МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ АЗЕРБАЙДЖАНСКОЙ РЕСПУБЛИКИ
АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ НЕФТЯНАЯ АКАДЕМИЯ

В.А.ИБРАГИМОВ

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЧЕТКОЙ МАТЕМАТИКИ

БАКУ - 2010

Составитель:

Кандидат физико-математических наук, доцент
Валех Абульфаз оглы Ибрагимов

Редактор:

Доктор физико-математических наук, профессор
Яшар Шакир оглы Салимов

Рецензенты:

Заведующий кафедрой «Автоматизированные системы управления» АГНА, член-корр. НАНА, профессор
Рафик Азиз оглы Алиев

Профессор кафедры «Информатика и Вычислительная математика» АГПУ
Алиф Мамедгусейн оглы Мамедов

$©\frac{19471817160010}{1957(M)1800010}$-2010

Посвящаю памяти
дорогого учителя, профессора
Агаева Гашима Низамовича

ОТ АВТОРА

Во всех написанных до сих пор работах по нечетким множествам приведены отдельные понятия элементов нечеткой математики с инженерной точки зрения, применительно к отдельным конкретным разделам техники. Поэтому приводимые ими определения этих понятия расплывчаты и имеют отдельные недостатки.

Предлагаемая вниманию читателя монография по нечеткой математике отличается от всех предыдущих тем, что здесь определения всех приводимых понятий даются с чисто математической точки зрения. Поэтому с математической точки зрения они не содержат каких-либо недостатков и при переносе этих понятий в четкую (классическую) математику никаких противоречий не возникают.

С другой стороны, здесь впервые проведена попытка изложить материал в стиле учебного пособия, доступного широкому кругу читателей, желающих ознакомиться с элементами нечеткой математики. Кроме того, им можно пользоваться и как справочник по нечеткой математике, для инженеров и научных сотрудников, так как в нем приведены определения основных понятий как элементарно, так и высшей математики.

Пользуясь случаем, хочу выразить огромную благодарность чл.корр НАН Азербайджана, профессору Алиеву Р.А, д.ф.м.н., профессору Салимову Я.Ш., профессору Мамедову А.М. за оказанное внимание и ценные советы.

Предисловие

Неопределенность и расплывчатость представлений человеческих знаний привело к несущей необходимости создания теории, позволяющей формально описать нестрогие нечеткие понятия и обеспечивающей возможность познания процессов рассуждений, содержащих такие понятия. Крупным шагом в этом направлении явился подход, основанный на использовании понятия нечеткого множества Л.Заде, который позволяет дать строгое математическое описание в действительности расплывчатых утверждений.

Теория нечетких множеств появилась в результате обобщения и переосмысления достижений в многозначной логике, теории вероятностей и математической статистики, дискретной математики, теории матриц, дискретной математики, теории графов, теории грамматики и т.д. и начала развиваться после публикации в 1965 году основополагающей работы Л.Заде [31]. У ее истоков лежат идеи и достижения многозначной логики (трехзначной логики Лукасевича, к-значной логики Поста).

Дальнейшие шаги в этом направлении связаны с созданием строгих и гибких математических методов исследования нечетко определенных объектов. При этом можно выделить следующие основные классификационные признаки способов формализации нечеткости:

1) по виду представления нечеткой субъективной оценки величины (нечеткого множества);
2) по виду области значений функции принадлежности;
3) по виду области определения функции принадлежности;

4) по виду соответствия между областью определения и областью значений (однозначное, многозначное);
5) по признаку однородности или неоднородности области значений функции принадлежности.

В теории нечетких множеств предлагаются следующие способы формализации нечетких понятий.

Первый способ (основан на работах Л.Заде [32-34]) предполагает отказ от основного утверждения классической теории множеств о том, что некоторый элемент может либо принадлежать, либо не принадлежать множеству. При этом вводится характеристическая функция множества – функция принадлежности, которая принимает значения из интервала [0;1]. Этот способ приводит к контициальной логике.

Во втором (более общем) способе формирования нечеткости характеристическая функция множества принимает значения не из интервала [0;1], а в конечной или бесконечной дистрибутивной решетке. Это обобщение называется нечетким множеством в смысле Гогена.

Третий способ – Р - нечеткие множества. При этом обобщении каждый элемент универсального множества связан не с точкой интервала [0;1], а с подмножеством или частью этого интервала. Алгебра Р-нечетких множеств может быть сведена к алгебре классов.

Четвертый способ – гегерентные нечеткие множества. Здесь в общем случае элементам универсального множества ставится в соответствие значения в различных дистрибутивных решетках.

Приведенные способы формирования нечетких понятий позволяют приближенно описать поведение систем настолько сложных и плохо определенных, что они не подаются точному математическому анализу.

Важным понятием, относящимся к теории нечетких множеств является невероятностная энтропия, служащая интегральной характеристикой размытости нечеткого множества.

При этом следует отметить, что способы формализации нечеткости развиваются по двум основным подходам. Первый базируется на обобщении понятия принадлежности элемента множеству, приводящему к размыванию границ множества, а в предельном случае к появлению объекта с неопределенными границами – полумножества. Второй подход полагает описание нечеткости с помощью иерархии-семейства упорядоченных четких множеств. Наряду с этим прослеживается взаимосвязь этих подходов, что указывает на существование глубокой внутренней связи проблем математической обработки нечеткой информации и построения моделей сложных иерархических систем.

Следует отметить, что с появлением теории нечетких множеств возникла потребность замены основных понятий классической (четкой) математики (числа, переменной величины, функции и т.д.) и теории управления некоторыми аналогами в терминах теории нечетких множеств, или же основные понятия теории нечетких множеств привести к языку, четкой классической математике. В теорию нечетких множеств может внести ясность то направление, которое базируется на нечетких числах и методах классической математики и управления, для чего необходимо разработать эффективные алгоритмы выполнения арифметических операций.

Анализ литературных источников, посвященных элементам нечеткой математики, показал, что во всех до сих пор написанных в этой области монографиях присущи отдельные недостатки, среди которых наиболее важным являются: отсутствие четких определений, понятий нечетких чисел, нечеткой переменной, нечеткой функции, ее непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости.

В настоящей работе впервые проведена попытка устранению указанных недостатков, а также проведена попытка изложить материал в стиле учебного пособия, доступного широкому кругу читателей, желающих ознакомиться с элементами так называемой нечеткой математики и специалистов в области кибернетики, управления.

ГЛАВА I. НЕЧЕТКАЯ АРИФМЕТИКА

Нечеткая арифметика – это наука о нечетких числах. Поэтому сначала будут рассмотрены основные понятия нечетких чисел и арифметических операций над ними.

Отметим, что самостоятельной областью применения нечеткой арифметики являются нечеткое линейное программирование – анализ обычного линейного программирования. В [16] приводятся примеры решения задач линейного программирования для случая нечетких коэффициентов, а также примеры решения неравенств с нечеткими числами (LR-типа).

Хорошо известны два случая применения нечеткой арифметики как самостоятельного аппарата для решения практических задач.

В первом случае решалась задача составления квадратного расписания занятий в учебном заведении. Необходимость обращения к нечетким числам в данном случае была обусловлена отсутствием экспериментальных данных и непосредственным характером критериев оптимальности. Для решения задач были использованы некоторые экспертные оценки, характеризующие длительность лекционных курсов, лабораторных занятий, наличие экзаменов и .т.д. В результате было получено расписание на квартал [50].

Во втором случае решалась задача оптимизации транспортной сети города. Информация, характеризующая транспортируемость, задавалась сч помощью нечетких чисел и лингвистических переменных. Решение было с применение Фортран-программы для траспортной сети Тулузы. [60]

§ 1. Нечеткие числа и операции над ними

Математической основой для построения математической модели систем с использованием лингвистических переменных и обычных арифметических операций является алгебра нечетких чисел [14;47].

В классической математике принадлежность элементов $x \in X$ множеству А часто рассматривается как характеристическая функция μ_A из X в {0;1}, т.е.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \textit{если}\ x \in A \\ 0, \textit{если}\ x \notin A \end{cases} \qquad (1.1)$$

При этом множество {0;1} называется множеством оценок, из которого следует, элемент x либо принадлежит множеству А, либо не принадлежит. Однако на практике зачастую не представляется возможности однозначного определения принадлежности элементов одному и тому же множеству. Поэтому в этих случаях $\mu_A(x)$ не определяется значениями, а может изменяться на отрезке [0;1]. Это значит, что в этом случае $\mu_A(x)$ характеризует не только принадлежность того или иного элемента x некоторому множеству А, но и выражает степень его принадлежности этому множеству.

Определение 1.1. Функцию $\mu_A(x)$, сопоставляющую каждому элементу $x \in X$ число $\mu_A(x) \in [0;1]$ и характеризующую степень принадлежности элемента x множеству А будем называть функцией принадлежности элемента x множеству А.

Из определения 1.1. следует, что функция принадлежности есть ничто иное, как характеристическая функция, но принимающая не два значения, а бесчисленное множество значений из всего [0;1].

Определение 1.2. Значения функции принадлежности элемента *x* множеству А будем называть степенью четкости или четкостью элемента *x* на множестве А.

Аналогичным образом введем понятие четких и нечетких значений числа.

Определение 1.3. Значение $\tilde{a}$ будем называть нечетким значением числа *a*, если значение степени принятия его числом *a* принадлежит интервалу (0;1), т.е. $\mu_a(x) \in (0;1)$.

Определение 1.4. Четким значением числа *a* будем называть значение, степень принятия которого равна единице, т.е. $\mu_a = 1$.

Определение 1.5. Нечетким числом $\tilde{a}$ называется нечеткое подмножество числовой оси R, имеющей функцию принадлежности $\mu_a : R \to [0;1]$, где R-множество действительных чисел, $F(R) = \{\mu / \mu : R \to [0;1]\}$ - множество числовой оси.

Наряду с этим там же в [57] вводится понятие нечеткого множества.

Определение 1.6. Нечеткое множество

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) > 0\} \tag{1.2}$$

математически определяется как совокупность упорядоченных пар. Составленных из элементов *x* универсального множества *X* и соответствующих степеней принадлежности $\mu_A(x)$ или (поскольку функция принадлежности является исчерпывающей характеристикой нечеткого множества) непосредственно в виде функций $\mu_A : X \to [0;1]$.

На основании определения (1.6), если $\widetilde{A}$-нечеткое числовое множество, а элемент $\widetilde{x} \in \widetilde{A}$ - есть нечеткое число, определенное через (1.1)-как пара $(x, \mu_A(x))$, которая соответствует точке числовой оси R, то это понятие нечеткого числа противоречит определению нечеткого числа 1.5

С другой стороны из определений 1.5 и 1.6 следует, что нечеткое число есть подмножество множества (числовой оси) R и нечеткое множество есть подмножество числовой оси R с той же функцией принадлежности μ_A, переобозначенное в $\mu_a : R \rightarrow [0;1]$. В связи с этим заранее следует отметить, что будь это в смысле классической математики, либо в терминах так называемой нечеткой математики, строющейся на понятиях нечетких чисел и нечетких множеств, каждое число – четкое, либо нечеткое число L-типа, либо R-типа с единой конкретной степенью нечеткости принимает единственное значение. Если же рассматривается класс нечетких чисел (LR)-типа способна принять два значения (одно L-типа и другое R-типа).

При этом(как это всегда следует иметь в виду), если за исходное понятие взять понятие носителя числа, тип числа можно определить по виду его носителя. Действительно:

Определение 1.7. Подмножество S_a действительного множества (числовой оси) R будем называть носителем числа «*a*», если

$$S_a = \{x; \mu_a(x) > 0;\ x \in R\} \qquad (1.3)$$

При этом следует принять определение 1.8. Число «*a*» называется четким числом, если его носитель состоит из единственного элемента множества R, т.е.

$$S_a = \{ a; \mu_a = 1 \} \qquad (1.4)$$

Наряду с этим, учитывая, что все авторы монографий, включающих в себя элементы нечеткой математики (в основном понятие нечетких множеств), вводят понятие нечеткого числа, подобно определению 1.5.

И так как понятие нечеткого числа играет наиболее важную и основную роль в создании математической модели и его применении в задачах управления, то для более глубокого понимания смысла понятия нечетких чисел и их алгебры приведем понятие нечетких чисел и действий над ними, подобно [1,12], где понятие нечеткого числа вводится подобно определению 1.5, но не придерживаясь этого определения.

Определение 1.9 Число $\tilde{a}$ будет называть нечетким числом, если оно принимает нечеткое значение и будем называть четким числом, если оно принимает четкое значение. Поэтому, нечеткое число может быть представлено как

$$\tilde{a} = \{ x; \mu_{S_a}(x) > 0; \qquad x \in R \} \qquad (1.5)$$

где S_a-носитель нечеткого числа $\tilde{a}$.

Пример 1.1.

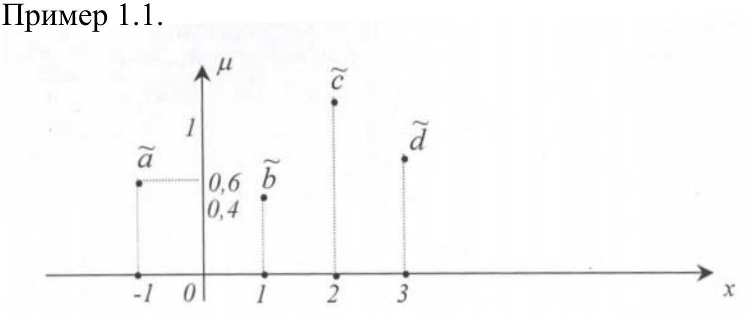


Рис. 1.1

На рисунке 1.1 числа $\tilde{a} = \{-1/0{,}6\}$, $\tilde{b} = \{1/0{,}4\}$ и $\tilde{d} = \{3/08\}$-есть нечеткие числа, так как они принимают нечеткие значения. Число $c = \{2/1\}$ - есть четкое число, так как оно принимает четкое значение. Нечеткие числа $\tilde{a}$ и $\tilde{d}$ - есть нечеткие числа с одинаковой степенью нечеткости, равной 0,6

Если учесть, что каждой точке действительной прямой можно сопоставить единственное четкое действительное число, то можно ввести следующее определение нечеткого числа.

Определение 1.10. Под нечетким числом $\tilde{a}$ на действительной прямой будем понимать одно из нечетких значений водящих в набор нечетких значений, характеризуемый функцией принадлежности $\mu_a : R \to [0;1]$ и представленный в виде (1.5).

Из данного определения нечеткого числа) и понятия выпуклого множества (учитывая существование выпуклого множества) следует, что нечеткие числа обладают свойством выпуклости.

Определение 1.11. Нечеткое число $\tilde{a}$ будем называть выпуклым, если множество его нечетких значений носитель образует выпуклое множество

Определение 1.12. Множество нечетких значений будем называть выпуклым множеством, если для любых значений *x, y* и *z* из этого множества, удовлетворяющих условию $x \le y \le z$ справедливо неравенство

$$\mu_a(y) \ge min\{\mu_a(x); \mu_a(z)\} \qquad (1.6)$$

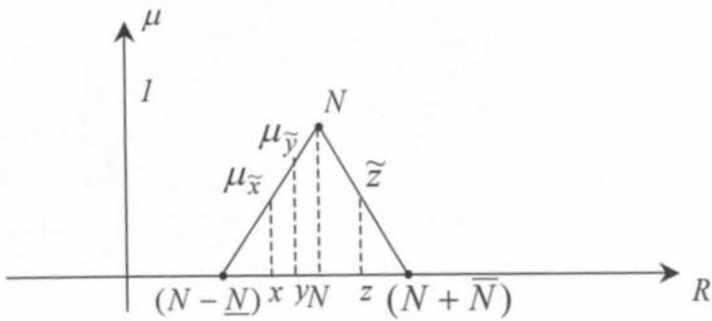


Рис. 1.2

На рис. 1.2. приведено схематическое изображение нечеткого числа $\tilde{N}$. Здесь интервалы ($N-\underline{N}$; N) и ($N; N+\overline{N}$) – называются соответственно левый и правый расширениями нечеткого числа $\overline{N}$; а N-его четкое значение. Из рисунка 1.2 и определения 1.9 следует, что нечеткое число $\tilde{N}$-выпукло, так как для его нечетких значений x<y<z имеем $\mu_y > min(\mu_x, \mu_z)$.

Определение 1.13 Множество нечетких значений нечеткого числа $\tilde{a}$, степени принадлежности которых числу $\tilde{a}$ больше, либо равны «α» называются нечеткими значениями α-уровня.

Определение 1.14 α-срезом нечеткого числа будем называть те нечеткие значения, степени принятия которых даны нечетким числом равны α.

Определение *1.15* Переходным значением нечеткого числа $\tilde{a}$ называется то значение, степень принятия которого равна 0,5, т.е. $\mu_{\tilde{a}}(x) = 0{,}5$.

Для проведения арифметических действий на нечеткими числами можно пользоваться принципом обобщения Л.Заде, т.е.
Принцип обобщения. Пусть на действительной оси R заданы нечеткие числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Операцию над нечеткими числами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ можно выполнить, используя соотношение:

$$\tilde{a} * \tilde{b} = \left\{ \bigcup_{S_{\tilde{a}*\tilde{b}}} min\left(\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)\right) / (x * y) \right\} \qquad (1.7)$$

Используя взамен гипотетической операции арифметические действия (+;-;x;:) можно получить четыре арифметических действий над числами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$.

$$\tilde{a} + \tilde{b} = \left\{ \bigcup_{S_{\tilde{a}-\tilde{b}}} min \, {}^{\mu_{\tilde{a}}(x) \mu_{\tilde{b}}(y)} \Big/ {}_{(x-y)} \right\} \qquad (1.8)$$

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \left\{ \bigcup_{S_{\tilde{a}-\tilde{b}}} min \, {}^{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)} \Big/ {}_{(x-y)} \right\} \qquad (1.9)$$

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = \left\{ \bigcup_{S_{\tilde{a}\tilde{b}}} min \, {}^{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)} \Big/ {}_{(x \times y)} \right\} \qquad (1.10)$$

$$\tilde{a} : \tilde{b} = \left\{ \bigcup_{S_{\tilde{a}:\tilde{b}}} min \, {}^{\mu_{\tilde{a}}(x), \mu_{\tilde{b}}(y)} \Big/ {}_{(x : y)} \right\} \qquad (1.11)$$

где $S_{\tilde{a}*\tilde{b}}$ - означает: $\{ x \in S_{\tilde{a}}; \;\; y \in S_{\tilde{b}} \}$.
Исходя из (1.5) можно получить соотношения:

$$\widetilde{a} * \widetilde{b} = \left\{ \bigcup_{\underline{a}}^{a} \mu_{\widetilde{a}}(x)/x + \bigcup_{a}^{\overline{a}} \mu_{\widetilde{a}}(x)/x \right\} * \left\{ \bigcup_{\underline{b}}^{b} \mu_{\widetilde{b}}(x)/x + \bigcup_{b}^{\overline{b}} \mu_{\widetilde{b}}(x)/x \right\} =$$

$$= \left\{ \bigcup_{\underline{a}}^{a*b} \mu_{\widetilde{a}*\widetilde{b}}(x)/x + \bigcup_{a*b}^{\overline{b}'} \mu_{\widetilde{a}*\widetilde{b}}(x)/x \right\}$$

где a' и b' получены из $\underline{a}$; $\overline{a}$; $\underline{b}$ и $\overline{b}$ в зависимости от конкретных операций и нормировки μ.

Вычислим

$$\widetilde{a} + \widetilde{b} = \left\{ \bigcup_{\underline{a}}^{\overline{c}} \mu_{\widetilde{c}}(x)/x + \bigcup_{\overline{c}}^{\overline{b}'} \mu_{\widetilde{c}}(x)/x \right\} = \widetilde{c} \qquad (1.12)$$

$$\overline{c} = a + b; \quad \underline{a}' = \underline{a} + b; \quad \overline{b}' = \overline{a} + \overline{b}$$

$\mu_{\widetilde{c}}$ определяется в виде: $\mu_{\widetilde{c}} = K_1 x + K_2$

Исходя из нормировки для $\underline{a} \le \widetilde{x} \le \overline{c}$ можно записать [ ]:

$$\widetilde{a} + \widetilde{b} = \bigcup_{\underline{a}}^{\overline{c}} \frac{x - a}{\overline{c} - \underline{a}} / x + \bigcup_{\overline{c}}^{\overline{b}'} \frac{\overline{b}' - x}{\overline{b}' - \overline{c}} / x = \widetilde{c}_1 \qquad (1.13)$$

Для остальных арифметических операций аналогичным образом можно получить:

$$\widetilde{a} - \widetilde{b} = \bigcup_{\underline{a}}^{\overline{c}} \frac{x - a}{\overline{c} - \underline{a}} / x - \bigcup_{\overline{c}}^{\overline{b}'} \frac{\overline{b}' - x}{\overline{b}' - \overline{c}} / x = \widetilde{c}_2 \qquad (1.14)$$

где $\underline{a} = a - \overline{b}$; $\quad \overline{b}' = \overline{b} - \overline{a}$; $\quad \overline{c} = \overline{a} - \underline{b}$

Применяя функцию принадлежности в виде:

$$\mu_c = K_1 \sqrt{\underline{x}} + K_2$$

получим:

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = \bigcup_{a''}^{c} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a''}}{\sqrt{\bar{c}} - \sqrt{a''}} / x - \bigcup_{\bar{c}}^{b''} \frac{\sqrt{b''} - \sqrt{x}}{\sqrt{b''} - \sqrt{\bar{c}}} / x = \tilde{c}_3 \qquad (1.15)$$

где $a'' = a \times a'$; $b'' = b \times b''$; $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$

Применяя функцию принадлежности $\mu_c = \frac{K_1}{x} + K_2$ получим:

$$\tilde{a} : \tilde{b} = \bigcup_{a''}^{\bar{c}} \frac{(x - a'')\bar{c}}{(\bar{c} - a'')} / x - \bigcup_{\bar{c}}^{b''} \frac{(b'' - x)\bar{c}}{(b'' - \bar{c})} / x = \tilde{c}_4 \qquad (1.16)$$

где $a'' = a' \times a$; $b'' = b' \times b$; $\bar{c} = \bar{a} : \bar{b}$

Пример 1.2. $\tilde{a} = \tilde{5}$; $\tilde{b} = \tilde{9}$

$$\tilde{5} = \bigcup_{4}^{5} (x - 4) / x + \bigcup_{5}^{6} (6 - x) / x$$

при $x^4 = 4$; $\tilde{5}\big|_{x=4} = 4 - 4 = 0$;

при $x = 4{,}5$ $\tilde{5}\big|_{x=4,5} = 4{,}5 - 4 = 0{,}5$;

при $x = 5$ $\tilde{5}\big|_{x=5} = 5 - 4 = 1$;

при $x = 5{,}5$ $\tilde{5}\big|_{x=5,5} = 6 - 5{,}5 = 0{,}5$;

при $x = 6$ $\tilde{5}\big|_{x=6} = 6 - 6 = 0$. Следовательно,

$\tilde{5} = \{0/4; 0{,}5/4{,}5; 1/5; 0{,}5/4{,}5; 0/6\}$

Для $\tilde{9}$ при x=7;8;9;10;11 аналогичным образом можно получить:

$$\tilde{9} = \{0.7; 0{,}5/8; 1/9; 0{,}5/10; 0/11\}$$

Верхняя и нижняя границы и вершины этих чисел следующие: для $\tilde{5}$; $\underline{a} = 4$; $\bar{a} = 6$; $a = 5$;

Для $\tilde{9}\ \tilde{5}$; $\underline{b} = 7; \overline{b} = 11; \ b = 9;$

Приведем все четыре арифметических действия над этими числами.

Сложение. Согласно (1.13) вычислим границы и вершину суммы ($\tilde{5} + \tilde{9}$):

$$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} = 4 + 7 = 11; \ \overline{b}' = \overline{a} + \overline{b} = 6 + 11 = 17;$$

$$\overline{c} = a + b = 5 + 9 = 14$$

Таким образом: $\tilde{5} \times \tilde{9} = \bigcup_{11}^{14} \frac{x - 11}{3} / x + \bigcup_{14}^{17} \frac{17 - x}{3} / x = \tilde{14}$

Вычисляя $\tilde{14}$ при различных X имеем:

$$\tilde{14} = \{0/11; 0{,}5/12{,}5; 1/14; 0{,}5/15{,}5; 0/17\}$$

Вычитание. Границы и вершина разности $\tilde{9} - \tilde{5}$ в соответствии с (1.9) определяется как:

$$\underline{a} = 7 - 4 = 3; \ \overline{a} = 11 - 6 = 5; \ \ \overline{c} = b - a = 9 - 5 = 4$$

$$\tilde{9} - \tilde{5} = \bigcup_{3}^{4} \frac{x - 3}{4 - 3} / x + \bigcup_{4}^{5} \frac{5 - x}{5 - 4} / x = \tilde{4}$$

Значения функции принадлежности при значения x=3,5; x=4,5 будут равны 0,5.

$\tilde{4} = \{0/3; 0{,}5/3{,}5; 1/4; 0{,}5/4{,}5; 0/5\}$

Схематически это означает:

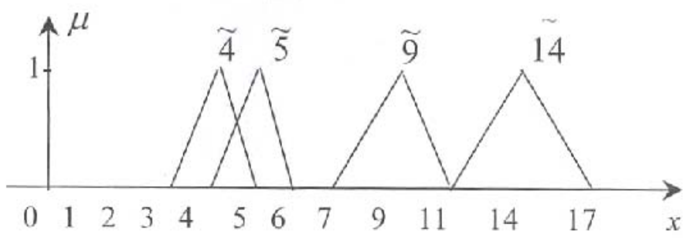


Рис. 1.3

Нечеткие числа $\tilde{4}; \tilde{5}; \tilde{9}; \tilde{14}$

Умножение. С помощью соотношения (1.12)

$$\tilde{5} \times \tilde{9} = \bigcup_{28}^{4,5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{28}}{\sqrt{45} - \sqrt{28}} / x + \bigcup_{4,5}^{6,6} \frac{\sqrt{66} - \sqrt{x}}{\sqrt{66} - \sqrt{45}} / x =$$
$$= \bigcup_{28}^{4,5} \frac{\sqrt{x} - 5,23}{1,41} / x + \bigcup_{4,5}^{6,6} \frac{8,12 - \sqrt{x}}{1,41} / x = \tilde{4,5}$$

Значения функции принадлежности при значении x=3б5; x=40; x=55; x=60 значения функции принадлежности соответственно будет: 0,45; 0,73; 0,5; 0,27. Таким образом

$$\tilde{5} \times \tilde{9} = \{0/28; 0,45/35; 0,73/40; 1/45; 0,52/55; 0,27/60\}$$

Деление. Согласно (1.16) границы и вершина результата деления $\tilde{9}$ на $\tilde{5}$ будет:

$\underline{c} = 7:6 = 1,16; \quad \bar{c} = 11:4 = 2,75; \quad c = b:a = 9:5 = 1,8$

Функция принадлежности определяется как:

$$\tilde{5} : \tilde{9} = \bigcup_{1,16}^{18} \frac{(x - 1,16)1,8}{(1,8 - 1,16)x} / x + \bigcup_{1,8}^{2,75} \frac{(2,75 - x)1,8}{(2,75 - 1,8)x} / x = \tilde{1,8}$$

Вычисляя значения функции принадлежности при различных значениях x получим:

$$\tilde{5} : \tilde{9} = \{0/1,16; 0,3/1,3; 0,77/1,6; 1/1,8; 0,71/2; 0,19/2,5\}$$

Рассмотрим другой метод выполнения арифметических операций над нечеткими числами, основанный на использовании уровневых множеств, отличающихся значительным упрощением вычислений по сравнению с операциями на основе принципа обобщения. При этом дополнительно следует использовать следующее понятие.

Определение 1.16. Бинарная операция (*) на R называется возрастающей, если для любых $(x_1 * x_1) > (y_1 * y_2)$ из $x_1 > x_1$; $y_1 < y_2$ следует $(x_1 * x_1) < (y_1 * y_2)$.

