9) \left\{ k\pi \leq x \leq \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi; k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$10) (4, +\infty)$$

$$\S 13. 1) \left(-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}} \right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty \right) \text{ arttır,}$$

$$\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \text{ azalır, 2) } (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \text{ arttır, } (-2, 0)$$

$$\text{azalır, 3) } (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \text{ arttır, } (0, 2) \text{ azalır,}$$

- 4) $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$ arttır, $(-4, 1)$ azalır,
5) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ arttır, $(-1, 1)$ azalır,
6) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ azalır, 7) $(-1, +\infty)$ arttır, $(-\infty, -1)$ azalılır, 8) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ arttır,
 $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ azalır, 9) $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ azalır, $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ arttır, 10) $(0, 1)$ azalır, $(1, +\infty)$ arttır.

MÜNDƏRICAT

səh.

1. Ədədi bərabərsizliklər və onlar üzərində əməllərin yerinə yetirilməsi metodikası.....	2
2. Birdəyişənli bərabərsizliklər.....	9
3. Xətti bərabərsizliklər sistemi.....	15
4. Kəsir-xətti bərabərsizliklər.....	21
5. İkiqat bərabərsizliklər.....	29
6. Kvadrat bərabərsizliklər.....	34
7. Rasional bərabərsizliklər.....	38
8. İrrasional bərabərsizliklər.....	46
9. Üstlü və loqarifmik bərabərsizliklər.....	53
10. Triqonometrik bərabərsizliklər.....	62
11. Mütləq qiymət işarəsi altında məchulu olan bərabərsizliklər.....	73
12. Bərabərsizliklərin funksiyanın təyin oblastının tapılmasına tətbiqi.....	79
13. Funksiyanın artma və azalma intervallarının tapılmasına bərabərsizliklərin tətbiqi.....	85
14. Bərabərsizliklərin isbatı.....	92
15. Cavablar.....	99

Xalidə Sidqəli qızı Həsənova
pedaqogika elmləri üzrə fəlsəfə doktoru

Cəbrayıl Fərman oğlu Cəfərov
Könül Həmid qızı Bədəlova

**ORTA MƏKTƏB RİYAZİYYAT
KURSUNDA BƏRABƏRSİZLİKLƏR VƏ
ONLARIN TƏDRİSİ METODİKASI**

(Metodik vəsait)



«Elm və Təhsil» nəşriyyatının direktoru:
professor Nadir MƏMMƏDLİ

Texniki redaktor: Dürdanə Mirtağızızı (Əhədova)

Yığılmağa verilmiş 25.11.2011.

Çapa imzalanmış 01.12.2011.

Şerti çap vərəqi 7. Sifariş № 66.

Kağız formatı 60x84 1/16. Tiraj 300.

Kitab «Elm və Təhsil» nəşriyyat-poliqrafiya
müəssisəsində səhifələnilib çap olunmuşdur.

E-mail: elm_ve_tehsil@box.az

Tel: 497-16-32; 050-311-41-89

Ünvan: Bakı, İçərişəhər, 3-cü Maqomayev döngəsi 8/4.