Если заданы нечеткие числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ с функциями принадлежности $\mu_{\tilde{a}}$ и $\mu_{\tilde{b}}$, то результат обобщенной операции (*) над ними есть нечеткое число $\tilde{c} = (\tilde{a} * \tilde{b})$, заданное функцией принадлежности $\mu_{\tilde{a}}$ и $\mu_{\tilde{b}}$, то результат обобщенной операции (*) над ними есть нечеткое число $\tilde{c} = (\tilde{a} * \tilde{b})$, заданное функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{c}}(x) = \underset{z=x*y}{sur}\ min\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\ \mu_{\tilde{b}}(x)\big) \qquad (1.17)$$

Более коротко все четыре арифметические операции можно представить как:

Сложение:

$$\mu_{\tilde{a}+\tilde{b}}(x) = \underset{z=x+y}{sur}\ min\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\ \mu_{\tilde{b}}(y)\big) = \underset{x}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\ \mu_{\tilde{b}}(z-x)\big) \qquad (1.18)$$

Вычитание:

$$\mu_{\tilde{a}-\tilde{b}}(x) = \underset{z=x-y}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\mu_{\tilde{b}}(y)\big) = \underset{x}{sum} in\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\mu_{\tilde{b}}(z-x)\big) \qquad (1.19)$$

Умножение:

$$\mu_{\tilde{a}\times\tilde{b}}(z) = \underset{z=xy}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\ \mu_{\tilde{b}}(y)\big) = \underset{x}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\ \mu_{\tilde{b}}(z:x)\big) \qquad (1.20)$$

Деление:

$$\mu_{\tilde{a}:\tilde{b}}(z) = \underset{z=x:y}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\ \mu_{\tilde{b}}(y)\big) = \underset{x}{sur} min\big(\mu_{\tilde{a}}(x);\ \mu_{\tilde{b}}(z:x)\big) \qquad (1.21)$$

Если нечеткие числа можно представить в виде:

$$\tilde{a}=\{\omega_1/x_{11};\omega_2/x_2;\omega_1/x_{1,2}\};\ \tilde{b}=\{\omega_1/y_{11};\omega_2/y_{21};\omega_1/y_{1,2}\}, 22)$$

то результатом обобщенной операции (*) над ними будет нечеткое число

$$\tilde{c}=\tilde{a}*\tilde{b}=\{\omega_1/(x_{11}*y_{11});\omega_2/(x_{21}*y_{21});\omega_1/(x_{1,2}*y_{1,2}\}; \quad (1.23)$$

Это справедливо, когда операция (* является возрастающей, либо убывающей). Операции вычитания и деления не являются такими, однако их можно определить следующим образом

$$\tilde{a}-\tilde{b}=\tilde{a}+(-\tilde{b});\ \tilde{a}:\tilde{b}=\tilde{a}\times(b^{-1}) \quad (1.24)$$

Пример 1.3. Зададим два нечетких числа

$$\tilde{4}=\{0/3;0,5/3,5;1/4;0,5/4,5;0/5\}$$
$$\tilde{5}=\{0/4;0,5/4,5;1/5;0,5/5,5;0/6\}$$

Проведем все четыре арифметические действия над этими нечеткими числами:

Сложение:

$$\tilde{5}+\tilde{4}=\{0/(4+3);0,5/(4,5+3,5);1/(5+4);$$
$$0,5/(5,5+4,5);0/(6+5)\}=\{0/7;0,5/8;1/9;0,5/10;0/11\}$$

Умножение:

$$\tilde{5}\times\tilde{4}=\{0/12;0,5/15,75;1/20;0,5/24,75;0/30\}$$

Вычитание: сначала определим $-\tilde{4}$. Имеем:

$-\tilde{4}=\{0/-5;0,5/-4,5;1/-4;0,5/-3,5;0/-3\}$, тогда

$$\tilde{5}-\tilde{4}=\tilde{5}+(-\tilde{4})=\{0/-1;0,5/0;1/1;0,5/2;0/3\}$$

Деление: Сначала определим $\tilde{4}^{-1}$.Имеем:

$$\tilde{4}^{-1}=\{0/1:3;0,5/1:3,5;1/1:4;0,5/1:4,5;0/1:5\}=$$
$$=\{0/0,33;0,5/0,29;1/0,25;0,5/0,22;0/0,2\},$$

отсюда

$$\tilde{5}:\tilde{4}=\tilde{5}\times(\tilde{4}^{-1})=\{0/1,32;0,5/1,29;1/1,25;0,5/1,21;0/1,2\}$$

Понятие дополнительного вычитания

При решении нечетких уравнений приходится вычислять противоположные и обратные нечеткие числа. Рассмотренные выше арифметические операции, основанные на принципе обобщения, не позволяют отыскать противоположное число A' (такое,что ($A + A' = 0$)) и обратное число A'' $(A \times A'' = 1)$.

Кроме того, отметим, что для нечетких множеств имеет место неравенства

$$(A - B) + B \neq A; \text{ и } (A : B) \times B \neq A. \qquad (1.25)$$

Поэтому, для точного решения уравнения

$$Ax+B=D \qquad (1.26)$$

Где A,B,D – нечеткие числа, x – неизвестное, используются операции дополнительного вычитания (--) и дополнительного деления (/./)

$$AX=D\text{-}B \qquad (1.27)$$

Носителями множеств B и D являются, соответственно интервалы

$S_B = \{b_1, b_2\}$ и $S_D = \{d_1, d_2\}$. Носителем множества X, определяемого дополнительным вычитание, будет

$$S_{AX} = \{d_1 - b_1; d_2 - b_2\}, \qquad (1.28)$$

а функцией принадлежности

$$\mu_{AX}(X) = \inf_z \begin{cases} 1, если \ \mu_B(z - x) < \mu_D(z) \\ \mu_D, если \ \mu_B(z - x) \geq \mu_D(z) \end{cases}$$

Рассматриваемая операция вычитания определена тогда, когда длина интервала носителя уменьшаемого больше, чем у вычитаемого.

Дополнительное деление

Решением уравнения AX=D будет нечеткое число

X=D/A

Если носителями нечетких чисел A и D являются

$S_A = \{a_1; a_2\}$ и $S_D = \{d_1; d_2\}$, то носитель нечетких числа X определяется, как $d_2; a_2$

$$S_x = [d_1, d_2] // [a_1; a_2] = \begin{cases} d_1 : a_1, если\, S_A > 0; S_D > 0 \\ d_1 : a_2, d_2 : a_1, если\, S_A > 0; S_D < 0 \\ d_2 : a_1, d_1 : a_2, если\, S_A < 0; S_D > 0 \\ d_2 : a_2; d_1 : a_2, если\, S_A < 0; S_D < 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

или через функции принадлежности

$$\mu_x(x) = \begin{cases} 1, если\, \mu_A(t/x) < \mu_D(t) \\ \mu_D(t), если\, \mu_A(t/x) \geq \mu_D(t) \end{cases} \quad (1.30)$$

Эта операция определена не для любых нечетких чисел A и D, а для таких, у которых интервалы – носители удовлетворяют определенным условиям.

Пример 4. Решить уравнение X+B=D

$$B = \tilde{8} = \{0/6; 0{,}5/7; 1/8; 0{,}5/9; 0/10\}$$

при

$$D\bar{14} = \{0/10; 0{,}5/12; 1/14; 0{,}5/16; 0/18\}$$

Интервалы – носители для B и D будут $S_B = [6{,}10] : S_D = [10{,}18]$. Согласно (28) $S_x = [4 : 8]$

Согласно (1.27) можно определить функцию принадлежности μ_x

$X = \{0/4; 0{,}5/5; 1/6; 0{,}5/7; 0/8\}$

Пример 5 Решить уравнение AX=D при

$A = \tilde{8} = \{0/6; 0{,}5/14; 1/24; 0{,}5/36; 0/50\}$

$S_A = \{6:10\}; S_D = [6;50]$

согласно (28)

$S_x = [6:6; 50:10] = [1:5]$

Функцию принадлежности можно определить на основании (1.29)

Решением уравнения является нечеткое число:

$x = \{0/1; 0{,}5/2; 1/3; 0{,}5/4; 0/5\}$

Замечание 2. Следует отметить, что при одной и той же степени нечеткости (при одном и то же значении функции принадлежности μ_α) нечеткое число $\tilde{a}$ обязано принимать лишь одно нечеткое значение. Но несмотря на это из рассматриваемого выше понятия нечеткого числа следует, что одно и то же нечеткое число при одной и той же степени нечеткости способно принять два значения. И кроме того, одно и то же значение с различными степенями нечеткости принимаются различными нечеткими числами.

Пример 6

$$\tilde{2} = \{0/1; 0{,}7/1{,}7; 1/2; 0{,}7/2{,}3; 0/3\};$$

$$\tilde{3} = \{0/2; 0{,}3/2{,}3; 1/3; 0{,}3/3{,}7; 0/4\}$$

Из данного примера в конкретности видно, что нечеткое значение 2,3 можно одновременно отнести к обеим указанным нечетким числам с различными степенями четкости. Причем, если эти нечеткие числа имеют одинаковые растяжения, равные половине разности четких значений этих нечетких чисел, то сумма значений функций принадлежности одного и того же значения принимаемое этими нечеткими числами равна единице.

Кроме того, следует отметить, что чем больше растяжение нечеткого числа, тем большему числу нечетких чисел будет отнесено одно и то же значение действительной прямой.

Во избежание выше указанного противоречия, которое может привести к неординарности получения результатов при решении различных задач, целесообразно применить нечеткую арифметику на нечетких числах L и R – типа.

§ 2 Нечеткие числа L-R типа и действия над ними

Определение 1.17 Совокупность нечетких значений нечеткого числа $\widetilde{a}$ меньших ее четкого значения будем называть левым расширением этого нечеткого числа (носителя нечеткого числа).

Определение 1.18 Совокупность нечетких значений нечеткого числа $\widetilde{a}$ больших ее четкого значения будем называть правым расширением нечеткого числа.

Если $S_{\widetilde{a}}$ -носитель нечеткого числа $\widetilde{a}$, то

$S_{a_L} = \{ x < a; \mu_{\widetilde{a}} > 0 \}$ и $S_{a_R} = \{ x > a, \mu_{\widetilde{a}}(x) > 0, x \in R \}$

являются соответственно левым и правым носителями растяжения нечеткого числа $\widetilde{a}$

Определение 1.19 Число $\widetilde{a}_L$ будем называть нечетким числом L-типа, если оно может принимать нечеткое значение из левого расширения нечеткого числа $\widetilde{a}$

Определение 1.20 Число $\widetilde{a}_R$ - будем называть нечетким числом R-типа, если оно может принимать нечеткие значения из правого расширения нечеткого числа $\widetilde{a}$.

Эти нечеткие числа могут быть представлены в виде

$$\begin{rcases} \tilde{a}_L = \{\mu_{\tilde{a}_L}(x)/x \in S_{a_L}\}; \\ \tilde{a}_R = \{\mu_{\tilde{a}_R}(x)/x; x \in S_{\tilde{a}_R}\} \end{rcases} \qquad (1.31)$$

где

$$\begin{rcases} \mu_{\tilde{a}_L}(x) = \dfrac{a-x}{a_L} \quad для \quad a - a_L \le x \le a; \quad a_L > 0 \\ \mu_{\tilde{a}_L}(x) = \dfrac{x-a}{a_R} \quad для \quad a \le x \le a + a_R; \quad a_R > 0 \end{rcases} \qquad (1.32)$$

a -четкое значение; a_L -левое растяжение;

a_R -правое растяжение нечеткого числа $\tilde{a}$.

Определение 1.21 Значение a называется левой (правой) границей нечеткого числа $\tilde{a}$, если для любого достаточно малого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} &\mu_a = 0; \mu(a-\delta) = 0; \mu(a+\delta) \ne 0; \\ &\mu_a = 0; \mu(a+\delta) = 0; \mu(a-\delta) \ne 0 \end{aligned} \qquad (1.33)$$

Исходя из данного определения нечеткое число $\tilde{a}$ можно представить в виде

$$\tilde{a} = \left\{ \bigcup_{\bar{a}}^{a} (x - \underline{a}) + \bigcup_{a}^{\bar{a}} (\bar{a} - x); \quad x \right\} \qquad (1.34)$$

где $\underline{a}$ и $\bar{a}$ -соответственно левая и правая (либо нижняя и верхняя) границы нечеткого числа $\tilde{a}$. При этом

Определение 1.22. Нечеткие числа $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ называются нечеткими числами одинакового порядка, если они имеют одинаковые расширения и называются нечеткими числами различного расширения; т.е.

если $\{a - \underline{a} = b - \underline{b}; \bar{a} - a = \bar{b} - b\}$, то $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ - есть нечеткие числа одинакового порядка и если

$\{a-\underline{a}\neq b-\underline{b};\overline{a}-a\neq\overline{b}-b\}$, то нечеткие числа $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ - есть нечеткие числа различного порядка.

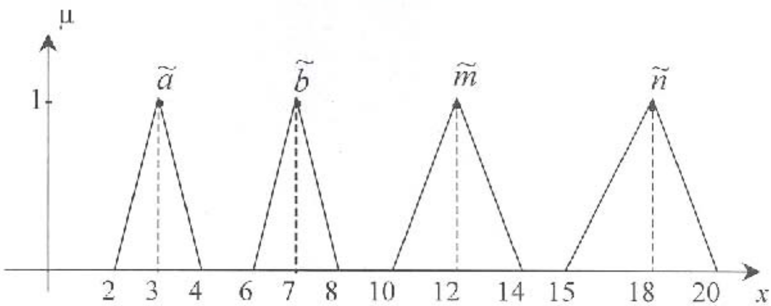


Рис. 1.4

На рисунке 1.4 нечеткие числа $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ -одинакового порядка, а нечеткие числа $\widetilde{m}$ и $\widetilde{n}$ -различных порядков.

Определение 1.23 Нечеткое число называется нормальным, если его левое расширение равно правому, в противном случае оно называется субнормальным нечетким числом.

На рисунке 1.3. $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$ и $\widetilde{m}$ - нормальные нечеткие числа, а $\widetilde{n}$ субнормальное нечеткое число.

Следует отметить, что на практике левый и правый растяжения нечеткого числа одинаковые, т.е. на практике рассматриваются лишь нормальные нечеткие числа.

Кроме того, 1) для нормального нечеткого числа его наиболее четкое значение совпадает с его четким значением;

2) если интервалы растяжения нечеткого числа равны нулю, то оно является четким числом;

3) по мере увеличения интервалов расширения нечеткое число становится более нечетким.

Справедливы следующие свойства функции принадлежности нечеткого числа:

1) $\mu_{\tilde{a}_L}(x)$-монотонно возрастающая, а $\mu_{\tilde{a}_R}(x)$-монотонно убывающая функции, причем

$$\mu_{\tilde{a}_L}(a) = \mu_{\tilde{a}_R}(a) = 1 \tag{1.35}$$

2) Функции μ_L и μ_R-четные функции, т.е.

$\mu_L(-x) = \mu_L(x)$ и $\mu_R(-x) = \mu_R(x)$

3) Если нечеткое число – нормальное нечеткое число, то линии, описываемые функциями $\mu_L(x)$ и $\mu_R(x)$ симметричны относительно прямой $x = a$, где a-четкое значение нечеткого числа $\tilde{a}$.

Примерами функций $\mu_L(x)$ и $\mu_R(x)$ могут служить

1) $\mu_R(x) = \dfrac{1}{1+(x-a)^p}; \mu_L(x) = \dfrac{1}{1+(a-x)^p}$,где p >0

2) $\mu_R(x) = e^{-(x-a)^p}$; $\mu_L(x) = e^{-(a-x)^p}$, где p>0

Наряду с выше изложенным нечеткое число L-R – типа с учетом понятия уровня четкости, можно ввести следующим образом:

Определение 1.24. Нечеткое число $\tilde{a}$ называется нечетким числом L-R-типа, если

$$\mu_{\tilde{a}}(\alpha) = \begin{cases} \mu_L(a) = 1 - \dfrac{a - a_L(\alpha)}{a_L} \\ \mu_R(a) = 1 - \dfrac{a_R(\alpha) - a}{a_R} \end{cases} \tag{1.36}$$

где a-четкое значение числа $\tilde{a}$, т.е. $a = a_L(1) = a_R(1)$;

a_L и a_R-соответственно левое и правое растяжения нечеткого числа $\tilde{a}; a_L(\alpha)$ и $a_R(\alpha)$-соответственно левое и правое значения нечеткого числа $\tilde{a}$ четкости α.

Из (1.36) следует, что если

$$\widetilde{a}(\alpha)=\{a_L(\alpha);a_R(\alpha)\}, \text{ то}$$
$$a_L(\alpha)=a-(1-\alpha)a_L;\; a_R(\alpha)=a+(1-\alpha)a_R$$

Следует учесть, что если растяжение нечеткого числа равна нулю, то оно является четким числом. Кроме того, по мере увеличения левого и правого растяжений $\widetilde{a}$ оно становится более нечетким числом. Символически нечеткое число L-R – типа обозначим $\widetilde{a}=\{a,a_L,a_R\}$.

Рассмотрим алгебраические действия над четкими числами L-R-типа.

Сложение. Пусть $\widetilde{a}=\{a,a_L,a_R\}$, $\widetilde{b}=\{b;b_L;b_R\}$, тогда

$$\widetilde{a}+\widetilde{b}=\{a+b;a_L+b_L;a_R+b_R\} \qquad (1.37)$$

Формула отрицания нечеткого числа имеет вид:

$$-\widetilde{a}=-\{a.a_L,a_R\}=\{-a;a_R;a_L\}$$

Вычитание:

$$\widetilde{a}-\widetilde{b}=\bar{a}+(-\widetilde{b})=\{a-b;a_L+b_R;a_R+b_L\} \qquad (1.38)$$

Если $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ есть нечеткие числа α-уровня (нечеткости α), то

$$\widetilde{a}+\widetilde{b}=\{a+b-(1-\alpha)(a_L+b_L); \; a+b+(1-\alpha)(a_R+b_R)\} \qquad (1.39)$$
$$\widetilde{a}-\widetilde{b}=\{a-b-(1-\alpha)(a_L+b_R); \; a-b+(1-\alpha)(a_R+b_L)\}$$

Умножение. Пусть $\widetilde{a}=\{a;a_L;a_R\}, \widetilde{b}=\{b;b_L;b_R\}$.

1) если $a>0;b>0$,то

$$\tilde{a}\cdot\tilde{b} = \{a, a_L, a_R\}\cdot\{b; b_L; b_R] =$$
$$\{(a-a_L)(b-b_L);(a+a_R)(b+b_R)\} = \qquad (1.40)$$
$$= \{ab; ab_L + ba_L - a_L b; ab_R + ba_R + a_R b_R\}$$

2) аналогично для $a > 0; b < 0$

$$\tilde{a}\cdot\tilde{b} = \{ab; ab_R + b_L a_L - a_L b; ab_L + ba_R + a_R b_L\}$$

3) для $a < 0; b < 0$

$$\tilde{a}\cdot\tilde{b} = \{ab; -ab_R - ba_R + a_R b_R; ab_L - ba_L + a_L b_L\}$$

Если $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ -нечеткие числа (нечетности α) α-уровня, то

1) для $a > 0; b > 0$

$$\tilde{a}\tilde{b} = \{ab; (1-\alpha)(ab_L + ba_L) - (1-\alpha)a_L b_L;$$
$$(1-\alpha)(ab_R + ba_R) + (1-\alpha)a_R b_L)\}$$

2) для $a > 0; b < 0$

$$\tilde{a}\tilde{b} = \{ab; (1-\alpha)(ab_R + ba_L) - (1-\alpha)a_L b_L;$$
$$(1-\alpha)(ab_L + ba_R) + (1-\alpha)a_R b_L)\} \qquad (1.41)$$

3) для $a < 0; b < 0$

$$\tilde{a}\tilde{b} = \{ab; (1-\alpha)(ab_R + ba_R - (1-\alpha)a_R b_R;$$
$$(1-\alpha)(ab_L + ba_L - (1-\alpha)a_L b_L)\}$$

Деление: Пусть $\tilde{a} = \{a; a_L; a_R\}; \tilde{b} = \{b; b_L; b_R\}$, тогда,

1) если $a > 0, b > 0$,то

$$\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} = \frac{\{a; a_L; a_R\}}{\{b; b_L; b_R\}} = \frac{\{a-a_L; a+a_R\}}{\{b-b_L; b+b_R\}} = \left\{\frac{a-a_L}{b+b_R}; \frac{a+a_R}{b-b_L}\right\}$$

или же

$$\frac{\tilde a}{\tilde b}=\left\{\frac{a}{b};\frac{ab_R+ba_L}{b(b+b_R)};\frac{a_Rb-ab_L}{b(b-b_L)}\right\}$$

2) если $a>0,b<0$,то

$$\frac{\tilde a}{\tilde b}=\frac{\{a-a_L;a+a_R\}}{\{b-b_L;b+b_R\}}=\left\{\frac{a+a_R}{b+b_R};\frac{a-a_L}{b-b_L}\right\} \qquad (1.42)$$

или же

$$\frac{\tilde a}{\tilde b}=\frac{\{a;a_L;a_R\}}{\{b;b_L;b_R\}}=\left\{\frac{a}{b};\frac{ab_R-ba_R}{b(b+b_R)};\frac{ab_L+ba_L}{b(b-b_L)}\right\}$$

3) если $a<0;b>0$, то

$$\frac{\tilde a}{\tilde b}=\frac{\{a-a_L;a+a_R\}}{\{b-b_L;b+b_R\}}=\left\{\frac{a-a_L}{b-b_L};\frac{a+a_R}{b-b_R}\right\}$$ или же

$$\frac{\tilde a}{\tilde b}=\frac{\{a;a_L;a_R\}}{\{b;b_L;b_R\}}=\left\{\frac{a}{b}\frac{a_Lb-ab_L}{b(b-b_L)};\frac{ba_R+ab_R}{b(b+b_R)}\right\}$$

4) если $a<0;b<0$, то

$$\frac{\tilde a}{\tilde b}=\frac{\{a;a_L;a_R\}}{\{b;b_L;b_R\}}=\frac{\{a-a_L;a+a_R\}}{\{b-b_L;b+b_R\}}$$ или же

$$\left\{\frac{a+a_R}{b-b_L};\frac{a-a_L}{b+b_R}\right\}$$

$$\frac{\tilde a}{\tilde b}=\left\{\frac{a}{b};-\frac{ab_L+a_Rb}{b(b-b_L)};\frac{a_Lb+ab_R}{b(b+b_R)}\right\}$$

Если $\tilde a$ и $\tilde b$ - нечеткие числа (нечетности α - α -уровня), т.е. Если $\tilde a=\tilde a(\alpha);\tilde b=\tilde b(\alpha)$-нечеткие числа со степенью нечеткости α (α -уровня), то в (1.42), вместо $a_L;a_R;b_L$ и b_R всюду берутся соответственно $a_L(\alpha);a_R(\alpha);a_R(\alpha)$ и $b_R(\alpha)$.

Пример 1.7 $\tilde a=\{5;0,4;0,6\};\ \ \tilde b=\{3;0,5;0,7\}$

1) $\widetilde{a}+\widetilde{b}=\{5;0,4;0,6\}+\{3;0,5;0,7\}=\{8;0,9;1,3\}$

2) $\widetilde{a}-\widetilde{b}=\{5;0,4;0,6\}-\{3;0,5;0,7\}=\{2;1,1;1,1\}$

3)
$$\begin{aligned}\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}&=\{5;0,4;0,6\}\cdot\{3;0,5;0,7\}=\\&=\{15;5\cdot 0,5+3\cdot 0,4-0,4\cdot 0,5;5\cdot 0,7+3\cdot 0,6+0,7\cdot 0,6\}=\\&=\{15;3,5;5,72\}\end{aligned}$$

4)
$$\frac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}}=\frac{\{5;0,4;0,6\}}{\{3;0,5;0,7\}}=\left\{\frac{5}{3};\frac{5\cdot 0,7-3\cdot 0,4}{3(3+0,7)};\frac{5\cdot 0,5+3\cdot 0,6}{3(3-0,5)}\right\}=$$
$$=\left\{\frac{5}{3};0,207;0,575\right\}$$

или же

$$\begin{aligned}\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}&=\{5;0,4;0,6\}\cdot\{3;0,5;0,7\}=\{4,6;5,6\}\cdot\{2,5;3,7\}=\\&=\{4,6\cdot 2,5\cdot 5,6\cdot 3,7\}=\{11,5;20,72\}=\{15;3,5;5,72\}\end{aligned}$$

$$\frac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}}=\frac{\{4,6;56\}}{\{2,5;3,7\}}=\{1,243;2,24\}=\left\{\frac{5}{3};0,207;0,575\right\}$$

Замечание 1. Так как нечеткие числа могут быть заданы разными способами, а при проведении арифметических действий над ними следует учесть принцип обобщения Заде, то при проведении арифметических действий желательно предварительно привести их (с помощью 35) к одинаковым степеням четкости (уровня четкости). Если же все нечеткие числа заданы с помощью среднего значения (четкого значения) и левого и правого расширений, то арифметические действия следует произвести без приведения к одному уровню нечеткости.

Замечание 2. При применении нечетких чисел в решении практических задач пользуются нечеткими числами L-типа (определение (1.19)), либо нечеткими числами R-

типа (определение (1.23)), поэтому (как частный случай нечетких чисел LR - типа) рассмотрим арифметические действия отдельно над нечеткими числами L-типа и R-типа.

I. Пусть $\widetilde{a} = \{a; a_L\}$ и $\widetilde{b} = \{b; b_L\}$, тогда

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \widetilde{a} + \widetilde{b} = \{a; a_L\} + \{b; b_L\} = \{a + b; a_L + b_L\} \\ 2)\ \widetilde{a} - \widetilde{b} = \{a - b; a_L + b_L\} \\ 3)\ \widetilde{a} \cdot \widetilde{b} = \{a; a_L\} \cdot \{b; b_L\} = \{a \cdot b; -a_L b - ab_L + a_L b_L\} \\ \quad \text{для } a > 0;\ b > 0 \end{array}\right\} \quad (1.43)$$

$$\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} = \{a - a_L\} \cdot \{b + b_L\} = \{ab; ab_L - a_L b - a_L b_L\}$$

(для $a > 0; b < 0$)

$$\widetilde{a} \cdot \widetilde{b} = \{a + a_L\}\{b - b_L\} = \{ab; a_L b - ab_L - a_L b_L\}$$

(для $a < 0; b > 0$)

$$\widetilde{a}\widetilde{b} = \{a + a_L; b + b_L\} = \{ab; ab_L + ab_L + a_L b_L\}$$

(для $a < 0; b < 0$)

$$4)\ \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}} = \frac{\{a; a_L\}}{b; b_L} = \frac{\{a - a_L\}}{b - b_L} = \left\{\frac{a}{b}; \frac{a_L - ab_L}{b(b - b_L)}\right\}$$

(для $a > 0; b > 0$)

$$\frac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}} = \frac{\{a + a_L\}}{\{b - b_L\}} = \left\{\frac{a}{b}; \frac{ab_L + a_L b}{b(b - b_L)}\right\} \text{ (для } a < 0; b > 0\text{)}$$

$$\frac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}} = \frac{\{a - a_L\}}{\{b + b_L\}} = \left\{\frac{a}{b}; \frac{ab_L + a_L b}{b(b + b_L)}\right\} \text{ (для } a > 0; b < 0\text{)}$$

$$\frac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}} = \frac{\{a + a_L\}}{\{b + b_L\}} = \left\{\frac{a}{b}; \frac{ab_L - a_L b}{b(b + b_L)}\right\} \text{ (для } a < 0; b < 0\text{)}$$

II. Пусть $\widetilde{a} = \{a; a_R\}$ и $\widetilde{b} = \{b; b_R]$, тогда

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \widetilde{a} + \widetilde{b} = \{a; a_R\} + \{b; b_R\} = \{a + b; a_R + b_R\} \end{array}\right\}$$

2) $\widetilde{a}-\widetilde{b}=\{a;a_R\}-\{b;b_R\}=\{a-b;a_R-b_R\}$

3) $\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=\{a+a_R\}\cdot\{b+b_R\}=\{a\cdot b;ab_R+a_Rb+a_Rb_R\}$

(для $a>0;b>0$)

$\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=\{a-a_R\}+\{b+b_R\}=\{a\cdot b;ab_R-a_Rb-a_Rb_R\}$

(для $a<0;b>0$)

$\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=\{a+a_R\}\{b-b_R\}=\{a\cdot b;a_Rb-ab_R-a_Rb_R\}$

(для $a>0;b<0$)

$\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}=\{a-a_R\}\{b-b_R\}=\{a\cdot b;-ab_R-a_Rb+a_Rb_R\}$

(для $a<0;b<0$)

4) $\dfrac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}}=\dfrac{\{a+a_R\}}{\{b+b_R\}}=\left\{\dfrac{a}{b};\dfrac{a_Rb-a_Rb}{b(b+b_R)}\right\}$ (для $a>0;b>0$)

$\dfrac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}}=\dfrac{\{a-a_R\}}{\{b+b_R\}}=\left\{\dfrac{a}{b};-\dfrac{ab_R+a_Rb}{b(b+b_R)}\right\}$ (для $a<0;b>0$)

$\dfrac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}}=\dfrac{\{a+a_R\}}{\{b-b_R\}}=\left\{\dfrac{a}{b};\dfrac{ab_R-a_Rb}{b(b-b_R)}\right\}$ (для $a>0;b<0$)

$\dfrac{\widetilde{a}}{\widetilde{b}}=\dfrac{\{a-a_R\}}{\{b-b_R\}}=\left\{\dfrac{a}{b};\dfrac{a_Rb-ab_R}{b(b-b_R)}\right\}$ (для $a<0;b<0$)

Следует отметить, что как и в случае нечетких чисел LR-типа α уровня, для случая нечетких чисел $a_L(\alpha)$ и $a_R(\alpha)$ следует всюду вместо $a_L;a_R;b_L$ и b_R на основании (25) взять соответственно $a_L(\alpha),a_R(\alpha)$, $b_R(\alpha)$, $b_L(\alpha)$.

Пример 18: Заданы два нечетких числа L-типа:

$\widetilde{7}_L=\{7;0{,}6\}$ и $\widetilde{3}_L=\{3;0{,}4\}$

Найти сумму, разность, произведение и частное этих чисел.

$$1)\widetilde{7}_L+\widetilde{3}_L=\{7-0,6\}+\{3-0,4\}=\{10;1\};$$

$$2)\widetilde{7}_L-\widetilde{3}_L=\{7-0,6\}-\{5-0,4\}=\{4;0,2\};$$

$$3)\widetilde{7}_L\cdot\widetilde{3}_L=\{7-0,6\}\cdot\{3-0,4\}=\{21;4,36\};$$

$$4)\frac{\widetilde{7}_L}{\widetilde{3}_L}=\frac{\{7-0,6\}}{\{3-0,4\}}=\left\{\frac{7}{3};0,128\right\}$$

Наконец следует отметить, что если:

1) в (1.42)-(1.44) один из сомножителей есть нечеткое число, то получим формулы умножения нечеткого числа на скаляр;
2) 2) в (1.28), (1.32) и (1.34) делитель будет четким числом, то получим формулы деления нечеткого числа на скаляр.

§3. Сравнение нечетких чисел

Как известно, между двумя четкими числами a и b могут быть справедливым одно из следующих соотношений:

$$a>b; a<b; \text{ либо } a=b \tag{1.45}$$

Поэтому возникает вопрос: какова возможность того, что нечеткое число $\widetilde{a}$ больше (меньше) $\widetilde{b}$, либо $\widetilde{a}=\widetilde{b}$.

Определение 1.25. Будем говорить, что нечеткое число $\widetilde{a}$ больше (меньше) нечеткого числа $\widetilde{b}$, если любое значение носителя нечеткого числа $\widetilde{a}$ больше (меньше) любого значения носителя нечеткого числа $\widetilde{b}$, т.е.

$$\widetilde{a}>\widetilde{b} <=> \{x>y;\forall x\in S_a;\forall y\in S_b\} \tag{1.46}$$

$$\widetilde{a}<\widetilde{b} <=> \{x<y;\forall x\in S_a;\forall y\in S_b\} \tag{1.47}$$

Определение 1.26. Будем говорить, что нечеткое число $\widetilde{a}$ равно нечеткому числу $\widetilde{b}$, если их носители совпадают (совпадение носителей этих чисел означает, что при любом конкретном значении функции принадлежности нечеткие значения обеих чисел равны друг другу), т.е.

$$\widetilde{a} = \widetilde{b} <=> \{ x = y; \mu_a(x) = \mu_b(y); \forall x \in S_a; \forall y \in S_b \} \quad (1.48)$$

Следует отметить, что для различных видов функций принадлежности (степени четкости) значения нечеткого числа при одном и том же уровне четкости не равны друг другу, т.е. если

$\mu_{\underset{A}{1}}(\alpha) \neq \mu_{\underset{A}{2}}(\alpha)$, то для

$$A_{L_1}(\alpha) \neq A_{L_2}(\alpha) \text{ и } A_{R_1}(\alpha) \neq A_{R_2}(\alpha) \quad (1.49)$$

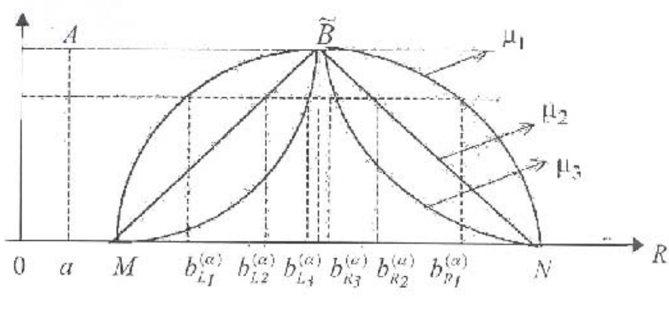


Рис. 1.5

На рисунке 1.5 A – четкое число. $\tilde{B}$ - нечеткое число $S_{\tilde{B}}[MN]$ - носитель нечеткого числа $\tilde{B}$. $\mu_{\tilde{B}}1 \geq \mu_{\tilde{B}}2 \geq \mu_{\tilde{B}}3$.

Поэтому, для указанного $\alpha \in (0{,}1)$.

$$\begin{aligned} &b_{L_1}(\alpha) < b_{L_2}(\alpha) < b_{L_3}(\alpha) < b \\ &< b_{R_3}(\alpha) < b_{R_2}(\alpha) < b_{R_1}(\alpha) \end{aligned} \tag{1.50}$$

где b - четкое значение числа B; b_{L_i} и b_{R_i} - соответственно нечеткие числа L и R – типа для функций принадлежности $\mu_{\tilde{B}}(i = 1,2,3)$ четкости α-уровня.

Из рисунка 1.5 следует, что функция принадлежности нечеткого числа $B - \mu(x)$ слева $(x < b)$ -возрастает, а справа $(x > b)$ - убывает.

Пример 1.9. Требуется найти значения нечеткого числа $\tilde{3}$ слева и справа уровня α=0,6, при функциях принадлежности (виды нечеткости) $\mu_1(x) = \ell^{-x^2}$ и $\mu_2(x) = \ell^{-x^4}$ и растяжение слева и справа σ=2.

Исходя из

$$\alpha = \mu_A(x) = \left\{ \ell^{-\left(\frac{x_R - a}{\sigma}\right)^k} \ \ell^{-\left(\frac{a - x_L}{\sigma}\right)^k} \right\}$$

имеем:

1) При $\mu_{A}1$

$$\ell^{-\left(\frac{\tilde{3}_R - 3}{2}\right)^2} = 0{,}6 \Rightarrow \tilde{3}_R = 3 + 2\sqrt{ln\frac{1}{0{,}6}} = 3{,}942$$

$$\ell^{-\left(\frac{3-\widetilde{3}_L}{2}\right)^2} = 0{,}6 => \widetilde{3}_L = 3 + 2\sqrt{ln\frac{1}{0{,}6}} = 2{,}058$$

2) при $\mu_{\underset{A}{2}}$

$$\ell^{-\left(\frac{\widetilde{3}_R-3}{2}\right)^4} = 0{,}6 => \widetilde{3}_R = 3 + 2\sqrt[4]{ln\frac{1}{0{,}6}} = 4{,}3726$$

$$\ell^{-\left(\frac{3-\widetilde{3}_L}{2}\right)^4} = 0{,}6 => \widetilde{3}_L = 3 - 2\sqrt[4]{ln\frac{1}{0{,}6}} = 1{,}6274$$

Этот результат подтверждает справедливость (1.50). Отметим, что не следует отождествлять виды и свойства функций принадлежности нечетких чисел с видами функций принадлежности нечетких множеств, так как носитель нечеткого числа содержит лишь одно четкое значение этого сила, а носитель нечеткого множества может содержать любое количество четких значений (если нечеткое множество - нормальное), а может и не содержать четких значений (если нечеткого множеств – субнормальное).

Определение 1.27. Нечеткое число называется положительным, если все элементы его носителя положительные, называется отрицательным – если все элементы его носителя отрицательные.

Наряду с этим, приведем понятие нечеткого неотрицательного действительного числа, предложенного Хеле [5]: - Нечеткое неотрицательное действительно число определяется как отображение ρ: $R_+ \to [0{,}1]$, удовлетворяющее условиям:

$\rho(0) = 0,\ sup(\rho(r)/r \in R_+) = 1$ (граничные условия)

$\forall r \in R : \rho(r) = sup(\rho(r')/r' \in r)$ (непрерывность слева)

Если ρ - нечеткое неотрицательное действительное число, то величину $\rho(r)$ можно интерпретировать как степень принадлежности (степень четкости) неявного числа ρ четкому интервалу $[0;r)$.

Из приведенного понятия нечеткого числа следует, что автор не рассматривает нечеткое число как нечеткое подмножество из R_+ (положительной полуоси), а рассматривает как неявную величину. При этом за его носитель принимается полуинтервал $[0;r)$, куда входят множество четких и нечетких чисел вида $0 < r' < r$.

Определение 1.28 Нечеткое число $\widetilde{A}$ называется нечетким нулем, если наиболее четкое его значение равно нулю, т.е.

$$\mu_A(0) = \sup_x\{\mu_A(x)\} \tag{1.51}$$

Если растяжение нечеткого нуля равно σ, то под нечетким нулем четкости $\alpha \in (0;1)$ на основании (4) будем понимать одно из чисел

$$O_L(\alpha) = -(1-\alpha)\sigma\text{, либо } O_R(\alpha) = -(1-\alpha)\sigma \tag{1.52}$$

$$\text{для } \mu_A(x) = 1 - \left|\frac{x-a}{\sigma}\right| \tag{1.53}$$

Для другой функции принадлежности значение (1.53) будет другим. Но во всех случаях для $\alpha \in (0;1)$, $O_L(\alpha) < 0$; $O_R(\alpha) > 0$.

Теорема 1. Для того, чтобы нечеткое число $\widetilde{a}_{LR}$ было больше нечеткого числа $\widetilde{b}_{LR}$ необходимо и достаточно, чтобы любое значение левого растяжения числа $\widetilde{a}_{LR}$ было больше любого значения правого растяжения числа $\widetilde{b}_{LR}$.

Доказательство: Необходимость. Пусть $\widetilde{a} = \{ a, a_L, a_R \}$ и $\widetilde{b} = \{ b, b_L, b_R \}$ - нечеткие числа и пусть $\widetilde{a} > \widetilde{b}$. Тогда в силу (1.46) $x > y$ для любых $x \in (a - a_L ; a + a_R)$ и любых

$$y \in (b - b_L ; b + b_R) \text{ имеем } x>y \tag{1.54}$$

Но так как для любого нечеткого числа его значение из левого растяжения меньше любого значения из его правого растяжения, то

$$\underline{x} < \overline{x}, \underline{x} \in (a - a_L , a); \overline{x} \in (a; a + a_R) \tag{1.55}$$

$$\underline{y} < \overline{y}, \underline{y} \in (b - b_L , b); \overline{y} \in (b; b + b_R) \tag{1.56}$$

Тогда из (1.54)-(1.56) следует, что $\underline{x} > \overline{y}$.

Достаточность: Пусть $\underline{x} > \overline{y}$, тогда в силу (1.55) $\overline{y} < \underline{x}$, а следовательно и $\overline{y} < \overline{x}$ для любых

$$x \in (a - a_L ; a + a_L) \tag{1.57}$$

С другой стороны в силу (1.56) $\underline{y} \leq \overline{y}$ для любых

$$y \in (b - b_L ; b + b_L) \tag{1.58}$$

Поэтому из (1.57) и (1.58) следует справедливость (1.54). Откуда в силу определений левого и правого растяжений и носителя нечеткого числа следует справедливость теоремы.

Аналогично, доказывается справедливость.

Теоремы 1.2 Для того, чтобы нечеткое число $\widetilde{a}_{LR}$ было меньше нечеткого числа $\widetilde{b}_{LR}$ необходимо и достаточно, чтобы любое значение правого растяжения нечеткого числа $\widetilde{a}_{LR}$ было меньше любого значения левого растяжения нечеткого числа $\widetilde{b}_{LR}$.

Из результатов теорем 1.1 и 1.2 следует:

$$\widetilde{a}_{LR} = \widetilde{b}_{LR} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a_L = b_L \\ a_R = b_R \end{cases} \quad (1.59)$$

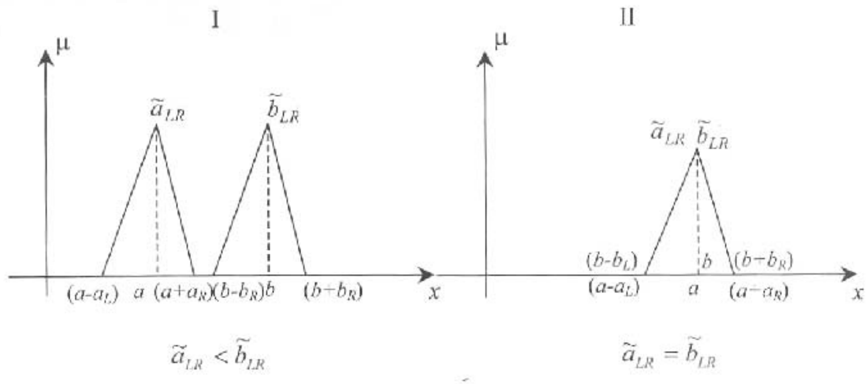


Рис.1.6

На рис.1.6 (I) схематически показаны нечеткие числа $\widetilde{a}_{LR} < \widetilde{b}_{LR}$, а на рисунке 1.6(II) – случай $\widetilde{a}_{LR} = \widetilde{b}_{LR}$

Замечание 1.5. Для случая нечетких чисел L и R - типа легко доказать, что

$$\widetilde{a}_L > \widetilde{b}_L \Leftrightarrow \{ x < y, \forall x \in (a - a_L; a); \forall y \in (b - b_L; b)\}$$

$$\widetilde{a}_R > \widetilde{b}_R \Leftrightarrow \{ x > y, \forall x \in (a; a + a_R); \forall y \in (b; b + b_R)\}$$

Отметим, что здесь и всюду во всей монографии под левым и правым растяжением, расширением и сужениями нечеткого числа следует понимать левое и правое растяжение, расширение и сужение носителя нечеткого числа.

Глава II НЕЧЕТКАЯ АЛГЕБРА

§1 Теоретическое обоснование нечетких уравнений

Ряд задач анализа математических моделей нечетких систем требует решение уравнений с нечеткими числами.

Практический интерес представляет рассмотрение уравнений с обычными математическими терминами и нечеткими математическими отношениями и уравнения с нечеткими числами и обычными математическими отношениями. В общем случае нечетким уравнением называются уравнения, в которых коэффициенты и переменные являются нечеткими числами.

В [24-26] рассматриваются примеры решения уравнений с нечеткими отношениями и обычными математическими терминами. Для чего использованы следующие понятия и теоремы.

Определение 2.1. Математическим термом называется конструкция из элементов $x \in R$ и связывающих их операций (+;-;x;:)

Определение 2.2. Если $\mu_A \in F(R), \mu_A : R \to [0,1]$, то A называется нечетким отношением, а $\mu_A(x,y)$ указывает на то, с какой степенью (x,y) удовлетворяет A.

Примером А может быть А «приближенно равенство».

Определение 2.3. Если f_1 и f_2 есть математические термы и А есть нечеткое отношение, т.е. $\mu_A : R^2 \to [0;1]$, то f, Af_2 называется нечетким уравнением с нечетким отношением.

Например $f_1 = y^2$; $f_2 = x^3$; А есть при умножении f_2 на $\widetilde{3}$; Тогда $f_1 A f_2 \to y^2 \approx \widetilde{3} x^3$, где

$\widetilde{3} = \{3;0,4;0,6\}$ нечеткое число (LR)- типа.

Теорема 2.1 Предположим, что f_1 и f_2 математические термы, А-нечеткое отношение и имеет место уравнение f_1Af_2. Тогда, если $a \in R$, то

$$\begin{aligned} &1)\quad (f_1+a)(A+a)(f_2+a) \\ &2)\quad (f_1\cdot a)(A\cdot a)(f_2\cdot a) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Теорема 2.2. Нечеткое отношение являются адитивно независимым тогда и только тогда, когда

$$A(x,y)=A(|x-y|) \tag{2.2}$$

Теорема 2.3 Нечеткое отношение А является мультипликативно независимым тогда и только тогда, когда

$$A(x;y)=A((x/y)h),\quad h\ge 1 \tag{2.3}$$

Определение 2.4. Нечетким математическим термом называется конструкция из элементов $\mu_{A_i}\in F(R), i\in N$, связанных отношениями :;+;-; ·, $\widetilde{m}\widetilde{a}\widetilde{x}$, min. Далее поскольку семейство выпуклых нормальных нечетких чисел (семейство нечетких чисел, имеющих выпуклые носители, содержащие их четкие значения) образуют только коммутативное полукольцо, то решение уравнения с нечеткими термами возможно только при использовании разложения нечетких термов по α-уровням. Метод, описанный в [25] неизбежно приводит к нечетким нулям и к изменению степени истинности математических отношений.

Определение 2.5. Скобочной формой уравнения $\widetilde{f}_1A\widetilde{f}_2$ называется следующее разложение по α-уровням:

$$\left(\bigcup_{\alpha}\alpha\widetilde{f}_1\alpha\right)A\left(\bigcup_{\alpha}\alpha\widetilde{f}_2\alpha\right)=\left(\bigcup_{\alpha}\alpha\left[f_{L_1}f_{R_1}\right]\right)A\left(\bigcup_{\alpha}\alpha\left[f_{L_2}f_{R_2}\right]\right) \tag{2.4}$$

Например. Пусть

$\widetilde{a}x^2+\widetilde{b}x+\widetilde{c}=0$, где $\widetilde{a}=\{a_L;a_R\}$; $\widetilde{b}=\{b_L;b_R\}$ и $\widetilde{c}=\{c_L;c_R\}$, тогда

$$\widetilde{a}x^2+\widetilde{b}x+\widetilde{c}=\{a_Lx^2+b_Lx+c_L=0; a_Rx^2+b_Rx+c_R=0\}=0$$

Если все нормальные унимодельные числа, из которых состоят нечеткие термы $\widetilde{f}_1$ и $\widetilde{f}_2$ имеют носители S_{f_1} и S_{f_2} такие, что они не содержат одновременно положительных и отрицательных элементов, то будет справедливо следующее соотношение:

$$\widetilde{f}_1(\alpha)A\widetilde{f}_2(\alpha)=\begin{cases}(f_L(\alpha)A(f_{L_2}(\alpha)) \\ (f_{R_1})A(f_{R_2})\end{cases} \forall\alpha\in[0,1] \qquad (2.5)$$

Поскольку элементы скобочной формы и A являются обычными математическими нормами и отношением, то для скобочной формы будут справедливы соответствующие условия адитивной и мультипликативной независимости, которые справедливы для любых обычных уравнений.

Таким образом, чтобы решить уравнений вида $\widetilde{f}_1(x)A\widetilde{f}_2(x)$ необходимо привести его к виду (2.4) и решить отдельно относительно x_L и x_R . Условием адитивности являяется выпуклость и нормальность (носителей).

В случае нечетких чисел (LR)-типа уравнение с Н.Н. можно решить, получив соответствующую скобовую форму. При этом необходимо учитывать приближенный характер «.», «..» для нечетких чисел (LR)-типа.

Следует отметить, что разложение по α-уровням дает возможность производить дальнейший анализ задач с Н.Н. с помощью метода интервального анализа.

Ниже применяя метод интервального анализа проводится решение алгебраических уравнений и систем линейных алгебраических уравнений с нечеткими коэффициентами.

§2. Нечеткие линейные алгебраические уравнения

Определение 2.6. Нечетким алгебраическим уравнением называется алгебраическое уранение, в котором хотя бы один из коэффициентов при неизвестных либо свободный член (либо тот и другой) являются нечеткими числами.

Следует отметить, что корни нечеткого алгебраического уравнения являются нечеткими числами.

В частности, исходя из основного правила алгебры. Если один из коэффициентов a_i алгебраического уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_1 x^{n-i} = 0 \tag{2.6}$$

есть нечеткое число, то хотя бы один из корней этого уравнения является нечетким числом. Следует отметить, что если показатель степени уравнения (2.1) есть нечеткое число, то уравнение (2.1) называется уравнением с нечеткой степенью и при этом решением ее будет нечеткое число.

Определение 2.7. Нечеткое алгебраическое уравнение линейное относительно неизвестной называется нечетким линейным уравнением о обозначается:

$$\tilde{a}\tilde{x} = \tilde{b} \tag{2.7}$$

$$\tilde{x} = -\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}; \quad \mu(x) = \min(\mu(a)\,\mu(b)) \tag{2.8}$$

Рассмотрим различные виды нечетких линейных алгебраических уравнений:

1) $ax = \widetilde{b}$, тогда $\widetilde{x} = \dfrac{\widetilde{b}}{a}; \mu(x) = \mu(b)$, где

$b_L = b_1 - b_L;\ b_2' = b + b_L$

а) Если $\widetilde{b} = \{b_L'; b_R'\}$, то

$$\widetilde{X} = \{x_L; X_R\} = \\ = \begin{cases} \left\{\dfrac{b_L'}{a}; \dfrac{b_R}{a}\right\}, \text{если } a > 0;\ b > 0;\ \ a > 0; b < 0 \\ \left\{\dfrac{b_R'}{a}; \dfrac{b_L'}{a}\right\}, \text{если } a < 0;\ b > 0;\ \ a < 0; b < 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

б) если $\widetilde{b} = \{b; b_L; b_R\}$, то

$$\widetilde{X} = \{x; x_L; X_R\} = \begin{cases} \left\{\dfrac{b}{a}; \dfrac{b_L}{a}; \dfrac{b_R}{a}\right\}, \text{если } a > 0; \\ \left\{\dfrac{b}{a}; \dfrac{b_R}{a}; \dfrac{b_L}{a}\right\}, \text{если } a < 0; \end{cases}$$

Пример2.1. $3x = \{6;0{,}9;0{,}3\}; \widetilde{x} = \{2;0{,}3;0{,}1\}$

2) $\widetilde{a}x = b; \widetilde{x} = \dfrac{b}{a}; \mu(x) = \mu(a)$

а) $\widetilde{a} = \{a_L'; a_R'\}$ где $a_L' = a - a_L; a_R' = a + a_R$, то

$$\widetilde{X} = \{x_L; X_R\} = \begin{cases} \left\{\dfrac{b}{a_R}; \dfrac{b}{a_L}\right\}, \text{для}: \begin{Bmatrix} a > 0; b > o \\ a < 0; b < 0 \end{Bmatrix} \\ \left\{\dfrac{b}{a_L}; \dfrac{b}{a_R}\right\}, \text{ для}: \begin{Bmatrix} a > 0; b < o \\ a < 0; b > 0 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

б) если $\widetilde{a} = \{a; a_L; a_R\}$, то

$$\widetilde{X}=\{x;x_L;X_R\}=$$

$$=\begin{cases}\left\{\dfrac{b}{a};\dfrac{ba_R}{a(a+a_R)};\dfrac{ba_L}{a(a-a_L)}\right\}, для\begin{Bmatrix}a>0;b>0\\a<0;b<0\end{Bmatrix}\\ \left\{\dfrac{b}{a};\dfrac{ba_R}{a(a-a_L)};\dfrac{ba_R}{a(a+a_R)}\right\}, для\begin{Bmatrix}a>0;b<0\\a<0;b>0\end{Bmatrix}\end{cases}$$

Пример 2.2
$\widetilde{x}=\{3;0{,}397;0{,}273\}$

3) $\widetilde{a}x=\widetilde{b}$, тогда $\widetilde{x}=\dfrac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}$; $\mu(x)=\min(\mu(a)\mu(b))$

а) если $\widetilde{a}=\{a'_L;a'_R\}$; $\widetilde{b}=\{\widetilde{b}_L;b'_R\}$, тогда, пользуясь правилом деления нечетких чисел имеем:

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{X}&=\left\{\frac{b'_L}{a'_R};\frac{b'_R}{a'_L}\right\}, для\,(a>0;b>0)\\ \widetilde{X}&=\left\{\frac{b'_L}{a'_L};\frac{b'_R}{a'_R}\right\}, для\,(a>0;b<0)\\ \widetilde{X}&=\left\{\frac{b'_R}{a'_R};\frac{b'_L}{a'_L}\right\}, для\,(a<0;b>0)\\ \widetilde{X}&=\left\{\frac{b'_R}{a'_L};\frac{b'_L}{a'_R}\right\}, для\,(a<0;b<0)\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

б) Если $\widetilde{a}=\{a;a_L;a_R\}$ $\widetilde{b}=\{b;b_L;b_R\}$, то

$$\left.\begin{aligned}
\widetilde{X} &= \left\{\frac{b}{a};\frac{a_R b + ab_L}{a(a+a_R)};\frac{ab_R + a_L b}{a(a-a_L)}\right\}, для\ a>0; b>0\\
\widetilde{X} &= \left\{\frac{b}{a};\frac{ab_L - a_L n}{a(a-a_L)};\frac{ab_R - a_R b}{a(a+a_R)}\right\}, для\ a>0; b<0\\
\widetilde{X} &= \left\{\frac{b}{a};\frac{a_R b - ab_R}{a(a+a_R)};\frac{a_L b - ab_L}{a(a+a_L)}\right\}, для\ a<0; b>0\\
\widetilde{X} &= \left\{\frac{b}{a};\frac{-ab_R - a_L b}{a(a-a_L)};\frac{-ba_R - ab_L}{a(a+a_R)}\right\}, для\ a<0; b<0
\end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

Пример 2.3 $\{2;0,4;0,6\}$ $\widetilde{x} = \{10;0,6;0,7\}$

а) $\widetilde{x} = \dfrac{\{9,4;10,7\}}{\{1,6;2,6\}} = \{5;1,38;1,69\} = \{3,62;6,69\}$

б) $\widetilde{x} = \dfrac{\{10;0,6;0,7\}}{\{2;0,4;0,6\}} = \{5;1,38;1,69\} = \{3,62;6,69\}$

Отметим, что

3) если в (2.7) $\widetilde{a} = \widetilde{a}_R; \widetilde{b} = \widetilde{b}_R$, т.е. $\widetilde{a} = \{a; a_R\}$ и $\widetilde{b} = \{b; b_R\}$, то

$$\widetilde{X} = \left\{\frac{b}{a};\frac{ab_L - a_L b}{a(a-a_L)}\right\}$$

4) если в (2.7) $\widetilde{a} = \{a; a_R\}; \widetilde{b} = \{b; b_R\}$, то

$$\widetilde{X} = \left\{\frac{b}{a};\frac{ab_R - a_R b}{a(a-a_R)}\right\}$$

5) если $\widetilde{a} = \{a; a_L\}$ $\widetilde{b} = \widetilde{b}_R\{b; b_R\}$, то

$$\widetilde{X} = \left\{\frac{b}{a};\frac{a_R b + ab_L}{a(a+a_R)}\right\} = \{x; x_L\} \qquad (2.12)$$

4) если $\widetilde{a} = \widetilde{a}_R = \{a; a_R\}$, а $\widetilde{b} = \widetilde{b}_L = \{b; b_L\}$, то

$$\widetilde{X} = \left\{ \frac{b}{a}; \frac{ab_R + a_L b}{a(a - a_L)} \right\} = \{ x; x_R \} \qquad (2.13)$$

Замечание. Если коэффициенты и свободные члены уравнения (2.7) являются нечеткими числами α-уровня, то всюду a_L и b_L заменяются на $a_L(\alpha)$ и $b_L(\alpha)$ с помощью (1.28).

Пример 2.4 Найти решение уравнения $\widetilde{a}x = \widetilde{b}$, коэффициенты которого взяты из данных примера (2.3), со степенью четкости α =0,8

$$\widetilde{a}(0{,}8) = \{2; (1-0{,}8)0{,}4; (1-0{,}8)0{,}6\} = \{2; 0{,}08; 0{,}12\}$$

Имеем: $\widetilde{b}(0{,}8) = \{10; 0{,}12; 0{,}14\}$

$$\widetilde{X} = \frac{\{10;0{,}12;0{,}14\}}{\{2;0{,}08;0{,}12\}} = \{5;0{,}29;0{,}34\} = \{4{,}71;5{,}34\}$$

§3 Нечеткие квадратные уравнения

Определение 2.8. Квадратное уравнение, хотя бы один коэффициент которого либо свободный член есть нечеткое число называется нечетким квадратным уравнением.

Как и в случае четкое квадратного уравнения полное нечеткое квадратное уравнение имеет вид:

$$\widetilde{a}x^2 + \widetilde{b}x + \widetilde{c} = 0 \qquad (2.14)$$

Рассмотрим различные виды нечетких квадратных уравнений:

I. Неполное нечеткое квадратное уравнение:

$$1)\ \tilde{a}x^2 + \tilde{b}x = 0, \quad если \quad \tilde{c} = 0 \tag{2.15}$$

При этом

$$x_1 = 0; \quad \tilde{x}_2 = -\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} \tag{2.16}$$

В зависимости от типа нечетких чисел $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ определяем значение (2.16) как решение нечеткого линейного алгебраического уравнения.

$$2)\ \tilde{a}x + \tilde{c} = 0, \text{ если } \tilde{b} = 0 \tag{2.17}$$

откуда

$$\tilde{x}_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{\tilde{c}}{\tilde{a}}} \tag{2.18}$$

Очевидно, что если $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$ -нечеткие числа противоположного знака, то корни уравнения (2.17) действительные и различны; если же $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$ -одинакового знака, то корни уравнения (2.17)-комплексно сопряженные нечеткие числа.

а) Пусть $\tilde{a} = \{a'_L\ a'_R\}$; $\tilde{c} = \{c'_L; c'_R\}$, тогда

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{X}_1 = \left\{\begin{array}{l} \left\{\sqrt{-\dfrac{c'_R}{a'_R}}; \sqrt{-\dfrac{c'_L}{a'_L}}\right\} (для \quad a > 0; c < 0) \\ \left\{\sqrt{-\dfrac{c'_L}{a'_L}}; \sqrt{-\dfrac{c'_R}{a'_R}}\right\} (для \quad a < 0; c > 0) \end{array}\right\} \\ \tilde{X}_2 = \left\{\begin{array}{l} \left\{-\sqrt{-\dfrac{c'_L}{a'_L}}; -\sqrt{-\dfrac{c'_R}{a'_R}}\right\} (для \quad a > 0; c < 0) \\ \left\{-\sqrt{-\dfrac{c'_R}{a'_R}}; -\sqrt{-\dfrac{c'_L}{a'_L}}\right\} (для \quad a < 0; c > 0) \end{array}\right\} \end{array}\right\} \tag{2.19}$$

б) Пусть $\tilde{a} = \{a; a_L; a_R\}$, $\tilde{c} = \{c; c_L; c_R\}$, тогд

$$\tilde{x}_1 = \begin{cases} \left\{ \sqrt{-\frac{c}{a}} \frac{\sqrt{-c(a-a_R)} - \sqrt{(-c+c_R)a}}{\sqrt{a(a+a_R)}}; \frac{\sqrt{-c(c-c_L)} - \sqrt{-a-a_L}}{\sqrt{a(a-a_L)}} \right\} \\ (для\, a>0; c<0) \\ \left\{ \sqrt{-\frac{c}{a}}; \frac{\sqrt{-c(a-a_L)} - \sqrt{(-c-c_L)a}}{\sqrt{a(a+a_L)}}; \frac{\sqrt{-c(c+c_R)} - \sqrt{c(-a+a_R}}{\sqrt{a(a-a_R)}} \right\} \end{cases} \qquad (2.20)$$

$$(для\, a<0; c>0)$$

$$\tilde{x}_2 = \begin{cases} \left\{ -\sqrt{-\frac{c}{a}}; \frac{-\sqrt{-c(a-a_L)} + \sqrt{(-c-c_L)}}{\sqrt{a(a+a_L)}}; \frac{\sqrt{-a(-c+c_R)} - \sqrt{c(-a+a_R)}}{\sqrt{a(a-a_L)}} \right\} \\ (для\, a<0; c>0) \\ \left\{ -\sqrt{-\frac{c}{-a}}; \frac{\sqrt{+a(-c+a_R)} - \sqrt{(-c(+a+a_R)}}{\sqrt{a(a+a_R)}}; \frac{\sqrt{-c(a-a_L)} - \sqrt{a(-c-c_L}}{\sqrt{a(a-a_L)}} \right\} \end{cases}$$

$$(для\, a>0; c<0)$$

Из (2.19) следует, что при умножении или делении коэффициентов уравнения (2.17) на (-1) носители его корней изменяются

Пример 2.5 $\tilde{3}x - \tilde{12} = 0$, где $\tilde{3} = \{3;0,4;0,6\}$; $\tilde{12} = \{12;0,3;0,7\}$

Имеем $\tilde{3} = \{2,6;3,6\}$; $\tilde{12} = \{11,7;12,7\}$

Так как $a > 0, c < 0$, то

а) $\begin{cases} \tilde{X}_1 = \left\{ \frac{11,7}{3,6}; \sqrt{\frac{12,7}{2,6}} \right\} = \{1,8; 2,21\} \\ \tilde{X}_2 = \{-2,21; \ -1,8\} \end{cases}$

б) $\begin{cases} \tilde{X}_1 = \{2; 0,16; 0,19\} \\ \tilde{X}_2 = \{-2; 0,19; 0,16\} \end{cases}$

II Полное квадратное уравнение

Рассмотрим уравнение (2.14), когда все коэффициенты нечеткие числа, отличные от нуля.

Учитывая формулы корней квадратного уравнения для квадратных уравнений с четкими коэффициентвми имеем:

$$\tilde{X}_1 = \frac{-\tilde{b} + \sqrt{\tilde{b}^2 - 4\tilde{a}\tilde{c}}}{2\tilde{a}}; \quad \tilde{X}_2 = \frac{-\tilde{b} - \sqrt{\tilde{b}^2 - 4\tilde{a}\tilde{c}}}{2\tilde{a}} \qquad (2.21)$$

1) Пусть в (2.14) $\tilde{a} = \{a'_L\ a'_R\}$; $\tilde{b} = \{b'_L; b'_R\}$ $\;и\;$ $\tilde{c} = \{c'_L; c'_L\}$

Если при этом корни уравнения (2.14) искать в виде $\tilde{X}_1 = \{X'_L; X'_R\} : \tilde{X}_2 = \{X'_{L2} : X'_{R2}\}$, то

при a>0; b>0; c>0

$$\left.\begin{aligned} X'_{L1} &= \frac{-b'_R + \sqrt{b'^2_L - 4a'_R\, c'_R}}{2a'_L}; \quad X'_{R1} = \frac{-b'_L + \sqrt{b'^2_R - 4a'_L\, c'_L}}{2a'_L} \\ X'_{L_2} &= \frac{-b'_R - \sqrt{b'^2_R - 4a'_L\, c'_L}}{2a'_L}; \quad X'_{R1} = \frac{-b'_L - \sqrt{b'^2_L - 4a'_R\, c'_R}}{2a'_R} \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

при a>0; b>0; c>0

$$X'_{L1} = \frac{-b'_R + \sqrt{b'^2_L - 4a'_L\, c'_R}}{2a'_R}; \quad X'_{R1} = \frac{-b'_L + \sqrt{b'^2_R - 4a'_R\, c'_L}}{2a'_R},$$

если числители дробей отрицательны.

$$X'_{L1} = \frac{-b'_R + \sqrt{b'^2_L - 4a'_L\, c'_R}}{2a'_R}; \quad X'_{R1} = \frac{-b'_L + \sqrt{b'^2_R - 4a'_R\, c'_L}}{2a'_L}, \qquad (2.23)$$

если числители дробей положительны.

$$X'_{L2}=\frac{-b'_R-\sqrt{b'^2_L-4a'_R\,c'_L}}{2a'_L};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L-\sqrt{b'^2_L-4a'_L\,c'_R}}{2a'_R}$$

при a>0; b<0; c>0

$$\left.\begin{aligned}X'_{L1}&=\frac{-b'_R+\sqrt{b'^2_R-4a'_R\,c'_R}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L+\sqrt{b'^2_L-4a'_L\,c'_L}}{2a'_L}\\X'_{L_2}&=\frac{-b'_R-\sqrt{b'^2_L-4a'_L\,c'_L}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L-\sqrt{b'^2_R-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L}\end{aligned}\right\}\quad(2.24)$$

при a>0; b<0; c<0

$$\left.\begin{aligned}X'_{L1}&=\frac{-b'_R+\sqrt{b'^2_R-4a'_L\,c'_R}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L+\sqrt{b'^2_L-4a'_R\,c'_L}}{2a'_L}\\X'_{L_2}&=\frac{-b'_R-\sqrt{b'^2_L-4a'_R\,c'_L}}{2a'_L};\quad X'_{R2}=\frac{-b'_L-\sqrt{b'^2_R-4a'_L\,c'_R}}{2a'_R}\end{aligned}\right\}(2.25)$$

при a<0; b>0; c>0

$$\left.\begin{aligned}X'_{L1}&=\frac{-b'_R+\sqrt{b'^2_L-4a'_R\,c'_L}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L+\sqrt{b'^2_L-4a'_L\,c'_R}}{2a'_R}\\X'_{L_2}&=\frac{-b'_R-\sqrt{b'^2_R-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L};\quad X'_{R2}=\frac{-b'_L-\sqrt{b'^2_L-4a'_R\,c'_L}}{2a'_R}\end{aligned}\right\}(2.26)$$

при a<0; b>0; c<0

$$X'_{L1}=\frac{-b'_R+\sqrt{b'^2_L-4a'_L\,c'_L}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L+\sqrt{b'^2_R-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L}$$

если числитель дроби положительный и

$$X'_{L1}=\frac{-b'_R+\sqrt{b'^2_L-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L};\quad X'_{R1}=\frac{-b'_L+\sqrt{b'^2_R-4a'_L\,c'_L}}{2a'_R}\qquad(2.27)$$

если числитель дроби отрицательный

$$X'_{L2}=\frac{-b'_R-\sqrt{b'^2_R-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L};\quad X'_{R2}=\frac{-b'_L-\sqrt{b'^2_L-4a'_L\,c'_L}}{2a'_R}$$

при $a<0$; $b<0$; $c>0$

$$\left.\begin{array}{l}
X'_{L1}=\dfrac{-b'_R+\sqrt{b'^2_R-4a'_R\,c'_L}}{2a'_R};\quad X'_{-R1}=\dfrac{-b'_L+\sqrt{b'^2_L-4a'_L\,c'_R}}{2a'_L}\\
X'_{L_2}=\dfrac{-b'_R-\sqrt{-b'^2_L-4a'_L\,c'_R}}{2a'_L};\quad X'_{R2}=\dfrac{-b'_L-\sqrt{b'^2_R-4a'_R\,c'_L}}{2a'_L}
\end{array}\right\}\quad(2.28)$$

при $a<0$; $b<0$; $c<0$

$$\begin{array}{l}
X'_{L1}=\dfrac{-b'_R+\sqrt{b'^2_R-4a'_L\,c'_L}}{2a'_R};\quad X'_{R1}=\dfrac{-b'_L+\sqrt{b'^2_L-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L}\\
X'_{L_2}=\dfrac{-b'_R-\sqrt{-b'^2_L-4a'_R\,c'_R}}{2a'_R};\quad X'_{R2}=\dfrac{-b'_L-\sqrt{b'^2_R-4a'_L\,c'_L}}{2a'_L}
\end{array}\qquad(2.29)$$

если числитель дроби положительный и

$$X'_{L2}=\frac{-b'_R+\sqrt{b'^2_L-4a'_R\,c'_R}}{2a'_L};\quad X'_{R2}=\frac{-b'_L+\sqrt{b'^2_R-4a'_L\,c'_L}}{2a'_R}$$

если числительный дроби отрицательный

2) Пусть $\tilde{a}=\{a;a_L;a_R\}$; $\tilde{b}=\{b;b_L;b_R\}$ и $\tilde{c}=\{c;c_L;c_R\}$

При этом учитывая, что $a'_L = a - a_L$; $a'_R = a' + a_R$

$$b'_L = b - b_L; b'_R = b + b_R; c'_L = c - c; c'_R = c + c_R \qquad (2.30)$$

на основании (2.22)-(2.29), определим

$\widetilde{X}_i = \{X'_{Li}; X'_{Ri}\}$; $(i = 1,2)$. Затем лпределив решение четкого квадратного уравнения

$$X_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2.31)$$

находятся

$\widetilde{X}_1 = \{X_1, X_{Li}; X_{Ri}\}$; и $\widetilde{X}_1 = \{X_1, X_{Li}; X_{Ri}\}$; где

$$X_{R_i} = \{X'_{Ri} - X_i\};\ X_{Li} = X_i - X_{Li} \quad (i = 1,2). \qquad (2.32)$$

Если же требуется найти корни уравнения (2.14) со степенью четкости $\mu(x) = \alpha$, то:

а) следует всюду в (2.22)-(2.29) вместо $\{X'_{L_i}; X'_{Ri}; (i = 1,2)\}$ взять

$\{X'_{L_i}(\alpha); X'_{Ri}(\alpha); (i = 1,2)\}$, где

$$\{X'_{L_i}(\alpha) = X_i - (1-\alpha)X'_{Li};\ X'_{Ri}(\alpha) = X_i + (1-\alpha)X_{Ri} \quad i = 1,2\} \qquad (2.33)$$

б) следует с помощью (2.22)-(2.32) найти решение уравнения (2.14), а затем с помощью (2.33) найти решение данного нечеткого квадратного урвнения с нужной степенью четкости

Пример 2.5 $\widetilde{a}x^2 + \widetilde{b}x - \widetilde{c} = 0$, где

$\widetilde{a} = \{2;0,2;0,3\}$; $\widetilde{b} = \{5;0,1;0,3\}$; $\widetilde{c} = \{3;0,3;0,2\}$ ибо

$\widetilde{a} = \{1,8;2,3\}$; $\widetilde{b} = \{4,9;5,3\}$; $\widetilde{c} = \{2,7;3,2\}$

Имеем: $X'_L = \dfrac{-5,3+\sqrt{4,9^2-4\cdot 1,8(-2,7)}}{2\cdot 2,3} = 0,281$

$$X'_{R_1} = \frac{-4,9+\sqrt{5,3^2-4\cdot 2,3(-3,3)}}{2\cdot 1,8} = 0,746$$

$$X'_{L2} = \frac{-5,3-\sqrt{5,3^2-4\cdot 2,3(-3,2)}}{2\cdot 1,8} = -3,58$$

$$X'_{R2} = \frac{-4,9-\sqrt{4,9^2-4\cdot 1,8(-2,7)}}{2\cdot 2,3} = -2,5$$

$\widetilde{X}_1 = \{0,281;0,746\}$; $\widetilde{X}_2 = \{-3,58;2,5\}$

$2x^2 + 5x - 3 = 0$; $x_1 = 0,5$; $x_2 = -3$

$\widetilde{x}_1 = \{0,5;0,219;0,246\}$; $\widetilde{x}_2 = \{-3;0,58;0,5\}$

Вычислим: $\widetilde{X}(\alpha = 0,8) = \{\widetilde{X}_1(0,8); \widetilde{X}_2(0,8)\}$. Имеем:

$$\widetilde{X}_1(0,8) = \begin{cases} X'_{L1}(0,8) = 0,5-(1-0,8)0,219 = 0,456 \\ X'_{R1}(0,8) = 0,5+(1-0,8)0,246 = 0,549 \end{cases}$$

$$\widetilde{X}_2(0,8) = \begin{cases} X'_{L2}(0,8) = -3-(1-0,8)0,58 = -3,116 \\ X'_{R2}(0,8) = -3+(1-0,8)0,5 = -2,9 \end{cases}$$

Таким образом, решение квадратного уравнения можно представить в виде нечетких чисел:

$\widetilde{X}_1 = \{0/0,28; 0,8/0,456; 1/0,5;\ 0,8/0,549; 0/0,746\}$

$\widetilde{X}_2 = \{0/-3,58; 0,8/-3,116; 1/-3; 0,8/-2,9; 0/-2,5\}$

II. Приведенные квадратные уравнения LR-типа

Рассмотрим нечеткое квадратное уравнение:

$$x^2 + \widetilde{P}x + \widetilde{q} = 0 \qquad (2.34)$$

где $\widetilde{P}=\{P'_L;P'_R\};\widetilde{q}=\{q'_L;q'_R\}$

Учитывая формулы корней приведенного квадратного уравнения имеем:

$$\widetilde{X}_1=\frac{-\widetilde{p}+\sqrt{p^2-4q}}{2};\quad \widetilde{X}_2=\frac{-\widetilde{p}-\sqrt{p^2-4\widetilde{q}}}{2} \qquad (2.35)$$

Если принять $X'_{Li};X'_{Ri}\quad (i=1,2)$, то

При P>0; q>0

$$X'_{L1}=\frac{-p'_R+\sqrt{p'^2_L-4q'_R}}{2};\quad X'_{R1}=\frac{-p'_L+\sqrt{p'^2_R-4q_L}}{2}$$

$$X'_{L2}=\frac{-p'_R-\sqrt{p'_R-4q'_L}}{2};\quad X'_{R2}=\frac{-p'_L-\sqrt{p'^2_L-4q_R}}{2}$$

при p>0; q<0

$$X'_{L1}=\frac{-p'_R+\sqrt{p'_L-4q'_R}}{2};\quad X'_{R1}=\frac{-p'_L+\sqrt{p'^2_R-4q'_L}}{2}.$$

$$X'_{L2}=\frac{-p'_R-\sqrt{p'_R-4q'_L}}{2};\quad X'_{R2}=\frac{-p'_L-\sqrt{p'^2_L-4q'_R}}{2}.$$

при p<0; q>0

$$X'_{L1}=\frac{-p'_R+\sqrt{p'^2_R-4q'_R}}{2};\quad X'_{R1}=\frac{-p'_L+\sqrt{p'^2_L-4q'_L}}{2}.$$

$$X'_{L2}=\frac{-p'_R-\sqrt{p'^2_L-4q'_L}}{2};\quad X'_{R2}=\frac{-p'_L-\sqrt{p'^2_R-4q'_R}}{2}.$$

при p<0;q<0

$$X'_{L1}=\frac{-p'_R+\sqrt{p'_R-4q'_R}}{2};\quad X'_{R1}=\frac{-p'_L+\sqrt{p'^2_L-4q'_L}}{2}.$$

$$X'_{L2}=\frac{-p'_R-\sqrt{p'_L-4q'_L}}{2};\quad X'_{R2}=\frac{-p'_L-\sqrt{p'^2_R-4q'_R}}{2}.$$

Пример 2.6 x^2-{4;0,5;0,8}x-{5;0,6;0,4}=0

$$X'_{L_1} = \frac{3{,}2 + \sqrt{3{,}2^2 + 4 \cdot 4{,}6}}{2} = 4{,}276;$$

$$X'_{R_1} = \frac{4{,}5 + \sqrt{4{,}5^2 + 4 \cdot 5{,}6}}{2} = 5{,}515$$

$$X'_{R_2} = \frac{3{,}2 - \sqrt{4{,}5^2 + 4 \cdot 5{,}6}}{2} = -1{,}665;$$

$$X'_{R_2} = \frac{4{,}5 - \sqrt{3{,}2^2 + 4 \cdot 4{,}6}}{2} = -0{,}426$$

$$\widetilde{p} = \{4;0{,}5;0{,}8\} = \{-4{,}5;-3{,}2\}$$

$$\widetilde{q} = -\{5;0{,}6;0{,}4\} = \{-5{,}6;-4{,}6\}$$

$$\widetilde{X}_1 = \{4{,}27; 5{,}515\}; \widetilde{X}_2 = \{-1{,}665;-0{,}426\}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0; \quad x_1 = 5; x_2 = -1$$

$$\widetilde{X}_1 = \{5;0{,}724;0{,}515\}; \ \widetilde{X}_2 = \{-1;0{,}665;0{,}574\}$$

IV. Полные квадратные уравнения L-типа

Рассмотрим полное нечеткое квадратное уравнение, коэффициенты которого есть нечеткие числа L-типа

$$\widetilde{a}_L x^2 + \widetilde{b}_L + \widetilde{c}_L = 0 \qquad (2.36)$$

где $\widetilde{a}_L = \{a; a_L\}$; $\widetilde{b} = \{b; b_L\}$ и $\widetilde{c} = \{c; c_L\}$

при этом

(для a>0; b>0; c>0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a-a_L)(c-c_L)}}{2(a-a_L)} \\ X'_{R12} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a+a_L)(c+c_L)}}{2(a+a_L)} \end{cases}$$

(для a>0;b<0;c>0)

$$\begin{cases} X'_{R12} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a+a_L)(c-c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{L_{12}} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X'_{L_{12}} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a-a_L)(c-c_L)}}{2(a-a_L)} \\ X'_{R_{12}} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a+a_L)(c+c_L)}}{2(a+a_L)} \end{cases} \qquad (2.37)$$

(для a>0;b<0;c>0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \\ X'_{R_{12}} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a+a_L)(c-c_L)}}{2(a+a_L)} \end{cases} \qquad (2.38)$$

(для a>0;b<0;c<0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a+a_L)(c-c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{L_{12}} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}$$

(для a<0:b>0;c<0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a+a_L)(c+c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{L_{12}} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}.$$

(для a<0;b>0;c<0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a+a_L)(c+c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{R_{12}} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}.$$

(для a<0; b>0; c<0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a+a_L)(c-c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{R_{12}} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a-a_L)(c+c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}.$$

(для a<0; b<0; c>0)

$$\begin{cases} X'_{L12} = \dfrac{-(b+b_L) \pm \sqrt{(b+b_L)^2 - 4(a+a_L)(c+c_L)}}{2(a+a_L)} \\ X'_{L_{12}} = \dfrac{-(b-b_L) \pm \sqrt{(b-b_L)^2 - 4(a-a_L)(c-c_L)}}{2(a-a_L)} \end{cases}.$$

(для a<0;b<0; c<0)

Пример 2.7

$$\tilde{2}x^2 - \tilde{5}x - \tilde{3} = 0; \tilde{2} = \{2;0,8\} : \tilde{5} = \{5;0,7\} \cdot \tilde{3} = \{3;0,9\}$$

$$2x^2 - 5,7x - 3,9 = 0$$

$$x_1 = 5,36;$$

$$x_1 = 5,36; \;\; x_2 = -0,61$$

$$2,8x^2 - 4,3x - 21 = 0; \;\; x_1 = 1,93; x_2 = -0,39$$

$$\tilde{x}_1 = \{2,93; 5,36\}; \;\; \tilde{x} = \{-0,61; -0,39\}$$

Аналогичным образом, можно наути корни нечеткого уравнения в слечае, когда коэффициенты его есть нечеткие числа R-типа.

Кроме того, учитывая (1.28) можно определить нечеткое решение (2.36) с четкостью α-уровня.

§4 Система нечетких линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

Решение системы линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} \tilde{a}_1 x + \tilde{b}_1 y = \tilde{c}_1 \\ \tilde{a}_2 x + \tilde{b}_2 y = \tilde{c}_2 \end{cases} \tag{2.39}$$

где $\tilde{a}_i = \{a; a_L; a_R\} = \{a'_{Li}; a'_{Ri}\}; \;\; (i = 1,2)$

$$\tilde{b}_i = \{b_i; b_{Li}; b_{Ri}\} = \{b'_{Li}; b_{Ri}\}; \tilde{c}_i = \{c_i; c_{Li}; c_{Ri}\} = \{c'_{Li}; c'_{Ri}\}$$

$$\tilde{X} = \frac{\Delta_{\tilde{x}}}{\Delta} = \frac{\tilde{c}_1\tilde{b}_2 - \tilde{c}_2\tilde{b}_1}{\tilde{a}_1\tilde{b}_2 - \tilde{a}_2\tilde{b}_1}; \qquad \tilde{y} = \frac{\Delta_{\tilde{y}}}{\Delta} = \frac{\tilde{a}_1\tilde{c}_2 - \tilde{a}_2\tilde{c}_1}{\tilde{a}_1\tilde{b}_2 - \tilde{a}_2\tilde{b}_1} \tag{2.40}$$

Учитывая правила сложения, вычитания, умножения и деления нечетких чисел (LR)-типа имеем:

$$\tilde{a}_1\tilde{b}_2=\begin{cases}\{a'_{L1}\,b'_{L2}\,;a'_{R1}\,b'_{R2}\} & (для\ a_1>0;b_2>)\\ \{a'_{L1}\,b'_{R2}\,;a'_{R1}\,b'_{L2}\} & (для\ a_1<0;b_2>0)\\ \{a'_{R1}\,b'_{L2}\,;a'_{L1}\,b'_{R2}\} & (для\ a_1>0;b_2<0)\\ \{a'_{R1}\,b'_{R2}\,;a'_{L1}\,b'_{L2}\} & (для\ a_1<0;b_2<0)\end{cases}$$

$$\tilde{a}_2\tilde{b}_1=\begin{cases}\{a'_{L2}\,b'_{L1}\,;a'_{R2}\,b'_{R1}\} & (для\ a_2>0;b1>)\\ \{a'_{L2}\,b'_{R1}\,;a'_{R2}\,b'_{L1}\} & (для\ a_2<0;b_1>0)\\ \{a'_{R2}\,b'_{L1}\,;a'_{L2}\,b'_{R1}\} & (для\ a_2>0;b_1<0)\\ \{a'_{R2}\,b'_{R1}\,;a'_{L2}\,b'_{L1}\} & (для\ a_2<0;b_1<0)\end{cases}$$

$$\tilde{b}_2\tilde{c}_1=\begin{cases}\{b'_{L2}\,c'_{L1}\,;b'_{R2}\,c_{R1}\} & (для\ b_2>0;\ \ c_1>0)\\ \{c'_{R1}\,b'_{L2}\,;b'_{R2}\,c'_{L1}\} & (для\ b_2<0;c_1>0)\\ \{b'_{R2}\,c'_{L1}\,;b'_{L2}\,c'_{R1}\} & (для\ b_2>0;c_1<0)\\ \{b'_{R2}\,c'_{R1}\,;b'_{L2}\,c'_{L1}\} & (для\ b_2<0;c_2<0)\end{cases}$$

$$\tilde{b}_1\tilde{c}_2=\begin{cases}\{b'_{L1}\,c'_{L2}\,;b'_{R1}\,c_{R2}\} & (для\ b_1>0;\ \ c_2>0)\\ \{b'_{L1}\,b'_{R2}\,;b'_{R1}\,c'_{L2}\} & (для\ b_1<0;c_2>0)\\ \{b'_{R1}\,c'_{L2}\,;b'_{L1}\,c'_{R2}\} & (для\ b_1>0;c_2<0)\\ \{b'_{R1}\,c'_{R2}\,;b'_{L1}\,c'_{L2}\} & (для\ b_1<0;c_2<0)\end{cases}\qquad(2.41)$$

$$\tilde{a}_1\tilde{c}_2=\begin{cases}\{a'_{L1}\,c'_{L2}\,;a'_{R1}\,c_{R2}\} & (для\ a_1>0;\ \ c_2>0)\\ \{a'_{L1}\,c'_{R2}\,;a'_{R1}\,c'_{L2}\} & (для\ a_1<0;c_2>0)\\ \{a'_{R1}\,c'_{L2}\,;a'_{L1}\,c'_{R2}\} & (для\ a_1>0;c_2<0)\\ \{a'_{R1}\,c'_{R2}\,;a'_{L1}\,c'_{L2}\} & (для\ a_1<0;c_2<0)\end{cases}$$

$$\tilde{a}_2\tilde{c}_1=\begin{cases}\{a'_{L2}\,c'_{L1};a'_{R2}\,c_{R1}\} & (\textit{для}\;\; a_2>0;\;\; c_1>0)\\ \{a'_{R2}\,c'_{L1};a'_{L2}\,c'_{R1}\} & (\textit{для}\; a_2>0;c_1<0)\\ \{a'_{L2}\,c'_{R1};a'_{R2}\,c'_{L1}\} & (\textit{для}\; a_1<0;c_1>0)\\ \{a'_{R2}\,c'_{R1};a'_{L2}\,c'_{L1}\} & (\textit{для}\;\; a_1<0;c_2<0)\end{cases}$$

При этом

$$\begin{aligned}&\Delta_L=(a'_1\,b'_2)_L-(a'_2\,b'_1)_R;\Delta_R=(a'_1\,b'_2)_R-(a'_2\,b'_2)_L\\&\Delta x'_L=(b'_2\,c'_1)_L-(b'_1\,c'_2)_R;\Delta_{x'R}=(b'_2\,c'_1)_R-(c'_2\,b'_1)_L\\&\Delta_{y'_L}=(a'_1\,c'_2)_L-(a'_2\,c'_1)_R;\Delta_{y'_R}=(a_1c_2)_R-(a_2c_1)_L\end{aligned}\qquad(2.42)$$

$$\left.\begin{aligned}\{x'_L;x'_R\}&=\left\{\frac{\Delta'_{x_L}}{\Delta_R};\frac{\Delta_{x'R}}{\Delta_L}\right\}\\ \{y'_L;y'_R\}&=\left\{\frac{\Delta'_{y_L}}{\Delta_R};\frac{\Delta_{y'R}}{\Delta_L}\right\}\end{aligned}\right\}(\text{для}\;\;\Delta>0;\Delta_x>0;\Delta_y>0)$$

$$\left.\begin{aligned}\{x'_L;x'_R\}&=\left\{\frac{\Delta'_{x_R}}{\Delta_R};\frac{\Delta_{x'L}}{\Delta_L}\right\}\\ \{y'_L;y'_R\}&=\left\{\frac{\Delta'_{y_R}}{\Delta_R};\frac{\Delta_{y'L}}{\Delta_L}\right\}\end{aligned}\right\}(\text{для}\,\Delta<0;\Delta_x>0;\Delta_y>0)\qquad(2.43)$$

$$\left.\begin{aligned}\{x'_L;x'_R\}&=\left\{\frac{\Delta'_{x_L}}{\Delta_L};\frac{\Delta_{xR}}{\Delta_R}\right\}\\ \{y'_L;y'_R\}&=\left\{\frac{\Delta'_{y_L}}{\Delta_R};\frac{\Delta_{yR}}{\Delta_L}\right\}\end{aligned}\right\}(\text{для}\;\;\Delta>0;\Delta_x<0;\Delta_y>0)$$

$$\left.\begin{aligned}\{x'_L;x'_R\}&=\left\{\frac{\Delta_{x_R}}{\Delta_L};\frac{\Delta_{xL}}{\Delta_R}\right\}\\ \{y'_L;y'_R\}&=\left\{\frac{\Delta_{y_R}}{\Delta_R};\frac{\Delta_{y_L}}{\Delta_L}\right\}\end{aligned}\right\}\ (\text{для }\ \Delta<0;\Delta_x<0;\Delta_y>0)$$

$$\left.\begin{aligned}\{x'_L;x'_R\}&=\left\{\frac{\Delta_{x_L}}{\Delta_R};\frac{\Delta_{xR}}{\Delta_L}\right\}\\ \{y'_L;y'_R\}&=\left\{\frac{\Delta_{y_L}}{\Delta_L};\frac{\Delta_{y_R}}{\Delta_R}\right\}\end{aligned}\right\}\ (\text{для }\ \Delta>0;\Delta_x>0;\Delta_y<0)$$

$$\left.\begin{aligned}\{x'_L;x'_R\}&=\left\{\frac{\Delta'_{x_R}}{\Delta_R};\frac{\Delta_{xL}}{\Delta_L}\right\}\\ \{y'_L;y'_R\}&=\left\{\frac{\Delta_{y_R}}{\Delta_L};\frac{\Delta_{y_L}}{\Delta_R}\right\}\end{aligned}\right\}\ (\text{для}\,\Delta<0;\Delta_x>0;\Delta_y<0\ )$$

$$\left.\begin{aligned}\{x'_L;x'_R\}&=\left\{\frac{\Delta_{x_L}}{\Delta_L};\frac{\Delta_{xR}}{\Delta_R}\right\}\\ \{y'_L;y'_R\}&=\left\{\frac{\Delta_{y_L}}{\Delta_L};\frac{\Delta_{y_R}}{\Delta_R}\right\}\end{aligned}\right\}\ (\text{для }\ \Delta>0;\Delta_x<0;\Delta_y<0)$$

$$\left.\begin{aligned}\{x'_L;x'_R\}&=\left\{\frac{\Delta_{x_R}}{\Delta_L};\frac{\Delta_{x'L}}{\Delta_R}\right\}\\ \{y'_L;y'_R\}&=\left\{\frac{\Delta_{y_R}}{\Delta_L};\frac{\Delta_{y_L}}{\Delta_R}\right\}\end{aligned}\right\}\ (\text{для }\ \Delta<0;\Delta_x<0;\Delta_y<0)$$

Для нахождения решения системы (2.39) в виде

$\tilde{x} = \{x; x_L; x_R\}; \tilde{y} = \{y; y_L; y_R\}$

Следует найти решение системы (2.39) с четкими коэффициентами, т.е.

$X = \dfrac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$; $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, а затем найти

$X_L = x - x'_L; x_R = x'_R - x$

Пример 2.8 $\begin{cases} \tilde{3}x + \tilde{2}y = \tilde{14} \\ \tilde{6}x - \tilde{2}y = \tilde{4} \end{cases}$ где

$\tilde{3} = \{3;0,4;0,6\}$; $\tilde{2} = \{2;0,3;0,5\}$; $\tilde{14} = \{14;0,6;0,4\}$

$\tilde{4} = \{4;0,5;0,4\}$; $\tilde{6} = \{6;0,7;0,6\}$

Имеем:

$-\tilde{2} = \{-2;0,5;0,3\} = \{-2,5;-17\}$

$\tilde{a}_1 = \{2,6;3,6\}$; $\tilde{b}_1 = \{1,7;2,5\}; \tilde{c}_1 = \{13,4;14,4\}$

$\tilde{a}_2 = \{5,3;6,6\}$; $\tilde{b}_2 = \{-2,5;-1,7\}$; $\tilde{c}_2 = \{3,5;4,4\}$

$\Delta = \{\Delta_L : \Delta_R\} = \{a'_{R_1} b'_{L_2}; a'_{L_1} b'_{R_2}\} - \{a'_{L_2} b'_{L_1}; a'_{R_2} b'_{R_1}\} =$

$= \{3,6 \cdot (-2,5); 2,6 \cdot (-1,7)\} - \{5,3 \cdot 1,7; 6,6; 2,5\} = \{-2,5; -13,43\}$

$\Delta_x = \{\Delta'_{x_L}; \Delta'_R\} =$

$= \{14,4 \cdot (-2,5; 13,4 \cdot (-1,7))\} - \{1,7 \cdot 3,5; 2,5 \cdot 4,4\} =$

$= \{-4,7; -28,73\}$

$\Delta_y = \{\Delta_{y'_L}; \Delta_{y'_R}\} = \{2,6 \cdot 3,5; 3,6 \cdot 4,4\} - \{5,3 \cdot 13,4; 6,6 \cdot 14,4\} =$

$= \{-35,94; -55,62\}$

$$\widetilde{X} = \{X'_L ; X'_R\} = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\{-4{,}7;-28{,}73\}}{\{-25{,}5;-13{,}43\}} = \{1{,}27;3{,}5\}$$

$$\widetilde{Y} = \{y'_L ; y'_R\} = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\{-85{,}94;-55{,}62\}}{-25{,}5;-13{,}43} = \{2{,}19;6{,}4\}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow x = 2; y = 4$$

$$\widetilde{x}\{2;0{,}73;1{,}5\}; \quad \widetilde{y} = \{4;1{,}81;2{,}4\}$$

Графический способ решения нечеткой системы уравнений показана на рисунке 2.1

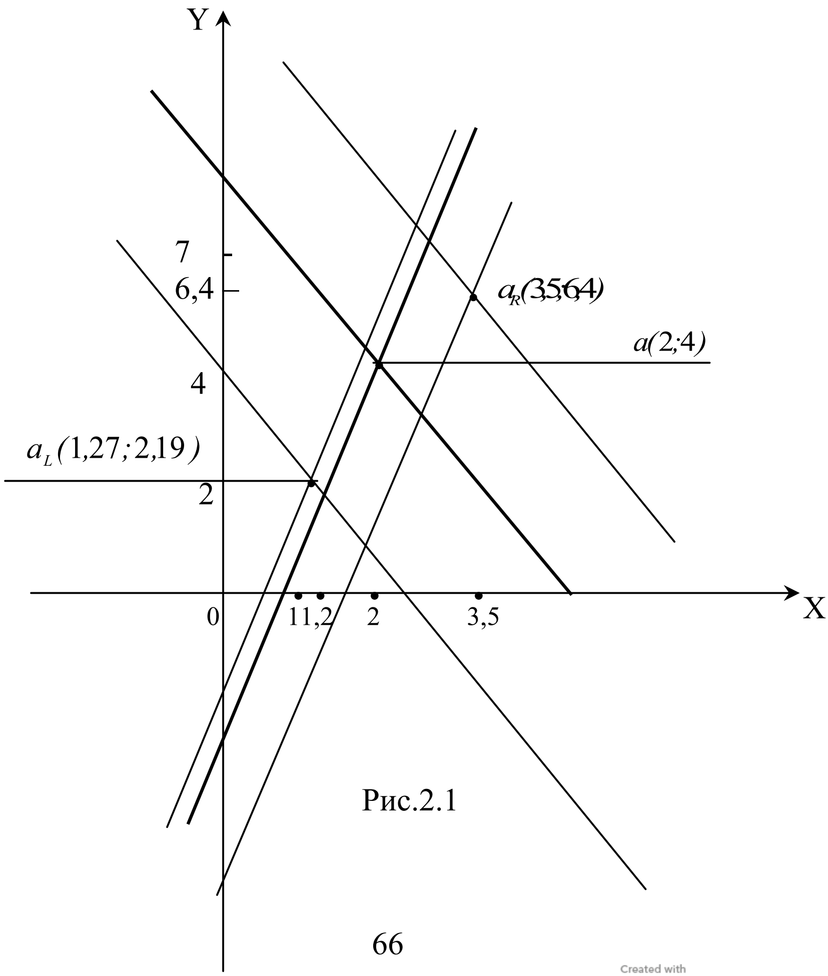


Рис.2.1

II. Решение системы трех уравнений с тремя неизвестными методом Гаусса.

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 = \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 = \tilde{b}_2 \\ \tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 + \tilde{a}_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \end{cases} \qquad (2.44)$$

где $\tilde{a}_{ij} = \{a_{ij}; a_{L_{ij}}; a_{R_{ij}}\} = \{a'_{L_{ij}}; a'_{R_{ij}}\}$

$\tilde{b}_i = \{b_i; b_{L_{ij}}; b_{R_{ij}}\} = \{b'_{L_i}; b'_{R_i}\}$

Решение: Для определения решения системы (2.44) расширенная матрица имеет вид:

$\tilde{B} = \{B_L; B_R\}$, где

$$B_R = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{R11} & a'_{R12} & a'_{R13} & b_{R1} \\ a'_{R21} & a'_{R22} & a'_{R23} & b_{R2} \\ a'_{R31} & a'_{R32} & a'_{R33} & b_{R3} \end{array}\right); \; B_L = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{L11} & a'_{L12} & a_{L13} & b_{R1} \\ a'_{L21} & a'_{L22} & a_{L23} & b_{R2} \\ a'_{L31} & a'_{L32} & a_{L33} & b_{R3} \end{array}\right) \qquad (2.45)$$

Применив линейное преобразование, приводим B_L и B_R к виду

$$B'_R = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{R11} & a'_{R12} & a'_{R13} & b'_{R1} \\ 0 & \tilde{a}'_{R22} & \tilde{a}'_{R23} & \tilde{b}'_{R2} \\ 0 & 0 & \tilde{a}'_{R33} & \tilde{b}'_{R3} \end{array}\right); \; B_L = \left(\begin{array}{ccc|c} a'_{L11} & a'_{L12} & a'_{L13} & b'_{R1} \\ 0 & \tilde{a}'_{L22} & \tilde{a}'_{L23} & \tilde{b}'_{R2} \\ 0 & 0 & \tilde{a}'_{L33} & \tilde{b}'_{R3} \end{array}\right) \qquad (2.46)$$

Выписав систему уравнений соответствующей полученной матрицы и найдем:

$\tilde{X}_j\{x'_{L_j}\ x'_{R_j}\}\qquad (j=1,2,3)$

Пример 2.9

$$\begin{cases}\tilde{3}x+\tilde{2}y+\tilde{z}=\tilde{10}\\ \tilde{2}x+\tilde{3}y+\tilde{2}z=\tilde{14}\\ \tilde{4}x+y+\tilde{2}z=\tilde{12}\end{cases}$$

$\tilde{2}=\{2;0,6;0,8\}$; $\tilde{3}=\{3;0,7;0,8\}$

где $\tilde{4}=\{4;0,4;0,3\}$; $\tilde{10}=\{10;3,1;5,9\}$

$\tilde{12}=\{12;3,7;5,9\}$ $\tilde{14}=\{14;5,1\};9,1$

Решим систему нечетких уравнений двумя способами:

1) Метод Гаусса

$$B_R=\left(\begin{array}{ccc|c}2,3&1,4&1&6,9\\1,4&2,3&1,4&8,9\\3,6&1&1,4&8,3\end{array}\right);\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1,4&2,3&1,4&8,9\\0&1,45&0,79&4,66\\0&1,91&0,85&5,66\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1,4&2,3&1,4&8,9\\0&1,45&0,79&4,66\\0&0&0,14&0,36\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}1,4x+2,3y+1,4z=8,9\\1,45y+0,79z=4,66\\0,14z=0,36\end{cases}\begin{cases}x_L=0,84\\y_L=1,8\\z_L=2,64\end{cases}$$

$$B_R=\left(\begin{array}{ccc|c}3{,}8 & 2{,}8 & 1 & 15{,}9\\ 2{,}8 & 3{,}8 & 2{,}8 & 22{,}9\\ 4{,}3 & 1 & 2{,}8 & 17{,}8\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2{,}8 & 3{,}8 & 2{,}8 & 22{,}9\\ 0 & 1{,}74 & 2{,}06 & 11{,}18\\ 0 & 3{,}15 & 2{,}98 & 11{,}31\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2{,}8 & 3{,}8 & 2{,}8 & 22{,}9\\ 2{,}8 & 1{,}74 & 2{,}06 & 11{,}18\\ 4{,}3 & 0 & 1{,}52 & 4{,}93\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}2{,}8x+3{,}8y+2{,}8z=22{,}9\\ 1{,}74y+2{,}06z=11{,}18\\ 1{,}52z=4{,}93\end{cases}\begin{cases}x_R=1{,}43\\ y_R=2{,}58\\ z_R=3{,}24\end{cases}$$

Следовательно

$\tilde{x}=\{0{,}84;1{,}43\}$; $\tilde{y}=\{1{,}8;2{,}58\}$; $\tilde{z}=\{2{,}64;3{,}24\}$

Для этой же системы уравнений с четкими коэффициентами имеем:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 2 & 1 & 10\\ 2 & 3 & 2 & 14\\ 4 & 1 & 2, & 12\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 2 & 14\\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{22}{3}\\ 0 & 2\frac{1}{2} & 1 & 8\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 2 & 14\\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3}\\ 4{,}3 & 0 & \frac{2}{3} & 2\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}2x+3y+2z=14\\ \frac{5}{3}y+\frac{4}{3}z=\frac{22}{3}\\ \frac{2}{3}z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\\ z=3\end{cases}$$

Тогда в силу понятия растяжения нечеткого числа, решение нечеткой системы примет вид:

$\tilde{x}=\{1;0{,}16;0{,}43\}$; $\tilde{y}=\{2;0{,}2;0{,}58\}$; $\tilde{z}=\{3;0{,}36;0{,}2\}$

2) Метод Крамера

$$\Delta'_L = \begin{vmatrix} 2,3 & 1,4 & 1 \\ 1,4 & 2,3 & 1,4 \\ 3,6 & 1 & 1,4 \end{vmatrix} = 1,618; \ \Delta'_R = \begin{vmatrix} 3,8 & 2,8 & 1 \\ 2,8 & 3,8 & 2,8 \\ 4,3 & 1 & 2,8 \end{vmatrix} = 28,01$$

$$\Delta'_{x_L} = \begin{vmatrix} 6,9 & 1,4 & 1 \\ 8,9 & 2,3 & 1,4 \\ 8,3 & 1 & 1,4 \end{vmatrix} = 1,29; \ \Delta'_{x_R} = \begin{vmatrix} 15,9 & 2,8 & 1 \\ 22,9 & 3,8 & 2,8 \\ 17,8 & 1 & 2,8 \end{vmatrix} = 39,932$$

$$\Delta'_{y_L} = \begin{vmatrix} 2,3 & 6,9 & 1 \\ 1,4 & 8,9 & 1,4 \\ 3,6 & 8,3 & 1,4 \end{vmatrix} = 2,42; \ \Delta'_{y_R} = \begin{vmatrix} 3,8 & 15,9 & 1 \\ 2,8 & 22,9 & 2,8 \\ 4,3 & 17,8 & 2,8 \end{vmatrix} = 72,414$$

$$\Delta'_{z_L} = \begin{vmatrix} 2,3 & 1,4 & 6,9 \\ 1,4 & 2,3 & 8,9 \\ 3,6 & 1 & 8,32 \end{vmatrix} = 3,41; \ \Delta'_{z_R} = \begin{vmatrix} 3,8 & 2,8 & 15,9 \\ 2,8 & 3,8 & 22,9 \\ 4,3 & 1 & 17,8 \end{vmatrix} = 90,89$$

$$x_L = \frac{1,29}{1,68} = 0,84; \ x_R = \frac{39,932}{28,01} = 1,43;$$

$$y_L = \frac{2,42}{1,68} = 1,8; \ y_R = \frac{72,414}{28,01} = 2,58$$

$$z_L = \frac{3,41}{1,68} = 2,64; \ z_R = \frac{90,89}{28,01} = 3,24$$

$$\tilde{x} = \{0,84;1,43\} = \{1;0,16;0,43\}; \tilde{y} = \{1,8;2,58\} = \{2,02;0,58\}$$

$$\tilde{z} = \{2,64;3,24\} = \{3;0,36;0,24\}$$

Следует отметить, что иллюстрируемые выше методы решения систем трех нечетких линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными аналогичным образом применимы и к системе n-го числа нечетких линейных алгебраических уравнений с "n"-неизвестными, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ji} x_i = \widetilde{c}_j; \qquad j = \overrightarrow{1,n} \qquad (2.47)$$

III Условие существования решения системы нечетких линейных алгебраических уравнений.

Из правила Крамера следует, что для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений с четкими коэффициентами имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы главный определитель этой системы (определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных) был отличен от нуля. Поэтому для системы линейных алгебраических уравнений с нечеткими коэффициентами условием существования единственного решения должно быть выполнение условия отличия от нуля главного определителя $\widetilde{L}(\alpha)$, т.е.

$$\widetilde{\Delta}(\alpha) = \{\Delta'_L(\alpha); \Delta'_R(\alpha)\} = \{\Delta; \Delta_L(\alpha); \Delta_R(\alpha)\} = 0 \qquad (2.48)$$

для любого $\alpha \in (0;1]$.

Докажем, что условие (2.48) может быть выполнено тогда, когда $\Delta, \Delta'_L(\alpha)$ и $\Delta'_R(\alpha)$ будут одинакового знака для любого $\alpha \in [0;1]$.

Пусть это не так, т.е. пусть

$$\Delta'_L(\alpha_1) < 0, \text{ а } \Delta = \Delta'_L(1) > 0, \text{ где } \alpha_1 \in (0;1) \qquad (2.49)$$

В силу понятия нечеткого числа (LR)-типа множество значений $\Delta'_L(\alpha)$ образует выпуклое множество значений таких, что $\Delta'_L(\alpha_1) < \Delta'_L(\alpha_2)$ при $\alpha_1 < \alpha_2$ для любых

$\alpha_1, \alpha_2 \in (0;1)$. С другой стороны, так как каждому значению

$\alpha \in (0;1]$ соответствует единственное значение $\Delta'_L(\alpha)$, то $\Delta'_L(\alpha)$ является функцией от α причем непрерывной а(0;1]. Поэтому, в силу теоремы о непрерывных функциях, если $\Delta'_L(\alpha)$ непрерывна на $(\alpha_1;1] \subset (0;1]$ и $\Delta'_L(\alpha_1) < 0$; $\Delta_L(1) = \Delta > 0$, то существует хотя бы одно значение $\alpha_2 \in (0;1]$ такое, что $\Delta'_L(\alpha_2) = 0$. Это противоречит выполнению условия (2.48). Аналогичным образом можно провести доказательство теоремы и для случая, когда $\Delta'_R(\alpha)$ для любого $\alpha \in (0;1]$ имеет противоположный знак с $\Delta'_R(1) = \Delta$.

Из результата доказанной теоремы следует следующее условие существования единственного решения системы линейных нечетких уравнений. Для того, чтобы система нечетких "n" линейных алгебраических уравнений имела единственное нечеткое решение необходимо и достаточно, чтобы главный определитель этой системы как с четкими коэффициентами, так и с нечеткими коэффициентами были отличны от нуля и для любой степени нечеткости $\alpha \in (0;1]$, $\Delta'_L(\alpha)$ и $\Delta'_R(\alpha)$ имели одинаковый знак с Δ, где $\Delta'_L(\alpha)$ и $\Delta'_R(\alpha)$ -соответственно главные определители заданной системы с нечеткими коэффициентами со значениями из левого и правого растяжения нечетких коэффициентов, а Δ-главный определитель данной системы с четкими коэффициентами.

Следует отметить, что если при вычислении главных определителей Δ, $\Delta'_L(\alpha)$ и $\Delta'_R(\alpha)$ для любого $\alpha \in (0;1]$ они окажутся отрицательными, то учитывая свойство определителей (с помощью одной транспозиции, что соответствует замене местами двух соседних уравнений системы) их можно обратить в положительные величины с теми же абсолютными величинами. Следует отметить, что при этом и вспомогательные определители меняют свои знаки на противоположные, что не влияет на значение нечетких решений данной нечеткой системы уравнений. Кроме того, если $\widetilde{X}_i = \{X'_{L_i}; X'_{R_i}\} (i = 1; n)$ есть нечеткое решение системы нечетких линейных алгебраических уравнений (2.47), то для любого $(i = \overrightarrow{1, n})$ должно выплняться услови

$$X'_{L_i} < X_i < X'_{R_i} \quad (i = \overrightarrow{1, n}) \tag{2.50}$$

где $X_i (i = \overrightarrow{1, n})$-четкое решение заданной системы уравнений.

Поэтому, если при решении системы уравнений (2.47) методом Крамера будут выполнены условия:

$$\Delta'_L < \Delta < \Delta'_R \; ; \; \Delta'_{X_{L_i}} < \Delta_{x_i} < \Delta_{R_i} \tag{2.51}$$

и при определении $X_i (i = \overrightarrow{1, n})$ в виде

$$\widetilde{X}_i = \{X'_{L_i}; \Delta'_{X_{R_i}}; (i = \overrightarrow{1, n})\} = \left\{ \frac{\Delta_{X_{L_i}}}{\Delta'_{L_i}}; \frac{\Delta'_{X_{R_i}}}{\Delta'_{L_i}} \right\} \tag{2.52}$$

окажется, что хотя бы для одного значения $i \in (1; n)$ $X'_{L_i} > X'_{R_i}$, то $\widetilde{X}_i$ следует искать в виде

$$\widetilde{X}_i = \{X'_{L_i}; \Delta'_{X_{R_i}}\} = \left\{ \frac{\Delta_{X_{L_i}}}{\Delta'_{R_i}}; \frac{\Delta'_{R_i}}{\Delta_{L_i}} \right\} \tag{2.53}$$

Если же при вычислении $\widetilde{X}_i$ по формулам (2.52) условия (2.50) выполняется, нет смысла применять формулу (2.53), така как при этом опять-таки будет выполнено условие (2.50) с той лишь разницей, что найденные нечеткие решения будут иметь различные носители, пересечение которых не пусто и представляет собой интервал, содержащий четкое решение заданной системы уравнений.

Проиллюстрируем этот факт на данных примера 2.9

Така как

$\Delta = 10; \quad \Delta'_L = 1{,}618; \quad \Delta'_R = 28{,}01;$

$\Delta_x = 10; \quad \Delta_{X_L} = 1{,}29; \quad \Delta'_{X_R} = 39{,}932;$

$\Delta_y = 20; \quad \Delta'_{y_L} = 2{,}42; \quad \Delta'_{y_R} = 72{,}414$

$\Delta_z = 30; \quad \Delta'_{L_i} = 3{,}41; \quad \Delta'_{Z_R} = 90{,}89$

На основании (2.52)

$\tilde{X}_1 = \{0{,}84;1{,}43\}; \tilde{y}_1 = \{1{,}8;2{,}8\}; \tilde{z}_1 = \{2{,}64;3{,}24\}$

На основании (2.53)

$$\tilde{X}_2 = \left\{\frac{1{,}29}{28{,}01}; \frac{39{,}932}{1{,}618}\right\} = \{0{,}046;24{,}68\}$$

$$\tilde{Y}_2 = \left\{\frac{2{,}42}{28{,}01}; \frac{72{,}414}{1{,}618}\right\} = \{0{,}086;44{,}755\}$$

$$\tilde{Z}_2 = \left\{\frac{3{,}41}{28{,}01}; \frac{90{,}89}{1{,}618}\right\} = \{0{,}1218;56{,}18\}$$

Отсюда следует, что $\tilde{X}_1 \subset \tilde{X}_2; \tilde{y}_1 \subset \tilde{y}_2$ и $\tilde{z}_1 \subset \tilde{z}_2$, т.е. носитель нечеткого решения ($\tilde{x}_1; y_1; \tilde{z}_1$) входит в носитель решения ($\tilde{x}_2; \tilde{y}_2; z_2$). Наряду с этим следует отметить, что с помощью (2.52) можно найти нечеткие решения линейных алгебраических уравнений с нечеткими коэффициентами L-типа, R-типа и (LR)-типа.

ГЛАВА III. НЕЧЁТКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Нечёткая геометрия, так же как и чёткая геометрия – это наука о свойствах геометрических фигур. Разница лишь в том, что здесь объектами изучения являются нечёткие геометрические фигуры.

§1. Нечёткие точки

В геометрии (четкая) точка представляется как не имеющая ни длину, ни ширину, ни толщину. Как элемент множества, точка наделена некоторой структурой. Природа точки может быть самой разнообразной. Так под точкой n-мерного евклидова пространства понимается упорядоченное множество n-чисел.

Следуя этому классическому понятию четкой точки, введем следующее определение.

*Определение 3.1.*Упорядоченное множество n-чисел, хотя бы одно из которых есть нечеткое число, будем называть нечеткой точкой n-мерного евклидова пространства и обозначим:

$$\widetilde{N} = \left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n\right), \;\; \widetilde{N} \in E_n \tag{3.1}$$

где E_n - n-мерное евклидово пространство, $\widetilde{x}_i$ - нечеткие числа (координаты точки $\widetilde{N}$), ($i = \overline{1,n}$).

Отметим, что нечеткие числа $\widetilde{x}_i$ могут иметь различные степени четкости. И если $\mu_{x_i} = \alpha_i$, $x_i \in X_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$, а $\widetilde{N}$ - нечеткая точка α-уровня, то

$$\alpha = min\{\alpha_i\} \tag{3.2}$$

Учитывая определение носителя нечеткого числа и определения нечеткой точки в n-мерном пространстве, введем следующие понятия носителя нечеткой точки.

Определение 3.2. Носителем нечеткой точки $\widetilde{N}$ на прямой (0;*x*) будем называть выпуклое подмножество (интервал) этой прямой, содержащую четкую точку и являющейся растяжение ее носителя.

На основании определения 11, можно ввести следующее.

Определение 3.3. Нечеткой точкой на прямой (0;*x*) будем называть точку $\widetilde{N}$, координата которой есть нечеткое число.

Из определений нечеткого числа и нечеткой точки следует, что на прямой (0;*x*) для одной функции принадлежности существуют две нечеткие точки четкости $\alpha \in (0;1)$ уровня $N_L(\alpha)$ и $N_R(\alpha)$.

На рисунке 2 *M*- четкая точка, M_L и M_R нечеткие точки некоторого уровня слева и справа соответственно, m_L и m_R – соответственно, левое и правое растяжения носителя нечеткой точки,

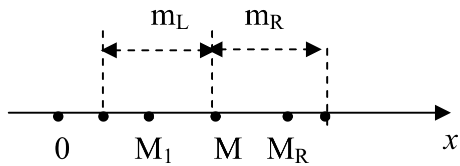


Рис.3.1

$S_M = (M - m_L; M + m_L)$ - носитель нечетких точек на оси (0;*x*).

*Определение 3.4.*Носителем нечеткой точки на плоскости будем называть выпуклую односвязную область, этой плоскости, содержащую носитель четкой точки, расширением которой является эта область. Если $\widetilde{M} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})$, то

$$S_M = (S_x \times S_y) \tag{3.3}$$

где S_x и S_y - носители соответственно нечетких чисел $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$.

Знак умножения (×) означает Декартово произведение.

Отметим, что каждая из нечетких чисел (как координата нечеткой точки) вообще говоря, может иметь различные растяжения носителей и функции принадлежности. И при этом еще каждая координата нечеткой точки (как нечеткое число) может иметь свой уровень четкости.

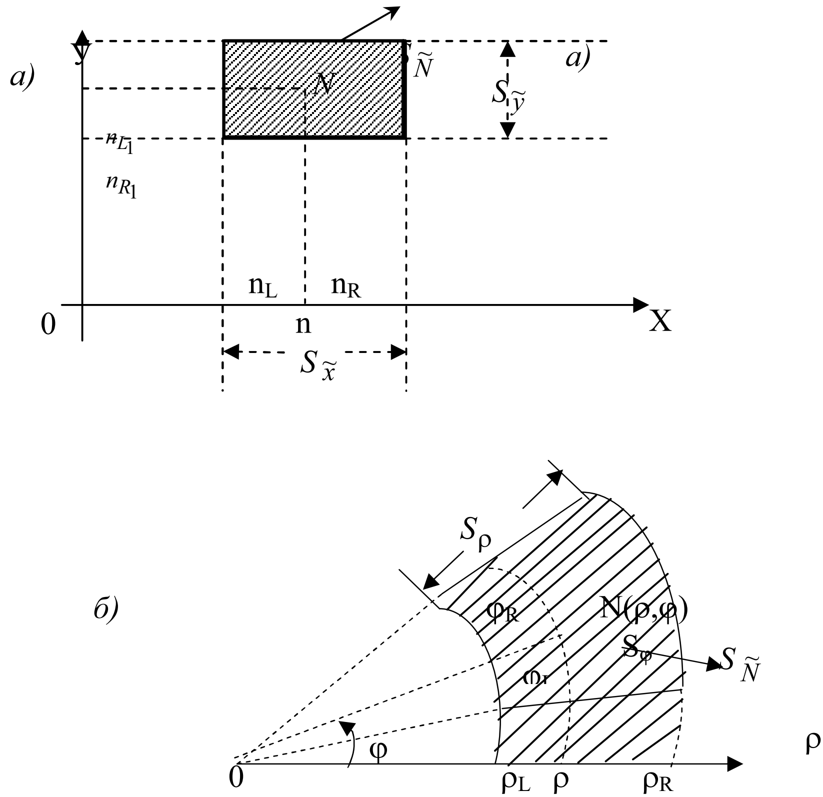


Рис.3.2

На рис.3.а. – заштрихованная область есть носитель нечеткой точки $\tilde{N}$, $S_{\tilde{x}}$ и $S_{\tilde{y}}$ - носители координат нечеткой точки в прямоугольной Декардовой системе координат; n_L, n_R - левое и правое растяжения абсциссы, n_{L_1}, n_{R_1} - левое и правое растяжения ординаты, нечеткой точки $\tilde{N}$, $N(n;n_1)$- четкая точка. На рис.

3,б. – заштрихованная область есть носитель нечеткой точки $\widetilde{N}$ в полярной системе координат; $N(\rho, \varphi)$ - четкая точка; S_ρ и S_φ - носители координат нечеткой точки в полярной системе координат; φ_L, φ_R – левое и правое угловое растяжения ρ_L, ρ_R - левое и правое растяжения по радиусу.

Пример 3.1. Найти координаты нечетких точек $\widetilde{A}_1(3_L;5_R)$ и $\widetilde{A}_2(3_R;5_L)$четкости α=0,9 с функциями принадлежности $\mu_x = \dfrac{1}{1+|x|^3}$; $\mu_y = \dfrac{1}{1+|y|^4}$, если растяжение по x-$\sigma_x=2$; по y-$\sigma_x=3$.

Исходя из

$$\alpha = \mu_{\widetilde{A}}(x) = \left\{ \frac{1}{1+\left|\dfrac{a-x_L}{\sigma}\right|^k} \frac{1}{1+\left|\dfrac{x_R-a}{\sigma}\right|^k} \right\}$$

где σ - растяжение носителя нечеткого числа $\widetilde{A}$, a - четкое значение числа A, имеем:

1) для точки $\widetilde{A}$

$$\left.\begin{aligned} &0{,}9 = \frac{1}{1+\left(\dfrac{3-3_L}{2}\right)^3} \Rightarrow 3_L(0{,}9) = 3 - 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 2{,}04 \\ &0{,}9 = \frac{1}{1\cdot\left(\dfrac{5_R-5}{3}\right)^4} \Rightarrow 5_R(0{,}9) = 5 + 3\sqrt[4]{\frac{1}{9}} = 6{,}73 \end{aligned}\right\} \widetilde{A}_1(2{,}04; 6{,}73)$$

2) для точки $\widetilde{A}_2$

$$\left.\begin{aligned} 0{,}9 &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{3_R-3}{2}\right)^3} \Rightarrow 3_R(0{,}9) = 3 + 2\sqrt[3]{\frac{1}{9}} = 3{,}96 \\ 0{,}9 &= \frac{1}{1\cdot\left(\dfrac{5-5_L}{3}\right)^4} \Rightarrow 5_L(0{,}9) = 5 + 3\sqrt[4]{\frac{1}{9}} = 3{,}27 \end{aligned}\right\} \widetilde{A}_2(3{,}96;3{,}27)$$

Результаты приведены на рис.3.3

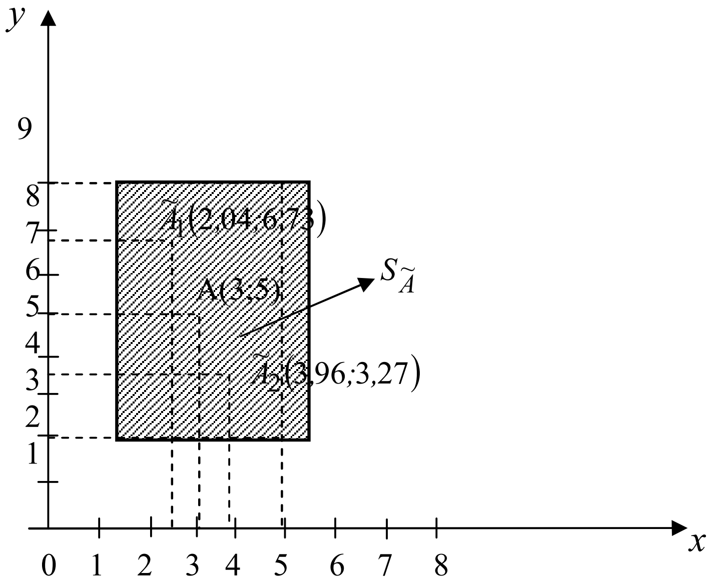


Рис.3.3

Определение 3.5. Носителем нечеткой точки в трехмерном пространстве будем называть правильную область трехмерного пространства, содержащую носитель четкой точки, расширением которой является эта область. Если $\widetilde{M}(\widetilde{x};y;\widetilde{z})$ - есть нечеткая точка, то

$$S_{\widetilde{M}} = \left(S_x \times S_y \times S_z\right) \qquad (3.4)$$

т.е. носитель нечеткой точки есть Декартово произведение носителей ее координат.

В прямоугольной Декартовой системе координат в трехмерном пространстве носителем нечеткой точки является прямая четырехмерная призма; в сферических координатах сектор полого шара; в цилиндрических координатах – сектор полого цилиндра.

Отметим, что если одна из координат нечеткой точки в трехмерном пространстве есть четкое число, то ее носитель обращается в плоскую область, принадлежащую плоскости, перпендикулярной той координатной оси, которая соответствует четкой координате нечеткой точки (в которой эта плоскость пересекается с координатной осью).

§2. Нечёткие линии и нечёткие поверхности

Назвав линией след, сохраняемый за собой перемещаемый телом, становится ясно, что, как и след, она может быть чёткой и нечёткой.

В классической математике порядке различных линий и поверхностей определяются порядком уравнений, которыми они описываются.

Одним из основных понятий геометрии, косвенное определение которым даются через аксиомы, геометрии, есть прямая и плоскость, которые также являются соответственно линией и поверхностью первого порядка.

I. Нечёткая прямая на плоскости

В классической математике вводится следующее понятие прямой на плоскости:

Определение 3.6. Прямой евклидовой плоскости будем называть геометрическое место точек плоскости, декартовые или афинные координаты которых удовлетворяют уравнению

$$ax+by+c=0 \tag{3.5}$$

где *a, b, c* четкие числа и не равны нулю одновременно.

Сравнивая понятия четкой и нечеткой точек, примем следующее определение нечеткой прямой на плоскости.

Определение 3.7. Нечеткой прямой евклидовой плоскости называется геометрическое место нечетких точек, декартовые или афинные координаты которых удовлетворяют нечеткому уравнению:

$$\widetilde{a}x+\widetilde{b}y+\widetilde{c}=0 \tag{3.6}$$

где $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ не равны нулю одновременно.

Так же, как и для четкой прямой, для нечеткой прямой справедливы свойства:

1. Какова бы ни была нечеткая прямая, существуют нечёткие точки, принадлежащие ей.

2. Через любые две нечёткие точки можно провести нечёткую прямую, и только одну.

3. Из трёх нечётких точек нечёткой прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Учитывая определение носителя нечёткой точки и свойства 2, можно принять следующее определение носителя нечёткой прямой.

Определение 3.8. Носителем нечёткой прямой на плоскости будем называть выпуклую односвязную область этой плоскости, содержащую носитель чёткой прямой (саму чёткую прямую) и носитель всех нечётких точек этой прямой. т.е., если нечёткая прямая $\widetilde{\ell}$ на плоскости *(XOY)* описывается уравнением (3.6), то

$$\sup por\,\widetilde{l}=S_{\widetilde{l}}=\left\{\left(S_x\times S_y\right);(x;y)/\widetilde{a}x+\widetilde{b}y+\widetilde{c}=0\right\} \tag{3.7}$$

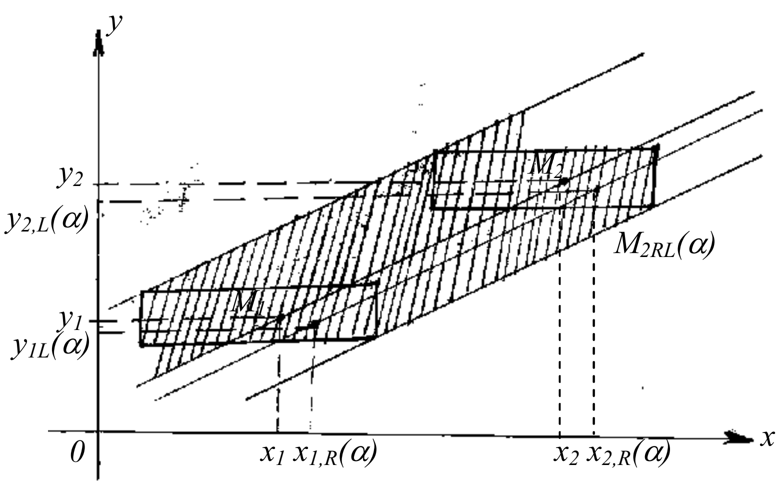
Следует отметить, что вид носителя нечёткой прямой зависит от вида нечёткого уравнения (3.6), т.е.

1) если $\tilde{\ell}: \quad ax + by + \tilde{c} = 0$, (3.8)

то её носитель представляет собой полосу плоскости *(XOY)*, отсекающую на оси *(OY)* отрезок, равный носителю точки $\tilde{M}\left(0; -\frac{\tilde{c}}{b}\right)$ с углом наклона $\angle\varphi = arctg\left(-\frac{a}{b}\right)$ рис. 3.4.*а*)

2) если $\tilde{\ell}: \quad \tilde{a}x + \tilde{b}y + \tilde{c} = 0$, либо только один из коэффициентов a или b есть нечёткие числа, то носитель этой нечёткой прямой есть плоская область, принадлежащая *(XOY)*, состоящая из двух секторов, образованных пересечением нечётких прямых $l_L(\alpha = 0)$ и $l_R(\alpha = 0)$.

а)



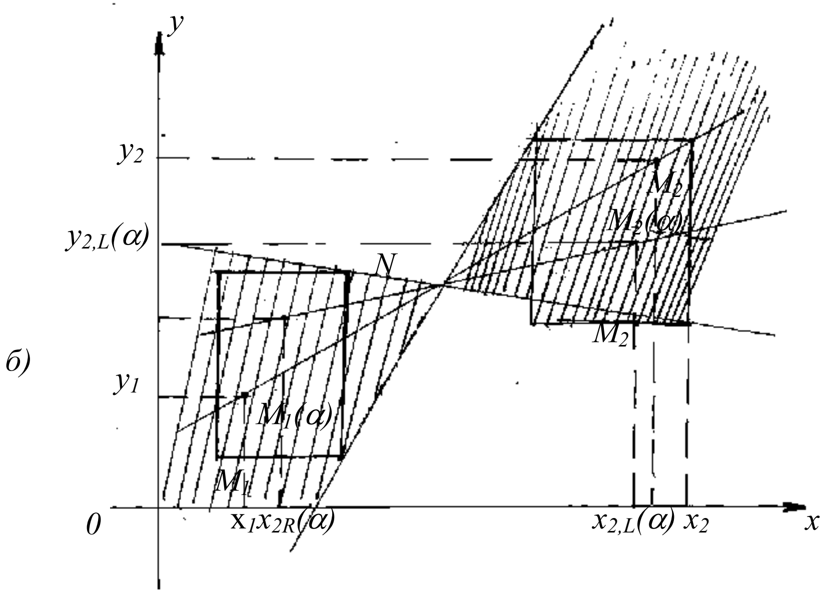


Рис.3.4

Из определения нечёткой прямой свойства 2 следует следующее определение.

Определение 3.9. Нечёткой прямой α-уровня $L(R)$-типа на евклидовой плоскости называется прямая, проходящая через любые две нечёткие точки $L(R)$-типа чёткости α-уровня, аффинные или декартовые координаты которых удовлетворяют уравнению (3.6).

Определение 3.10. Нечётким отрезком чёткой (нечёткой) прямой называется отрезок этой прямой, заключённый между двумя точками этой прямой, хотя бы одна из которых есть нечёткая точка.

Пример 3.2. построить носитель нечёткой прямой $\tilde{3}x + 4\tilde{y} = \tilde{10}$, если

$\tilde{10} = \{10; 0,6; 0,8\} : \tilde{3} = \{3; 0,6; 0,8\}; \tilde{4} = \{4; 0,6; 0,8\}$

Имеем: *l:3x+4y=10*

$$\begin{cases} \tilde{l}_R(0) : 3{,}8x + 4{,}8y = 10{,}8 \\ \tilde{l}_L(0) = 2{,}4x + 3{,}4y = 9{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = -6 \\ y = 7 \end{Bmatrix} \Rightarrow N$$

Таким образом, $N(-6;7)$ есть точка пересечения прямых $l(1)$; $l_L(0)$ и $l_R(0)$.

Для построения носителя заданной нечёткой прямой достаточно найти любые вторые точки этих прямых. Имеем:

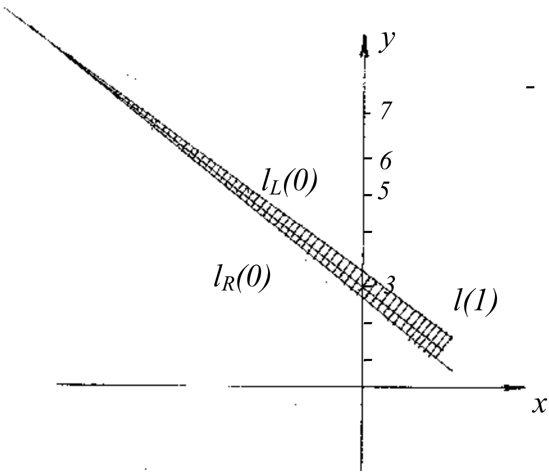


Рис.3.5

Пример 3.3. Построить носитель нечёткой прямой $2x - 4y = \tilde{9}$, где $\tilde{9} = \{9;1,5;2\}$

Имеем:

$$y = \frac{1}{2}x - \widetilde{2{,}25}$$

$$l : y = \frac{1}{2}x - \widetilde{2{,}25}$$

$$l_R(0) : y = \frac{1}{2}x - 1{,}875$$

$$l_l(0) : y = \frac{1}{2}x - 2{,}75$$

Носитель заданной нечёткой прямой есть полоса с углом наклона в $\pi/6$ и отсекающая на оси *(OY)* отрезок длиной 0,875

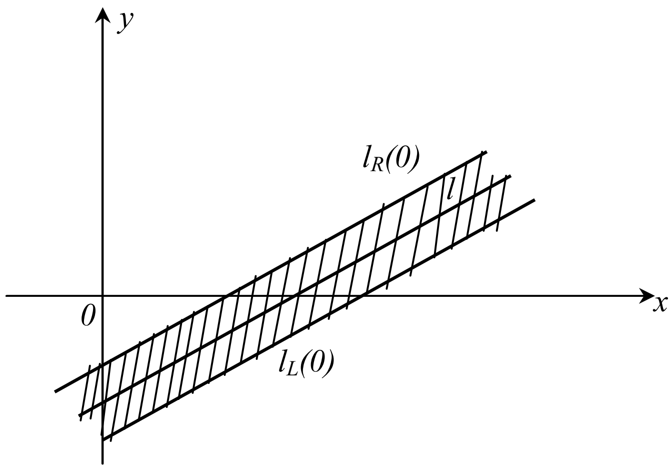


Рис.3.6

II. Нечёткие плоскости

Из курса аналитической геометрии [37] известно, что плоскость (также, как и прямая линия) описывается линейным уравнением. В частности, общим уравнением плоскости в трёхмерном пространстве является уравнение вида

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{3.9}$$

Где *A, B* и *C* одновременно не равны нулю. Аналогично приведённому определению нечёткой прямой на плоскости введём следующее понятие нечёткой плоскости.

Определение 3.11. Геометрическое место точек трёхмерного пространства, координаты которых удовлетворяют нечёткому линейному алгебраическому уравнению

$$\widetilde{A}x+\widetilde{B}y+\widetilde{C}z+\widetilde{D}=0 \tag{3.10}$$

(где $\widetilde{A},\widetilde{B}$ и $\widetilde{C}$ одновременно не равны нулю) будем называть нечёткой плоскостью. Так же как и для нечётких прямых на плоскости можно рассмотреть различные частные случаи нечётких плоскостей в пространстве и построить их носители.

III. Нечёткие прямые в трёхмерном пространстве

Так же как и для случая нечётких прямых в пространстве, нечёткие прямые в трёхмерном пространстве могут быть определены: а) как место пересечения двух плоскостей в пространстве (хотя бы одна из которых есть нечёткая плоскость); б) Проходящая через точку (чёткую, либо нечёткую) в заданном направлении (который определяется направляющим вектором чётким, либо нечётким). Причём и точка, через которую проходит нечёткая прямая, и направляющий вектор не являются одновременно чёткими; с) проходящая через две точки, хотя бы одна из которых есть нечёткая точка. При этом уравнения этих нечётких прямых имеют вид:

$$a)\quad \begin{cases}\widetilde{A}_1x+\widetilde{B}_1y+\widetilde{C}_1z+\widetilde{D}_1=0\\ \widetilde{A}_2x+\widetilde{B}_2y+\widetilde{C}_2z+\widetilde{D}_2=0\end{cases} \tag{3.11}$$

$$b)\ \frac{x-\tilde{a}}{\tilde{m}}=\frac{y-\tilde{b}}{\tilde{n}}=\frac{z-\tilde{c}}{\tilde{p}} \tag{3.12}$$

где $\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{m},\tilde{n}$ и $\tilde{p}$ одновременно не являются чёткими числами.

$$c)\ \frac{x-\tilde{x}_1}{\tilde{x}_2-\tilde{x}_1}=\frac{y-\tilde{y}_1}{\tilde{y}_2-\tilde{y}_1}=\frac{z-\tilde{z}_1}{\tilde{z}_2-\tilde{z}_1} \tag{3.13}$$

где $\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\ \tilde{y}_1,\tilde{y}_2$ и $\tilde{y}_3$ одновременно не являются чёткими числами.

Учитывая понятие носителя нечёткой точки в трёхмерной Декартовой, сферической и цилиндрической систем координат, легко показать (на конкретном примере), что:

- если все коэффициенты уравнений, описывающих нечёткую прямую в трёхмерном пространстве, есть нечёткие числа, то носитель нечёткой прямой: а) в Декартовой системе координат представляет собой неограниченную четырёхугольную призму; в) в сферической системе координат – неограниченное круговое цилиндрическое тело, одно из сечений которого имеет вид области, показанной на рисунке (3.2, б.)

IV. Нечёткие линии второго порядка

Как известно [3] к линиям второго порядка на плоскости относятся линии, описываемые уравнением:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{3.14}$$

где A, B и С одновременно не равны нулю. В зависимости от значений A, B и C уравнение (3.14) описывает одну из плоских линий: гипербола, парабола, эллипс, либо пару параллельных прямых.

Определение 3.12. Нечёткой линией второго порядка на плоскости (XOY) будем называть геометрическое место точек этой плоскости, афинные или декартовые координаты которых удовлетворяют уравнению (3.), хотя бы один из коэффициентов, либо свободный член которого есть нечёткие числа.

1. Нечёткий эллипс описывается уравнением вида:
2.

$$\frac{x^2}{\widetilde{a}^2}+\frac{y^2}{\widetilde{b}^2}=1 \tag{3.15}$$

Носителем нечёткого эллипса является кольцо эллиптической формы, длины большой и малой полуосей которой равны $\widetilde{a}_L(0), \widetilde{b}_L(0)$ и $\widetilde{a}_R(0), \widetilde{b}_R(0)$.

Пример 3.4. Построить носитель нечёткого эллипса, описываемого уравнением:

$$\frac{x^2}{\widetilde{2S}}+\frac{y^2}{\widetilde{9}}=1, \text{ если } \widetilde{S}=\{5;1{,}5;1\} \text{ и } \widetilde{3}=\{3{,}1;0{,}8\}$$

Имеем: а) чёткая линия описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{2S}+\frac{y^2}{9}=1$$

б) в качестве растяжения R-типа берётся внешняя линия эллиптического кольца

$$\frac{x^2}{42{,}25}+\frac{y^2}{16}=1$$

в) в качестве растяжения L-типа берётся внутренняя линия эллиптического кольца

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4{,}84}=1$$

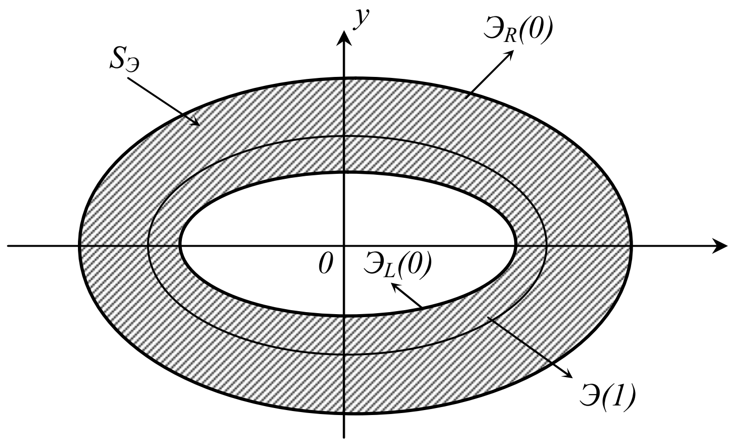


Рис. 3.7

Где *Э(1)*- линия чёткого эллипса

$Э_L(0)$- граница внутреннего сжатия

$Э_R(0)$- граница внешнего растяжения линии эллипса; $S_э$-носитель нечёткого эллипса.

Следует отметить, что условия нечёткости могут быть таковы, что в (3.15) лишь одно из чисел «*a*» либо «*b*» будут нечётким числом.

Пример 3.5. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{\tilde{9}}=1$, где $\tilde{3}=\{3;1;1{,}5\}$

Имеем: 1) чёткая линия: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{\tilde{9}}=1$

2) растяжение *R*-типа берётся внешняя линия эллиптического сегмента, т.е.

$$Э_R(0)\text{:}\ \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20{,}25}=1$$

3) в качестве растяжения *L*-типа берется внутренняя граница эллиптического сегмента:

$Э_L(0)$: $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

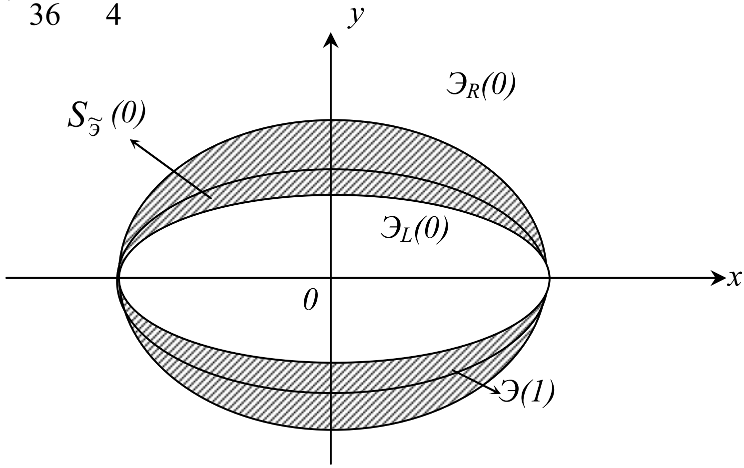


Рис.3.8

Нечеткая гипербола описывается уравнением:

$$\frac{x^2}{\tilde{9}} + \frac{y^2}{\tilde{4}} = 1 \qquad (3.16)$$

Носителем нечеткой гиперболы является гиперболические сегменты, внутри которых содержится нечеткая гипербола четкости любого α-уровня L и R –типа.

Пример 3.6. Построить носитель нечеткой параболы, описываемой уравнением:

$\dfrac{x^2}{\tilde{9}} + \dfrac{y^2}{\tilde{4}} = 1$, где $\tilde{3} = \{3; 0{,}8; 1\}$; $\tilde{2} = \{2; 0{,}6; 0{,}8\}$

Имеем: 1) четкая линия: $\dfrac{x^2}{\tilde{9}} + \dfrac{y^2}{\tilde{4}} = 1$.

4) нечеткое растяжение R –типа

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7{,}84} = 1$$

5) нечеткое растяжение L –типа

$$\frac{x^2}{4{,}84} - \frac{y^2}{1{,}96} = 1$$

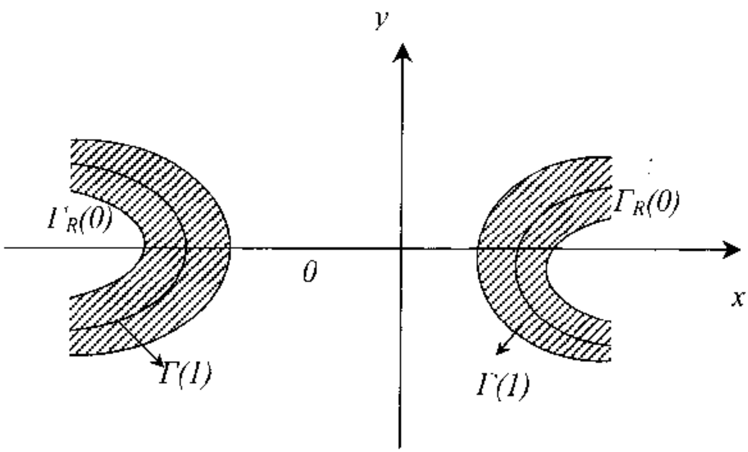


Рис.3.9

$$y^2 = 2\tilde{p}x \qquad (3.17)$$

либо

$$x^2 = 2\tilde{p}y \qquad (3.18)$$

В обоих случаях носителем нечеткой параболы является плоский параболический сегмент, ветви которых симметричны относительно (OX) и (OY) соответственно.

Пример 3.7. Построить носитель нечеткой параболы, описываемой уравнением

$y^2 = \tilde{4}x$, где $\tilde{2} = \{2;9{,}6;1\}$

Имеем: 1) четкая параболы $\Pi(1): y^2 = 4x$

2) $\Pi_L(0): y^2 = 2{,}8x$ - левое растяжение

3) $\Pi_R(0): y^2 = 6x^2$ - правое растяжение

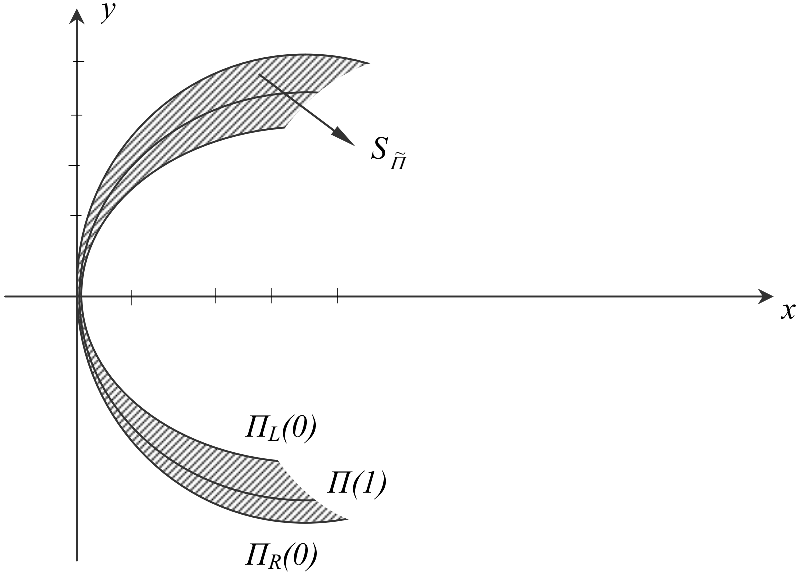


Рис.3.10

Следует отметить, что в трехмерном евклидовом пространстве:

а) нечеткая прямая определяются как место пересечения двух плоскостей, хотя бы одна из которых есть нечеткая плоскость, а носитель – как геометрическое произведение носителей этих плоскостей;

б) нечеткая линия второго порядка (эллипс, парабола и гипербола) определяются как место пересечения поверхностей (хотя бы одна из которых есть поверхность второго порядка), хотя бы одна из которых есть нечеткая поверхность, а носитель – как геометрическое произведение носителей этих поверхностей.

§3. Нечеткие углы

Определение 3.13. Нечеткой полупрямой или нечетким лучом называется часть нечеткой прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих по одну сторону от данной ее четкой или нечеткой точки. Эта точка называется начальной точкой нечеткой полупрямой.

Определение 3.14. Геометрическая фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной четкой, либо нечеткой точки, хотя бы одна из которых является нечеткой, называется нечетким углом.

Определение 3.15. Нечетким углом α-уровня называется нечеткий угол, стороны которого являются лучами α-уровня. Справедливо утверждение 3.1. Если нечеткие полупрямые имеют одинаковые функции принадлежности (а вместе с ними растяжения их носителей), то нечеткие углы любого α-уровня, образованных этими нечеткими полупрямыми равны между собой и равны четкому углу, сторонами которого являются их четкие полупрямые. В противном случае нечеткие углы различных уровней четкости, сторонами которых являются эти нечеткие лучи, не равны друг другу.

Доказательство. Пусть нечёткие полупрямые, образующие некоторый нечёткий угол $\widetilde{\varphi}$, заданы своими нечёткими уравнениями:

$$\widetilde{l}_1 : y = \widetilde{k}_1 x + \widetilde{b}_1 \quad \text{и} \quad \widetilde{l}_2 : y = \widetilde{k}_2 x + \widetilde{b}_2, \tag{3.19}$$

а соответствующие им чёткие полупрямые, образующие чёткий угол φ - заданы уравнениями:

$$\widetilde{l}_1 : y = k_1 x + b_1 \text{ и } l_2 : y = k_2 x + b_2 \tag{3.20}$$

Обозначим через $\varphi_L(\alpha)$ - нечёткий угол, образованный нечёткими полупрямыми L-типа α-уровня, т.е. $l_{1,L}(\alpha)$ и $l_{2,L}(\alpha)$, а их угловые коэффициенты через $K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha)$. $\vec{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ имеют одинаковые растяжения $\left(S_{\tilde{l}_1} = S_{\tilde{l}_2}\right)$, то из рис.3.4 *б)* следует, что

$$\left(l_1 \hat{l}_{1L}(\alpha)\right) = \left(l_1 \hat{l}_{1L}(\alpha)\right) = L\psi \tag{3.21}$$

Обозначим $tg\psi = K$. Тогда $L\varphi_{1,L}(\alpha) = L\varphi_1 - L\psi$, а $\angle\varphi_{2,L}(\alpha) = \angle\varphi_2 - \angle\psi_1$. Поэтому:

$$K_{l_{1,L}}(\alpha) = \frac{K_1 - K}{1 + K_1 K};\; K_{l_{2,L}}(\alpha) = \frac{K_2 - K}{1 + K_2 K}$$

Докажем, что при этом $\angle\varphi_2(\alpha) = \angle\varphi$.

Действительно:

$$tg\varphi_L(\alpha) = \frac{K_{2,L}(\alpha) - K_{1,L}}{1 + K_{1,L}(\alpha)K_{2,L}(\alpha)} = \frac{\dfrac{K_2 - K}{1 + K_2 K} - \dfrac{K_1 - K}{1 + K_1 K}}{1 + \dfrac{K_2 - K}{1 + K_2 K} \cdot \dfrac{K_1 - K}{1 + K_1 K}} =$$

$$= \frac{(K_2 - K)(1 + K_1 K) - (K_1 - K)(1 + K_2 K)}{(1 + K_1 K)(1 + K_2 K) + (K_2 - K)(K_1 - K)} = \tag{3.22}$$

$$= \frac{(K_2 - K_1) + (K_2 - K_1)K^2}{\left(1 + K_1 K_2 K^2 + K^2 + K_1 K_2\right)} = \frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 K_2} = tg\varphi$$

Если условие (3.21) не выполняется, то обозначив $\left(l_1 \hat{l}_{1L}(\alpha)\right) = \angle\psi_1;\; \left(l_2 \hat{l}_{2L}(\alpha)\right) = \psi_2$ $tg\psi_1 = K_3;\; tg\psi_2 = K_4$.

Тогда $\angle\varphi_{1,L}(\alpha) = \varphi_1 - \psi_1;\; \angle\varphi_{2,L}(\alpha) = \varphi_2 - \psi_2$. Поэтому,

$$K_{l_{1,L}(\alpha)} = \frac{K_1 - K_3}{1 + K_1 K_3},\text{ а } K_{l_{1,L}(\alpha)} = \frac{K_1 - K_3}{1 + K_1 K_3}$$

Тогда, проведя подсчёты аналогично (3.22), получим

$$tg\varphi_L(\alpha) \neq tg\varphi \qquad (3.24)$$

соотношения (3.22) и (3.23) аналогично можно получить для $\angle\varphi_R(\alpha)$ и для любых других уровней чёткости.

Пример 3.8. Построить чёткий угол и нечёткие углы $\alpha = 0$ - уровня L и R-типа, образованных пересечением нечётких прямых $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ на плоскости *(XOY),* если: $\tilde{l}_1$:$y=2x+\tilde{1}$; l_2:$y=3x-\tilde{2}$, где $\tilde{1} = \{1;2;1{,}5\}$ $\tilde{2} = \{2;1{,}5;2\}$

Имеем: 1) чёткий угол – угол между чёткими прямыми

$$tg\varphi = \frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 K_2} = \frac{3-2}{1+3\cdot 2} = \frac{1}{7}$$

2) Так как угловые коэффициенты нечётких прямых есть чёткие числа, то для нечётких углов любого уровня чёткости, в том числе и для α=0,8.

Аналогично примеру 3.3, построив носители прямых $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$, получим носитель нечеткого угла $\left(\widehat{\tilde{l}_1\tilde{l}_2}\right)$ и нечёткий угол α-уровня чёткости.

Пример 3.9. Найти чёткий и нечёткие углы α=0 уровня, образованные нечёткими прямыми $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$, заданные своими нечёткими уравнениями:

$\tilde{l}_1 : y = \tilde{2}x + 1$ и $\tilde{l}_2 : y = -\tilde{3}x + 2$, где $\tilde{2} = \{2;1;1\}$ и $\tilde{3} = \{3;1{,}5;1{,}5\}$

Имеем:

1) чёткий угол- угол между двумя чёткими прямыми.

$$tg\varphi = \frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 K_2} = \frac{-3-2}{1-3\cdot 2} = 1..., \ \angle\varphi = \frac{\pi}{4}$$

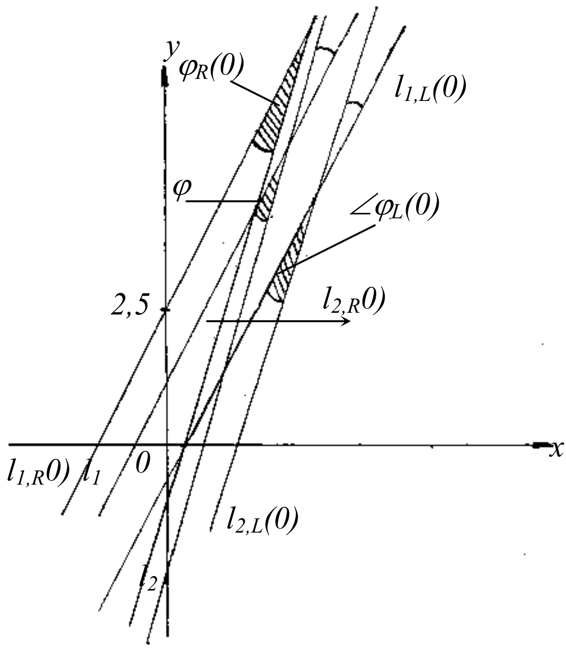


Рис.3.11

2) нечёткие углы $\varphi_L(0)$ и $\varphi_R(0)$ между прямыми $l_{1L}(0)l_{2L}(0)$ и $l_{1R}(0)l_{2R}(0)$

$$tg\varphi_L = \frac{K_{2,L}(0) - K_{1L}(0)}{1 + K_{1L}(0)K_{2L}(0)} = \frac{-4{,}5 - 1}{1 - 4{,}5 \cdot 1} = 1{,}57$$

$$tg\varphi_R(0) = \frac{K_{2,R}(0) - K_{1R}(0)}{1 + K_{1R}(0)K_{2R}(0)} = \frac{-1{,}5 - 3}{1 - 1{,}5 \cdot 3} = 1{,}29$$

Из подсчетов очевидно, что углы, образованные между левым и правым границами носителей нечётких прямых, не равны между собой и не равны чёткому углу между чёткими прямыми. Аналогично можно показать, что нечёткие углы различных α-уровней чёткости не равны друг другу.

Следует также отметить, что нечёткий угол, соответствующий прямому чёткому углу, может быть либо острым, либо тупым углом.

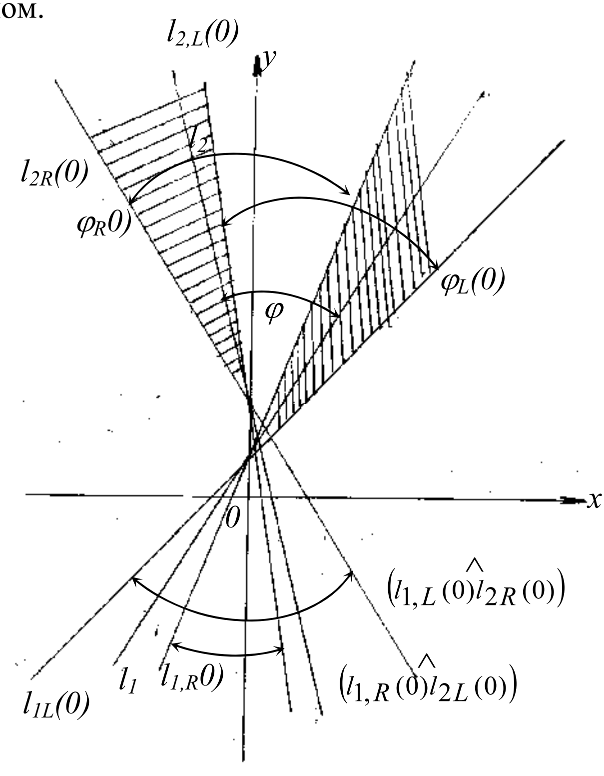


Рис.3.12

Определение 3.16. Носитель нечёткого угла между двумя нечёткими прямыми $\tilde{l}_1$ и $\tilde{l}_2$ будем называть совокупность всех углов, принимающих значения между углами, образованными пересечением правой границы носителя $\tilde{l}_1$ с левой границей носителя нечёткой прямой $\tilde{l}_2$ и углом, образованным пересечением левой границы носителя нечёткой прямой $\tilde{l}_1$ с правой границей носителя нечёткой прямой $\tilde{l}_2$, т.е.

$$\sup por\left(\tilde{l}_1 \hat{\tilde{l}}_2\right) = \left[\tilde{l}_{1,R}(0)\hat{\tilde{l}}_{2,L}(0); \tilde{l}_{1,L}(0)\hat{\tilde{l}}_{2,R}(0);\right] \qquad (3.26)$$

Пример 3.10. Найти носитель нечётких углов, образованных пересечением нечётких прямых, описываемых уравнениями, приведёнными в примерах 3.8 и 3.9.
Решение.

1) из результатов примера 3.8 следует, что носитель нечёткого угла принимает единственное значение, равное чёткому углу между заданными прямыми.
2) Из данных примера 3.9 следует:

$$\left.\begin{aligned} l_{1,R}(0) &: y = 3x + 1 \\ l_{2,L}(0) &: y = -4{,}5x + 2 \end{aligned}\right\}$$

$$tg\left(\tilde{l}_{,L1}(0)\hat{\tilde{l}}_{2,R}(0)\right) = \frac{K_{2,R}(0) - K_{1L}(0)}{1 + K_{1L}(0)K_{2R}(0)} = \frac{-1{,}5 - 1}{1 - 1{,}5 \cdot 1} = 5$$

Таким образом, $\sup por\left(\tilde{l}_1 \hat{\tilde{l}}_2\right) = [0{,}55; 5]$

Найденные углы показаны на рис.3.12.
Следует отметить, что для случая определения нечётких углов между нечёткими прямыми в трёхмерном пространстве следует воспользоваться нечёткими уравнениями, описывающими нечёткие прямые в трёхмерном пространстве и результатами определения углов между чёткими прямыми в трёхмерном пространстве.

§4. Нечёткие многоугольники

Следуя понятию чёткого многоугольника [3], введём понятие нечёткого многоугольника.

Определение 3.17. Простая замкнутая ломаная линия называется нечётким многоугольником, если её соседние звенья, хотя бы одна из которых есть отрезок нечёткой прямой, не лежат на одной прямой.

Для конкретности в настоящем параграфе рассмотрены нечёткие треугольники.

Определение 3.18. Нечёткий многоугольник с наименьшим числом звеньев (стороны и вершины) будем называть нечётким треугольником.

Следует отметить, что авторы монографии [41] понятие нечёткого треугольника вводят с помощью понятий нечётких полуплоскостей.

Определение 3.19. Пусть α, β, и γ - три различных направления на плоскость и пусть *A, B* и *C* одновременно отличны от постоянной и содержат значение 0). Тогда $A \cap B \cap C$ называется нечётким треугольником. Рис. 3.13.

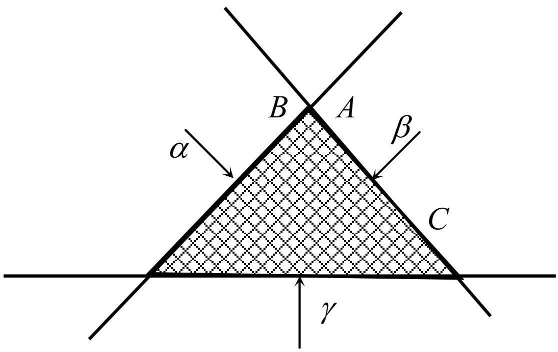


Рис.3.13

Из этого понятия треугольника следует:

1) под нечётким треугольником авторы понимают не замкнутую нечёткую ломанную линию, а часть плоскости, ограниченной этой ломанной линией; 2) стороны нечёткого треугольника как нечёткие прямые являются нечёткими прямыми лишь одно *L* либо *R* – типа, причём нечёткий треугольник любого α-уровня подобен чёткому треугольнику, что не всегда обязательно на основании определения нечёткой прямой на плоскости (пример 3.2)

Поэтому, в качестве понятия нечёткого треугольника следует принять определения 3.17 либо эквивалентное ему

Определение 3.20. Нечётким треугольником называется фигура, состоящая из трех нечётких точек, не лежащих на одной прямой и трёх нечётких отрезков, попарно соединяющих эти точки.

Рассмотрим отдельные виды нечётких треугольников.

I. Нечёткий треугольник с одной нечёткой стороной

Пусть стороны нечёткого треугольника $\tilde{\Delta} ABC$ на плоскости (XOY) описываются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} AB &: a_1 x + b_1 y = c_1 \\ BC &: a_2 x + b_2 y = c_2 \\ AC &: \tilde{a}_3 x + \tilde{b}_3 y = \tilde{c}_3 \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

В зависимости от коэффициентов уравнения, описывающего нечёткую сторону треугольника (см (3.6), либо (3.8)), носитель нечёткого треугольника меняет свой вид, сохранив при этом без изменений угол, противолежащий его нечёткой стороне.

Пример 3.11. Построить носители нечётких треугольников $\tilde{\Delta} ABC$, где:

1) $\left.\begin{aligned} AB &: 2x - b_1 y = 1 \\ BC &: x - 3y = 3 \\ \tilde{A}C &: 3x + y = \tilde{5} \end{aligned}\right\}$ 2) $\left.\begin{aligned} AB &: 2x - y = 1 \\ BC &: x - 3y = 3 \\ \tilde{A}C &: \tilde{3}x + y = 5 \end{aligned}\right\}$

где $\tilde{3} = \{3;1;2\}$; $\tilde{5} = \{5;2;3\}$

Решение. Найдены координаты вершин нечётких треугольников. Решив попарно уравнения, получим:

1) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(0;-1)$. Аналогично

$\widetilde{A}_L(0,8;0,6);\ A(1,2;1,4);\ \widetilde{A}_R(1,8;\ 2,6)$

$\widetilde{C}_L(1,2;-0,6);\ C(1,8;-0,4);\ C_R(2,7;-0,1)$

2) $\widetilde{A}_L\left(\frac{6}{7};\frac{5}{7}\right)\ A(1,2;1,4);\ \widetilde{A}_R(1,5;2)$

$\widetilde{C}_L\left(\frac{9}{8};-\frac{5}{8}\right)\ C(1,8;-0,4);\ \widetilde{C}_R\left(2\frac{4}{7};-\frac{1}{7}\right)$

а)

б)

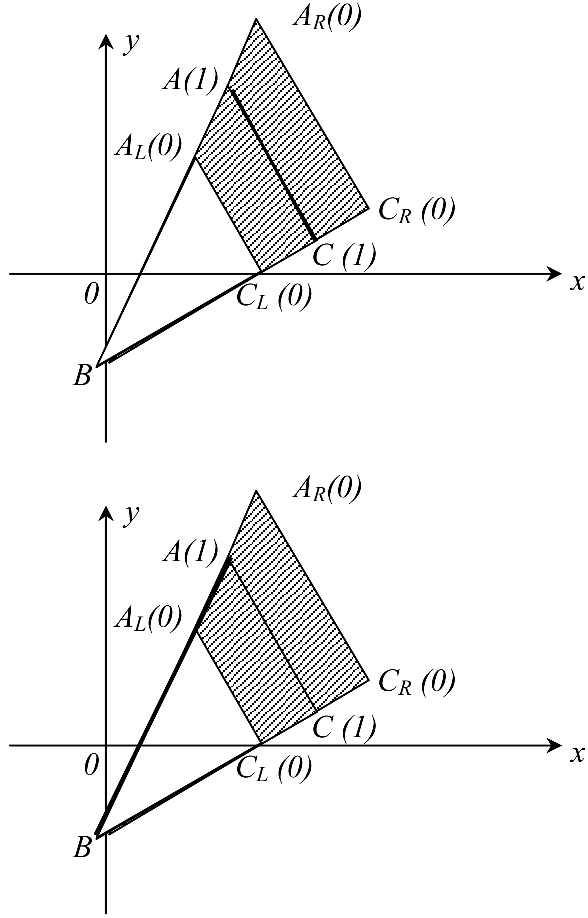


Рис.3.14

II. Нечёткий треугольник с двумя нечёткими сторонами

Пусть стороны нечёткого треугольника на плоскости *(XOY)* описываются уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &AB: y = k_1 x + b_1 \\ &BC: y = \widetilde{K}_2 x + \widetilde{b}_2 \\ &AC: y = \widetilde{K}_3 + \widetilde{b}_3 \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

Так же , как и при определении нечётких углов, в данном случае в зависимости от значений $\widetilde{K}_2, \widetilde{K}_3, \widetilde{b}_1$ и $\widetilde{b}_3$ можно рассмотреть три случая: 1) K_2 и K_3 – чёткие, но b_1 и b_2 – нечёткие; 2) K_2 и K_3 – нечёткие, b_2 и b_3 – чёткие; 3) K_2 и b_3 – чёткие, а K_3 и b_2 – нечёткие и наоборот. Во всех этих трёх случаях носители нечётких треугольников резко отличаются друг от друга.

Пример 3.12. Построить носители нечётких треугольников:

1) $\left.\begin{aligned} &AB: y = 2x - 2 \\ &BC: y = 4x + \widetilde{3} \\ &AC: y = x + \widetilde{5} \end{aligned}\right\}$, где $\begin{aligned} &\widetilde{3} = \{3; 1{,}5; 2\}; \\ &\widetilde{5} = \{5; 2; 3\} \end{aligned}$

Решив системы уравнений, находим координаты всех вершин чёткого треугольника и треугольников, образующие границу носителя нечёткого треугольника. Имеем: 1) для чёткого треугольника *ABC A(-2,5; -7); B(7;12);* $C\left(\frac{2}{3}; 5\frac{2}{3}\right)$*;*

2) для треугольников с нечёткими сторонами:

$A_R(0) = A(-1{,}75; -5{,}5); A_L(0) = A(-3{,}5; -9); B_L(0) = B(5;8)$

$B_R(0) = B(10;18);\ C_{LL}(0) = C\left(-\frac{2}{3}; 2\frac{1}{3}\right);\ C_{LR}(0) = C(0{,}5; 3{,}5)$

$C_{RL}(0) = C(2{,}16; 5{,}16);\ C_{RR}(0) = C(1;9)$

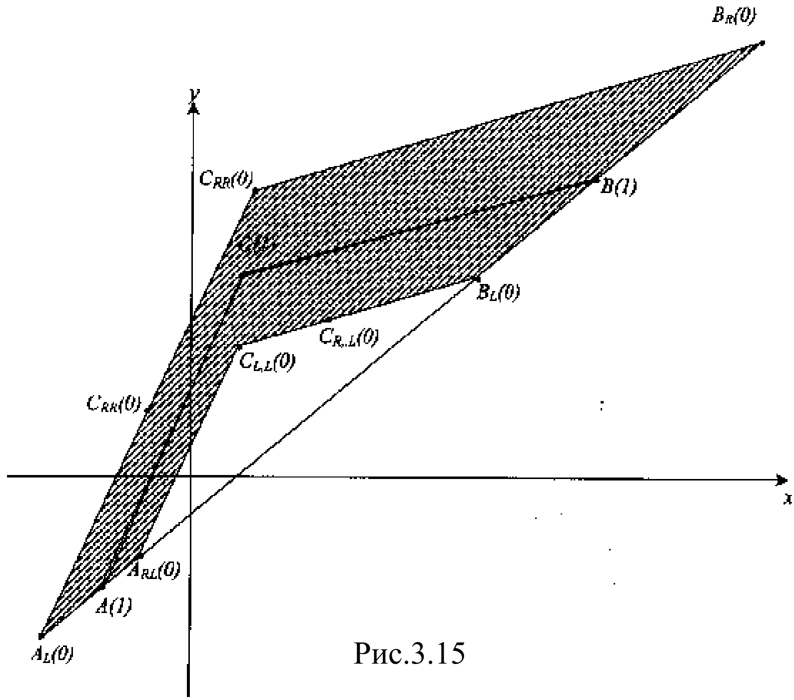


Рис.3.15

На рис.3.15 заштрихованная область является носителем нечёткого треугольника $\tilde{\Delta}ABC$.

$$2)\ \left.\begin{aligned} &AB: y = 2x - 6 \\ &BC: y = -\tilde{2}x + 4 \\ &AC: y = \tilde{5}x - 3 \end{aligned}\right\},\ \text{где}\ \begin{aligned} &\tilde{2} = \{2;1;3\} \\ &\tilde{5} = \{5;2;1\} \end{aligned}$$

Решив систему уравнений, найдем координаты вершин $\tilde{\Delta}ABC$.

а) для чёткого треугольника:

A(-1;-8); B(2,5; -1); C(1;2)

б) для треугольников с нечёткими вершинами и сторонами, являющимися границами носителя нечёткого треугольника:

$A_L(-3;-12)$; $A_R\left(-\frac{3}{4};-7{,}5\right)$; $B_L\left(\frac{10}{7};-3\frac{1}{7}\right)B_R(10;14)$;

$C_{L,L}\left(\frac{7}{8};-\frac{3}{8}\right)$; $C_{L,R}\left(\frac{7}{11};\frac{9}{11}\right)$; $C_{R,L}\left(\frac{7}{6};\frac{1}{2}\right)$; $C_{R,R}\left(\frac{7}{4};2\frac{1}{4}\right)$

На рис. 3.16 заштрихованная область является носителем нечёткого $\tilde{\Delta}ABC$.

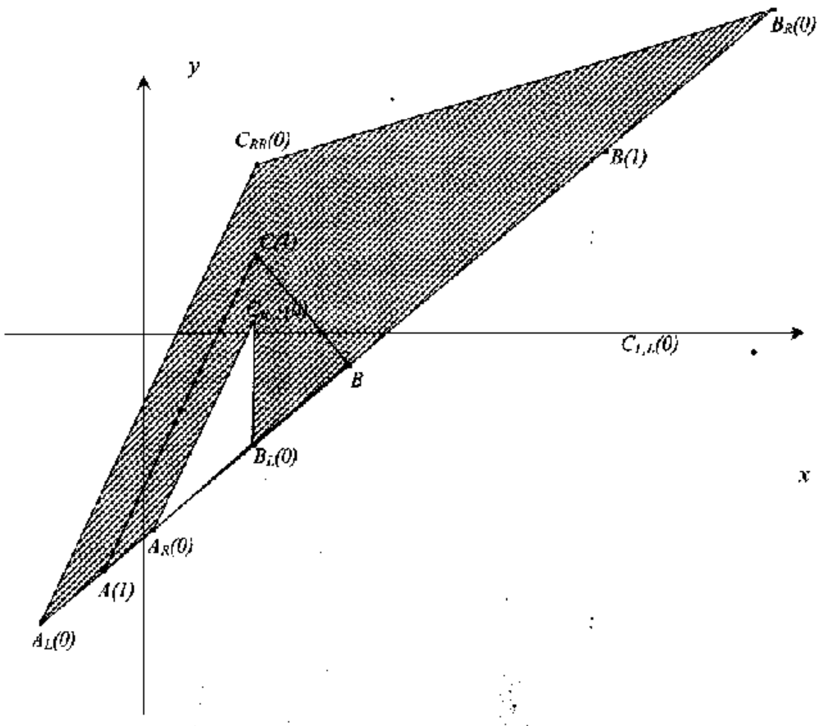


Рис.3.16

III Нечёткий треугольник с тремя нечёткими сторонами

Пусть все стороны нечёткого треугольника есть отрезки нечётких прямых, описываемых уравнениями:

$$\begin{cases} AB: y = \tilde{K}_1 x + \tilde{b}_1 \\ BC: y = \tilde{K}_2 x + \tilde{b}_2 \\ \tilde{AC}: y = K_3 x - b_3 \end{cases} \tag{3.29}$$

Здесь следует рассмотреть три случая:

1) угловые коэффициенты сторон чёткие, а свободные члены $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ и $\tilde{b}_3)$ - нечёткие числа; 2) угловые коэффициенты – нечёткие, а свободные члены чёткие числа; 3) угловые коэффициенты и свободные члены уравнений нечётких сторон нечёткого треугольника – нечёткие числа. Для конкретности для каждого случая рассмотрим примеры:

Пример 3.14.

1) $\begin{cases} AB: y = 0{,}4x + \tilde{3{,}8} \\ AC: y = -\dfrac{5}{6}x + \dfrac{\tilde{4}}{3} \\ BC: y = -7x + \tilde{26} \end{cases}$, где $\begin{matrix} \tilde{3{,}8} = \{3{,}8; 0{,}8; 1{,}2\} \\ \dfrac{\tilde{4}}{3} = \left\{\dfrac{4}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right\} \\ \tilde{26} = \{26; 5; 2\} \end{matrix}$

Решение

а) Для чёткого ΔABC имеем: *A(-2;3); B(3;5)* и *C(4;-2)*
б) для носителя нечёткого треугольника имеем:

$$A_{LL}(0) = A\left(-1\frac{23}{37}; 2\frac{13}{37}\right);\ A_{LR}(0) = A\left(-3\frac{9}{37}; 3\frac{26}{37}\right)$$

$$A_{RL}(0) = A\left(-1\frac{30}{37}; 2\frac{25}{37}\right);\ A_{RR}(0) = A\left(-2\frac{16}{37}; 3\frac{35}{37}\right)$$

$$A_{LL}(0) = B\left(2\frac{16}{37}; 3\frac{36}{37}\right);\ B_{LR}(0) = B\left(2\frac{6}{37}; 5\frac{32}{37}\right)$$

$$B_{RL}(0) = B\left(3\frac{14}{37};4\frac{13}{37}\right);\ B_{RR}(0) = B\left(3\frac{4}{37};6\frac{9}{37}\right)$$

$$C_{LL}(0) = C\left(3\frac{9}{37};-1\frac{26}{37}\right);\ C_{LR}(0) = C\left(3\frac{3}{37};-\frac{21}{37}\right)$$

$$C_{RL}(0) = C\left(4;-2\frac{24}{37}\right);\ C_{RR}(0) = C\left(3\frac{31}{37};-1\frac{19}{37}\right)$$

На рис.3.17 заштрихованная область есть носитель нечёткого $\tilde{\Delta}ABC$.

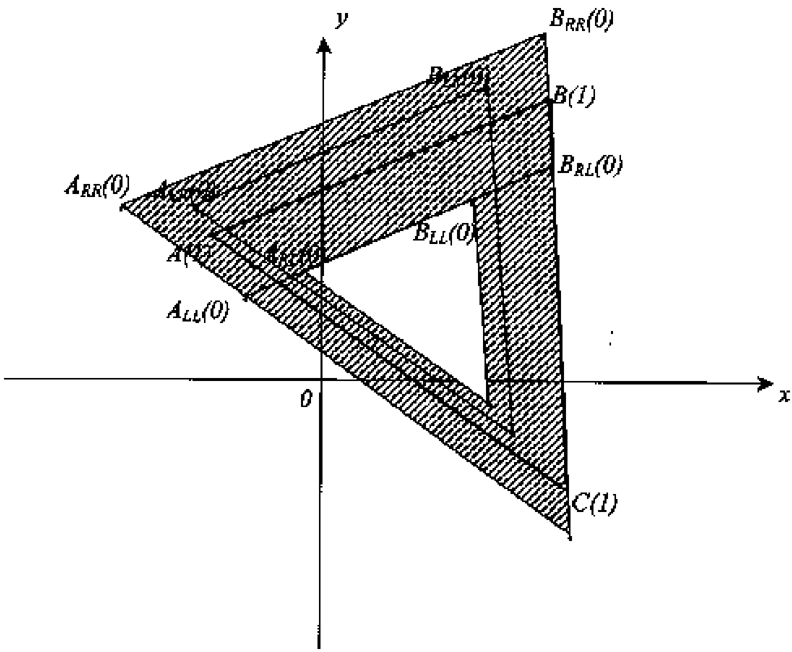


Рис.3.17

Пример 3.15.

2) Построить носитель нечёткого треугольника, стороны которого заданы уравнениями:

$$\begin{cases} AB: y = \dfrac{\widetilde{3}}{4}x + 3{,}5 & \dfrac{\widetilde{3}}{4} = \left\{\dfrac{3}{4}; \dfrac{7}{4}; \dfrac{5}{4}\right\} \\ BC: y = -\widetilde{3}x + 1 \quad \text{, где} & \widetilde{3} = \{3; 1; 2\} \\ AC: y = -\dfrac{\widetilde{1}}{2}x + 1 & \dfrac{\widetilde{1}}{2} = \left\{\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}; 1\right\} \end{cases}$$

Решение. Найдём координаты вершин чёткого треугольника и координаты точек пересечения границ носителей нечётких сторон $\widetilde{\Delta}ABC$.

а) для чёткого треугольника: *A(-2;3); B(2;5)* и *C(4;-1).*

б) для границ носителя:

$$A_{LR}(0) = A(-5;-8); B_{LR}(0) = B(1{,}875;1{,}625); C_{LR}(0) = C\left(2\frac{6}{7}; -3\frac{2}{7}\right)$$

$$A_{LL}(0) = A(-2{,}5;-1{,}5); B_{LL}(0) = B(1{,}875;7{,}25); C_{LL}(0) = C\left(3\frac{1}{3}; 4\frac{1}{3}\right)$$

$$A_{RR}(0) = A(1{,}25;2{,}25); B_{RR}(0) = B(7{,}5;-4); C_{RR}(0) = C\left(1\frac{2}{3}; 2\frac{2}{3}\right)$$

$$A_{R1}(0) = A\left(-\frac{5}{7}; -2\frac{1}{14}\right); B_{RL}(0) = B(2{,}5;-1{,}5); C_{RL}(0) = C(20; -29)$$

Из рис.3.18 следует, что носитель нечёткого треугольника, стороны которого описываются уравнением с нечётким угловым коэффициентом, представляет собой многоугольник, содержащий чёткий треугольник и нечёткий треугольник чёткости любого α-уровня.

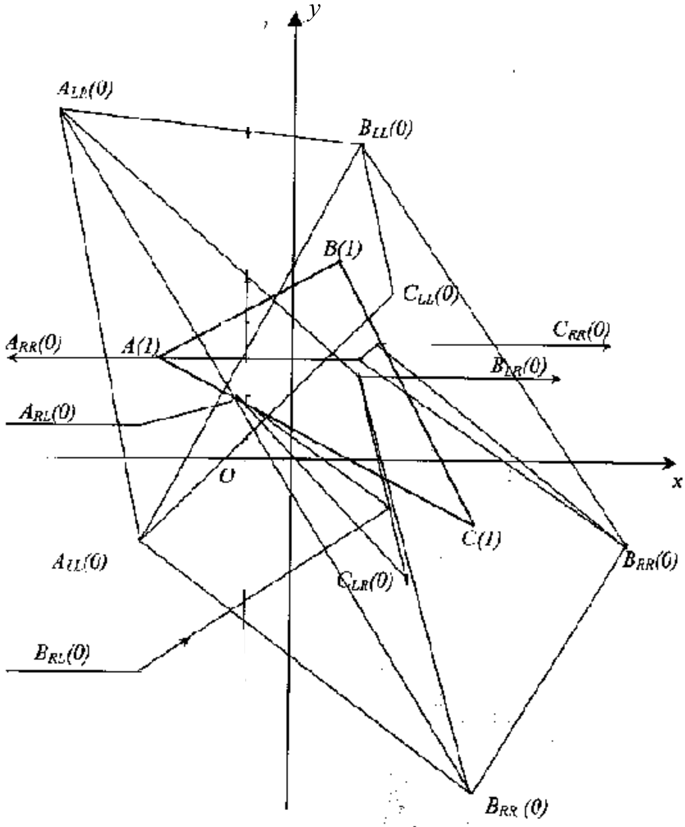


Рис.3.18

3) Из рис. 3.17 и 3.18 следует, что если все коэффициенты и свободные члены уравнений, описывающие стороны нечёткого треугольника нечёткие числа, то задачи определения носителя и нахождения нечёткого треугольника чёткости любого α-уровня усложняется.

Останавливаясь на площади нечёткого треугольника, следует отметить, что в [41] эти понятия рассмотрены частично лишь для случая, когда стороны нечёткого треугольника заданы нечёткими уравнениями прямых с чёткими угловыми коэффициентами. Причём определения площади и периметра нечёткого треугольника очень расплывчаты. Поэтому приведём эти понятия.

Углы нечёткого треугольника определяются так же, как и углы между двумя прямыми, если заданы уравнения сторон нечёткого треугольника. Если же заданы координаты вершин нечёткого треугольника, то выписав уравнения нечётких сторон нечёткого треугольника (как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки) определяется угол между двумя прямыми (смотри примеры 3.8; 3.9)

Следует отметить, что:

1) все свойства подобия чётких треугольников справедливы и для нечётких треугольников;

Утверждение 3.2. Два нечётких треугольника *L(R)* – типа любого α-уровня подобны тогда и только тогда, когда равны их носители и функции принадлежности.

Доказательство.

Так как носители $\tilde{\Delta}ABC$ и $\tilde{\Delta}A,B,C$ равны друг другу, то равны и носители соответствующих сторон. Тогда в силу утверждения 3.1. соответствующие углы этих треугольников равны друг другу. Поэтому, в силу теоремы о подобии чётких треугольников справедливо данное утверждение.

Утверждение 3.3. Два нечётких треугольника *L(R)* любого α-уровня равны друг другу, если равны их носители, функции принадлежности и по одной стороны *L(R)*-типа любого α-уровня чёткости.

Доказательство.

В силу утверждения 3.2. соответственные углы $\tilde{\Delta}_\alpha ABC$ и $\tilde{\Delta}_\alpha A_1, B_1, C_1$ другу. Поэтому на основании теоремы о равенстве треугольников (по двум углам и прилежащей к ним стороне) $\tilde{\Delta}_\alpha ABC_L = \tilde{\Delta}_\alpha A_1, B_1, C_1$ и $\tilde{\Delta}_\alpha ABC_R = \tilde{\Delta}_\alpha A_1, B_1, C_{1R}$

Для определения периметра нечёткого треугольника введём понятие длины нечёткого отрезка прямой. На основании определения 3.10 имеем.

Определение 3.21. Длиной нечёткого отрезка $\widetilde{AB}$ (расстоянием между двумя нечёткими точками $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$) будем называть наименьшее расстояние между носителями этих точек, т.е. если:

$\sup por\widetilde{A} = [A_L(0); A_R(0)]$; $\sup por\widetilde{B} = [B_L(0); B_R(0)]$, то

$$d_{\widetilde{A}\widetilde{B}} = \inf[A_R(0)B_L(0); A_L(0)B_R(0)] \; (3.23) \qquad (3.23)$$

Для нечётких точек любого α-уровня

$$d_{\widetilde{A}\widetilde{B}}(\alpha) = \inf[A_R(\alpha)B_L(\alpha); A_L(\alpha)B_R(\alpha)] \qquad (3.24)$$

Пример 3.16. Найти длину $\widetilde{AB}$, если:

$\widetilde{A}(\widetilde{3};-\widetilde{4}); \widetilde{B}(-\widetilde{2};\widetilde{5}); \widetilde{3} = \{3;1;2\}; \widetilde{4} = \{4;1;1\}$
$\widetilde{2} = \{2;1;1\}; \widetilde{5} = \{5;2;1\}$

$d_{\widetilde{AB}} = \inf\sqrt{(\widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_1)^2 + (\widetilde{y}_2 - \widetilde{y}_1)}$, где $\widetilde{A}(\widetilde{x}_1\widetilde{y}); \widetilde{B}(\widetilde{x}_2\widetilde{y}_2)$

Имеем:

$-\widetilde{2} = \{-3;-1\}; -\widetilde{4} = \{-5;-3\}$

$d_{AB} = \sqrt{(-2-3)^2 + (5+4)^2} = \sqrt{106}$

$\sup r\,\widetilde{AB} = \sqrt{(-3-5)^2 + (-5-6)^2} = \sqrt{185}$

$\inf\,\widetilde{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{45}$

Таким образом, $d_{\widetilde{AB}} = \sqrt{45}$

На рис.3.19. заштрихованные участки есть носители $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Из рисунка видно, что

$$d_{\widetilde{A}\widetilde{B}} = d_{S_{\widetilde{B}} - S_{\widetilde{A}}} = d_{B_{LR}(0)A_{RL}(0)} = \sqrt{45}$$

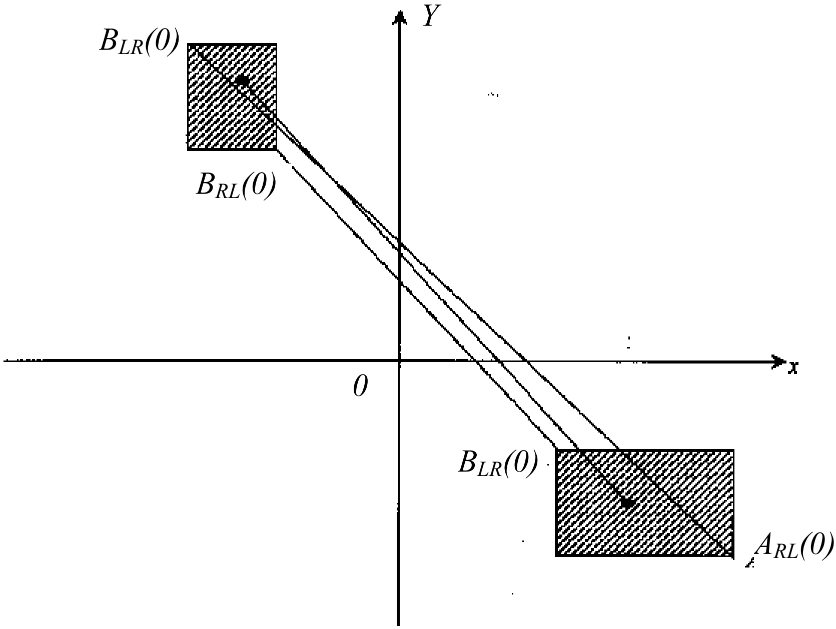


Рис.3.19

Теперь остановимся на понятиях периметра и площади нечетких треугольников.

Следуя [41], авторы которого считают, что нечеткий треугольник полностью определен заданием носителей лишь двух ее сторон. Поскольку, по их мнению, эти прямые параллельны их четким сторонам. Они считают их как определение направлений сторон нечеткого треугольника. Поэтому они принимают следующие понятия площади и периметра нечеткого треугольника.

Пусть площади треугольников

$T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}.,..., T_{\alpha_n}$ будут $S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}.,..., S_{\alpha_n}$ и периметры $T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}.,..., T_{\alpha_n}$ и пусть $\delta_i = (\alpha_i - \alpha_{i-1})$, где ($\alpha_0$=0). Тогда площадью T является

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i S_{\alpha_i} \qquad (3.25)$$

Откуда следует, что эта сумма вычисляет площадь S_{α_1} для треугольника T_{α_1} четкости α_1 и S_{α_1} - как площадь каждого внутреннего треугольника T_{α_i} с четкостью α_i ($i = \overrightarrow{1,н}$)

При этом периметр T является

$$P = \sum_{i=1}^{n} \delta_i P_i \qquad (3.26)$$

При этом, учитывая, что стороны a_α, b_α, c_α треугольников T_{α_i} перпендикулярны направлениям α, β и γ (определение 3.19), то длины их сторон можно определить как

$$a = \sum_{i=1}^{n} \delta_i a_i ;\ b = \sum_{i=1}^{n} \delta_i b_i ; c = \sum_{i=1}^{n} \delta_i c_i \qquad (3.27)$$

И таким образом,

$$P = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i + c_i)\delta_i \qquad (3.28)$$

Следует отметить, что (3.25)-(3.28) имеют смысл лишь в том случае, когда под знаком Σ подразумевается операция объединения множеств (каждое из которых есть множество точек геометрических фигур), пересечением которых являются четкие геометрические фигуры.

Следует отметить, что если нечеткий треугольник любого $\alpha<1$-уровня вложен в четкий треугольник, то в (3.25)-(3.28) знак объединения следует поменять на знак пересечения множеств.

Если же соответствующие стороны нечетких треугольников α_I –уровней не параллельны друг другу и не параллельны соответствующим сторонам четкого треугольника (примеры 3.12-3.15), то их площади и периметры невозможно определить по (3.25)-(3.28).

В этом случае и периметры и площади нечетких треугольников любого α-уровня следует определять через координаты их вершин (по тем же формулам, с помощью которых определяются площади и периметры четких треугольников), которые так же верны и для нечетких треугольников рассмотренных в [41].

Пример 3. Найти периметры и площади четкого и соответствующих ему нечетких треугольников *(L, L) (L,R), (R,L)* и *(R,R)* типов уровня (α=0), стороны которых описываются уравнениями, заданными в примере 3.15.

Решение.

Пользуясь известными (из классической математики) формулами

$$P_{\Delta ABC} = |AB| + |BC| + |AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \\ + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} + \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \tag{3.29}$$

$$S_{\Delta AbC} = \frac{1}{2}\left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| \tag{3.30}$$

получаем:

а) для четкого треугольника *A*(-2;3); *B(2;5) и C(4;-1).*

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{(2+2)^2 + (5-3)^3} + \sqrt{(4-2)^2 + (-1-5)^2} + \\ + \sqrt{(4+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20} + \sqrt{40} + \sqrt{52} = 18{,}01$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|(4+2)(-1-5) - (4-2)(-1-3)\right| = 14$$

б) для границ носителя

$$P_{L,L}(0)=\sqrt{(1{,}875+2{,}5)^2+(7{,}25+1{,}5)^3}+$$

$$+\sqrt{\left(3\frac{1}{3}-1{,}875\right)^2+\left(4\frac{1}{3}-7{,}25\right)^2}+\sqrt{\left(3\frac{1}{3}+2{,}25\right)^2+\left(4\frac{1}{3}+1{,}5\right)^2}=21{,}19$$

$$S_{LL}(0)=\frac{1}{2}\left|\left(3\frac{1}{3}+2{,}5\right)\left(4\frac{1}{3}-7{,}25\right)-\left(3\frac{1}{3}-1{,}875\right)\left(4\frac{1}{3}+1{,}5\right)\right|=12{,}76$$

$$S_{LL}^{(0)}=\sqrt{(7{,}5-1{,}25)^2+(-4-2{,}25)^2}+\sqrt{\left(1\frac{2}{3}-7{,}5\right)^2+\left(2\frac{2}{3}+4\right)^2}+$$

$$+\sqrt{\left(1\frac{2}{3}-1{,}25\right)^2+\left(2\frac{2}{3}-2{,}25\right)^2}=17{,}29$$

$$S_{RR}^{(0)}=\frac{1}{2}\left|\left(1\frac{2}{3}-1{,}25\right)\left(2\frac{2}{3}+4\right)-\left(2\frac{2}{3}-2{,}25\right)\left(1\frac{2}{3}-7{,}5\right)\right|=2{,}61$$

$$P_{L,R}(0)=\sqrt{(1{,}875+5)^2+(1{,}625+8)^3}+$$

$$+\sqrt{\left(2\frac{6}{7}+5\right)^2+\left(-3\frac{2}{7}+8\right)^2}=21{,}96$$

$$S_{LR}(0)=\frac{1}{2}\left|\left(2\frac{6}{7}+5\right)\left(-3\frac{2}{7}-1{,}625\right)-\left(2\frac{6}{7}-1{,}875\right)\left(-3\frac{2}{7}+8\right)\right|=21{,}61$$

$$P_{R,L}(0)=\sqrt{\left(2{,}5+\frac{5}{7}\right)^2+\left(-1{,}5+2\frac{1}{14}\right)^2}+\sqrt{(20-2{,}5)^2+\left(-29\frac{2}{7}+1{,}5\right)^2}+$$

$$+\sqrt{\left(20+\frac{5}{7}\right)^2+\left(-29+2\frac{1}{4}\right)}=70{,}05$$

$$S_{RL}(0)=\frac{1}{2}\left|\left(20+\frac{5}{7}\right)(-29+1{,}5)-(20-2{,}5)\left(-29+2\frac{1}{4}\right)\right|=224{,}24$$

Смотри рис.3.18

Как следует из результатов подсчетов, в данном случае значения периметра и площади нечетких треугольников нельзя вычислять по формулам (3.25) и (3.26).

Следует отметить, что для любых выше рассмотренных нечетких треугольников справедливы все теоремы, которые справедливы для четких треугольников (теорема синусов, теорема косинусов и т.д.).

В заключении отметим, что исходя из (определения 3.17) определения нечетких многоугольников, все результаты, справедливые для четких многоугольников легко перенести на нечеткие многоугольники любого уровня четкости.

ГЛАВА IV. НЕЧЕТКИЕ МНОЖЕСТВА
§1. Понятие нечетких множеств

Начиная от Л.Заде [1] многими авторами монографий по использованию нечетких множеств различными способами понятие нечеткого множества [1, 12, 29, 57] и т.д.

Наиболее четким и корректным определением нечеткого множества следует считать следующее.

Определение 4.1. Нечетким множеством A будем называть совокупность элементов $x \in X$, функция принадлежности которых множеству A принимает значения из [0;1]. При этом множество X является универсальным множеством.

Определение 4.2. Множество X называется универсальным множеством нечеткого множества A, если оно является областью определения функции принадлежности μ_A.

Отметим, что если X есть конечное множество $A \subset X$ примет вид:

$$A = \sum_{i=1}^{m} \mu_A(x_i)/x_i \tag{4.1}$$

Если же X – бесконечное множество, то

$$A = \bigcup_{x} \mu_A(x)/x, \tag{4.2}$$

где $\bigcup\limits_{x}$ означает объединение элементов.

Пример 4.1. X={a, b, c, d, e, k, m}
A=[0,2/*a*+0,5/b+0,1/c+0,4/d+0,8/e+1/k++0,9/m]
есть нечеткое множество, а X- универсальное множество.

Определение 4.3. Носителем нечеткого множества А называется множество таких точек из X, для которых величина $\mu_A(x_i)$ положительна. $A = \{x \in X;\ \mu_A(x) > 0\}$.

Исходя из определения носителя нечеткого числа следует

Определение 4.4. Носителем нечеткого множества A будем называть объединение носителей всех четких и нечетких элементов множества A.

Исторически первым обобщением понятия нечеткого множества стали L- нечеткие множества: $\mu : X \to L[13]$ (нечеткое множество L-типа), т.е. функции, принимающие свои значения в конечной или бесконечной дистрибутивной решетке L (решетка – частично упорядоченное множество с точной нижней и точной верхней границами). Области принадлежности также моделируются полной решеточно упорядоченной полугруппой [13]. В плане выражения качественных представлений и оценок человека в процессе решения задач важным является случай S-нечетких множеств, задаваемых парой (R, μ), где

$$\mu : R \to S \tag{4.3}$$

На S естественно налагаются условия конечности и полноты. Нечеткие множества классифицируются на нечеткие множества различных типов.

Определение 4.5. Нечеткое множество, функция принадлежности которого является обычная четкая функция, т.е. область ее значений является четкое множество, будем называть нечетким множеством 1-го типа; если же значения ее функции принадлежности образуют нечеткое множество, то само нечеткое множество называется нечеткое множеством 2-го типа. [34]

$$\mu_A : x[0;1] \to [0;1] \tag{4.4}$$

Определение 4.6. Нечетким множеством типа P называется множество из X, у которого значения функции принадлежности является нечетким множеством типа (P-1). В [39, 60] рассмотрен другой тип нечетких множеств, у которых значения функции принадлежности является случайной переменной. В этом случае вероятностное множество A в X определяется характеристической функцией:

$$\mu_A : x\Omega(x,\omega) \to \mu_A(x,\omega) \in Q_c \qquad (4.5)$$

где $\mu_A(x)$ является (B,B_c) измеренной функцией носителя каждого фиксированного $x \in X$.

Следует учесть, что понятие нечеткое множество связано с центральным понятием так называемой альтернативной теории множеств [11]- понятием полумножества. Одновременно как множество предполагает наличие определенных границ принадлежности и непринадлежности. Но полумножество является более широким понятием, не имеющим максимальных и минимальных элементов, а следовательно и фиксированных значений принадлежности. В альтернативной теории множеств четко разграничиваются понятия множества и класса. Понятие класса является более общим, чем понятие множества. Свойство объектов $\mu(x)$ определяется класс $\{x,\mu(x)\}$. Полумножеством называется собственный класс (не множество), являющийся подклассом некоторого множества X:

$A = \{x,\mu(x)\} \subset X$. Поскольку при определении полумножества не используется отношение принадлежности элементов множеству, этот математический объект является более общим, чем нечеткое множество. Но для практических применений полумножество следует ввести функциональные ограничения на принадлежность и аппроксимируемость полумножества нечеткими множествами. Способы приближения полумножества нечеткими множествами описаны в [56, 58]. Приведем наиболее важные понятия теории нечетких множеств.

Определение 4.7. Два нечетких множества равны, если равны их функции принадлежности:

$$\forall x \in R; \mu_A(x) = \mu_B(x) \leftrightarrow A = B \qquad (4.6)$$

Одни нечеткие множества могут быть подмножествами других множеств.

Определение 4.8. Нечеткие множество *A* есть подмножество нечетких множеств тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) \le \mu_\beta(x)$ для любых $x \in X$

$$A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) \le \mu_B(x), \quad \forall x \in X \qquad (4.7)$$

Пример 4.2 $X = \{1,2,3,......10\}$, если

$A = \{0{,}3/3; 0{,}2/4; 0{,}6/5; 0{,}6/7; 0{,}5/8\}$

$B = \{0{,}1/1; 0{,}4/3; 0{,}4/40; 0{,}6/5; 0{,}8/7; 0{,}9/8; 0{,}6/9\}$,то $A \subset B$

Определение 4.9. Множество A_α будем называть нечетким множеством α-уровня, если оно образует совокупность таких элементов $x \in X$, степень принадлежности которых множеству *A* больше или равно $\alpha \in (0{,}1]$

$$\widetilde{A}_\alpha = \{x / \mu_A(x) \ge \alpha; \ \forall x \in X\} \qquad (4.8)$$

Пример 4.3

$\widetilde{A} = \{3/0{,}2 + 8/0{,}3 + 11/0{,}5 + 15/0{,}6 + 20/0{,}8\}$

$\widetilde{A}_{0,3} = \{8/0{,}3 + 11/0{,}5 + 15/0{,}6 + 20/0{,}8\}$

Справедливо следующее свойство:

$A_{\alpha_1} \subset A_{\alpha_2} \leftrightarrow \alpha_2 \ge \alpha_1$

Справедлива теорема о декомпозиции.

Всякое нечеткое множество $\widetilde{A}$ можно разложить на произведение подмножеств по коэффициентам α_i:

$$\widetilde{A} = \max_{\alpha_i}\left[\alpha_1 A_{\alpha_1}, \alpha_2 A_{\alpha_2}, ..., \alpha_n A_{\alpha_1}\right] \qquad (4.9)$$

$0 < \alpha_i \le 1, \ (i = 1,2,...,n)$

Доказательство следует непосредственно:

$$\mu_{A_{\alpha_i}}(x)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ \mu_A(x)\geq\alpha_i\\0,\ \text{если}\ \mu_A(x)<\alpha_i\end{cases}$$

Таким образом, функцию принадлежности $\widetilde{A}$ можно записать в виде:

$$\underset{\max\limits_{\alpha_i}[\alpha_i A_{\alpha_i}]}{\mu(x)}=\max_{\alpha_i}[\alpha_i A_{\alpha_i}]=\max_{\alpha_i\leq\mu_A(x)}[\alpha_i]=\mu_A(x)$$

Разложение нечеткого множества в виде (4.9) называется декомпозицией нечеткого множества *A*.

Пример 4.4. Пусть $\mu_{\widetilde{A}}(x)=1-\dfrac{1}{1+x^2};\ x\in R^+$

Рассматривая интервал $[\alpha;1]$, где $0<\alpha\leq1$, можно записать:

$$\mu_{\widetilde{A}_{\alpha_i}}(x)=\begin{cases}1,\ \textit{если}\ \ \mu_{\widetilde{A}}(x)\in[\alpha;1]\\0,\ \text{если}\ \ \mu_{\widetilde{A}}(x)\notin[\alpha;1]\end{cases}$$

Таким образом, в данном примере

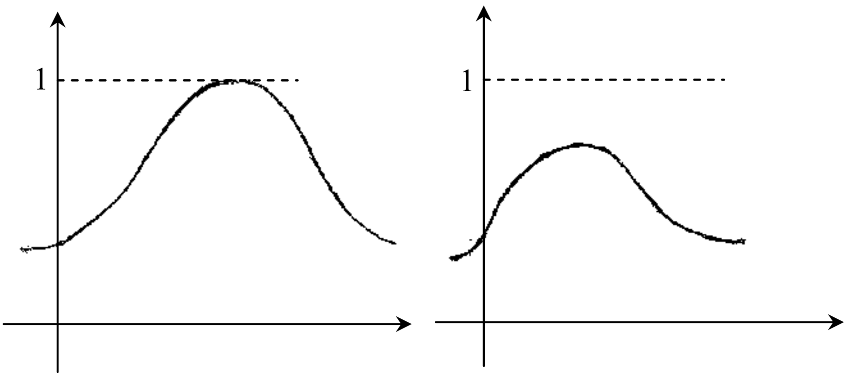
$$\mu_{A_\alpha}(x)=\begin{cases}1,\ \textit{если}\ \ x\geq\sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}\\0,\ \text{если}\ \ x<\sqrt{\dfrac{\alpha}{1-\alpha}}\end{cases}$$

Определение 4.10. Высотой нечеткого множества *A* будем называть верхнюю границу функции принадлежности элементов множества *A*:

$$hgt(A)=\underset{x\in X}{sub}\,\mu_A(x) \tag{4.10}$$

Определение 4.11. Нечеткое множество *A* называется нормальным, если существует хотя бы один $x\in X$, для которого $\mu_A(x)=1,$ т.е. если *hgt(A)=1*, в противном случае *(hgt(A)<1)* нечеткого множества называется субнормальным.

Определение 4.12. Множество A называется пустым множеством, если для $\forall x \in X, \mu_A(x) = 0$ и обозначается $A = \varnothing$.



Нормальное нечеткое множество

Субнормальное нечеткое множество

Рис.4.1

Определение 4.13. Точкой перехода нечеткого множества A называется такой элемент $x \in X$, для которого

$$\mu_A(x) = 0{,}5 \qquad (4.11)$$

Пример 4.5. *[29]* Пусть X представляет собой интервал [1;100] и переменная x принимает значения из этого интервала. Интерпретируя возраст как нечеткое подмножество множества X, обозначает термин «старость» можно определить функцию принадлежности в виде

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 < x \le 50 \\ 1, & \text{при} \left(1 + \left(\dfrac{x-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} \quad \text{при } 50 < x \le 100 \end{cases}$$

В этом примере носителем нечеткого множества старость является интервал [50;100]. Высота множества старость близка к 1, а точкой перехода является возраст x=55.

Четкое множество, близкое к нечеткому множеству, определяется как:

$$\mu_{A^*}(x)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ \mu_A(x)<0{,}5\\ 1,\textit{если}\ \mu_A(x)>0{,}5\\ 0\ \textit{или}\ 1,\ \textit{если}\ \mu_A(x)=0{,}5\end{cases}$$

Определение 4.14. Нечеткое множество A в пространстве $X=R^n$ называется выпуклым нечетким множеством тогда и только тогда, когда его функция принадлежности выпукла, т.е. для каждой пары $x,\ y\in X$ и для всех $\lambda\in[0;1]$ удовлетворяет неравенство:

$$\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq min(\mu_A(x),\mu(y)) \qquad (4.13)$$

Определение 4.15. Если X есть конечное универсальное множество и A - нечеткое множество, порожденное X, то мощность нечеткого множества A определяется как:

$$|A|=\sum_{x\in X}\mu_A(x) \qquad (4.14)$$

Если X – бесконечное множество, то $|A|$ не всегда существует. Однако, если A имеет конечный носитель, то мощность нечеткого множества A определяется как:

$$|A|=\sum_{x\in surrA}\mu_A(x) \qquad (4.15)$$

Определение 4.16. Точку M будем называть нечеткой точкой действительной R, если значений функции принадлежности ее прямой R принимает значение из (0;1), т.е.

$\mu_R(M)<1$. В противном случае, если $\mu_R(M)=1$, то точка M называется четкой точкой действительной прямой *R*. Например: $M_1=0,8/2$ – нечеткая точка, $M_2=1/4$ – четкая точка.

Определение 4.17. Интервал (отрезок прямой, полуинтервал) действительной прямой будем называть нечетким интервалом (нечетким отрезком, нечетким полуинтервалом), если значения функции принадлежности всех точек действительной прямой, образующих его носитель, принимают значения (≤ 1).

Пример 4.6.

(-2;3)=0,1/(-2;-1]+0б4/(1;0)+0,6[0;1)+1/[1;2]+0,6/(2;3) есть нечеткий интервал действительной прямой.

Отдельные авторы [1] вводят следующее определение нечеткого интервала.

Определение 4.18. Если граница интервала является нормальным выпуклым нечетким множеством, то оно называется нечетким интервалом.

Легко доказать, что это определение является частным случаем определения 4.17, т.е. из определения 4.17 следует определения 4.18.

Следует отметить, что нечеткие интервалы могут определяться либо с помощью выбора четкого интервала для формирования ядра, от которого функция принадлежности уменьшается до нуля, или посредством выбора двух нечетких чисел в качестве концов интервала. Вообще, можно построить нечеткий регион, окруженного нечеткой переходной зоной, в которой функция принадлежности уменьшается до нуля монотонно.

Альтернативный способ представления нечеткой области – это определение нечеткой гиперповерхности, формулирующий его границу.

Такая граница гиперповерхности своего ядра, при удалении от которого значения функции принадлежности, монотонно убывает во всех направлениях.

Определение 4.19. Нечеткое множество, носитель которого состоит из одной точки, называется синглтонной.

Замечание. Близким к идеям альтернативной теории множеств является недоопределенное множество, описываемое четверкой $N = \{A^+, A^-, M_x, M_n\}$ [55]. Здесь множества A^+ и A^- - суть конечного подмножества универсального множества X, причем A^+ - есть множество элементов $x \in X$, которые точно принадлежат множеству A, а A^- множество элементов $x \in X$, которые точно не принадлежат множеству A. Натуральные числа M_x и M_n – выражают соответственно верхнюю и нижнюю оценку мощности множества A. Это определение, моделирующее неполные сведения о конкретной совокупности A элементов некоторого универсума X, неявно задает трехзначную функцию принадлежности

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, \text{ для } A^+ \\ 0, \text{ для } A^- \\ ?, \text{для } X/\left(A^+ \cup A^-\right) \end{cases}$$

Естественным обобщением N является переход к паре $N = \left\{\mu_A, \left|\overline{\overline{\mu_A}}\right|\right\}$, где μ_A - функция принадлежности $x \in X$ множеству A, а $\left|\overline{\overline{\mu_A}}\right|$ характеризует возможность для элементов натурального ряда быть значением мощности множества A.

§2. Операции над нечеткими множествами

Определение 4.20. Дополнением нечеткого множества А будем называть нечеткое множество $\overline{A}$ (или же $\neg A$), определеное следующим образом:

$$\forall x \in X,\ \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (4.16)$$

Пример 4.7. Если X={1,2,3,. . . 10},
A=0,2/1+0,4/3+0,8/4+1/6+0,6+0,6/7, то

$$\neg A = \overline{A} = 0{,}8/1 + 1/2 + 0{,}6/3 + 0{,}2/4 + 1/5 +$$
$$+ 0{,}4/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10$$

Следует отметить, что операция дополнения соответствует логическому отрицанию.

Определение 4.21. Если А обычное четкое подмножество множества X, то пара (A, $\overline{A}$) называется разбиением множества X,если $A \neq \varnothing$, $A \neq X$

Определение 4.22. Если А-нечеткое подмножество множества X, причем $A \neq \varnothing$, то пара (A, $\overline{A}$)называется нечетким разбиением.

В примере 4.7. X=(A, $\overline{A}$)-есть нечеткое разбиение множества X.

Аналогично, если $A_1, A_2, \ldots A_n$ таковы, что для $\forall x \in X,\ \sum_{i=1}^{n} \mu_{A_i}(x) = 1$, то эта система называется нечетким разбиением множества X.

Определение 4.23. Если $A_1, A_2, \ldots A_n$-нечеткие подмножества универсального множества X, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$-неотрицательные вещественные коэффициенты $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$, то нечеткое множество А с функцией принадлежности

$\mu_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu_{A_i}(x)$ будем называть выпуклой комбинацией нечетких множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$.

Здесь подразумевается арифметическое суммирование.

Определение 4.24. Объединением нечетких множеств А и В будем называть такое множество С, функция принадлежности которого определяется следующим образом:

$$\forall x \in X, \quad \mu_C = max(\mu_A(x), \mu_\beta(x)) = \mu_{A \cup B}(x) \qquad (4.17)$$

Объединение соответствует логическое связи (или). Так, если А и В названия нечетких множеств, то А или В понимать нечеткое множество – Д, функция принадлежности которой определяется в виде:

$$\forall x \in X, \quad \mu_D = \mu_{A \cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_\beta(x)) \quad (4.18)$$

Операция пересечения соответствует логической связи (И) А и В= $A \cap B$

Пример 4.8. Если А=0,4/2+0,7/4+0,8/5+1/7+0,5/8, В=0,2/1+0,5/2+0,6/4+0,7/5+0,6/6+0,9/7+0,8/10, то

$$A \cup B = A + B = 0{,}2/1 + 0{,}5/2 + 0{,}7/4 + 0{,}8/5 +$$

$$+ 0{,}6/6 + 1/7 + 0{,}5/8 + 0{,}8/10$$

$$A \cap B = 0{,}4/2 + 0{,}6/4 + 0{,}7/5 + 0{,}9/7$$

Отметим, что операции ($\cup$,$\cap$) над нечеткими множествами удовлетворяют следующим свойствам [6]:

1) Нейтральность

$$min(1, \mu_A(x)) = \mu_A(x) \Rightarrow G \cap A = A$$

$$max(0, \mu_A(x)) = \mu_A(x) \Rightarrow \phi \cup A = A$$

2) коммутативность:

$$min(\mu_A(x),\mu_\beta(x))=min(\mu_\beta(x),\mu_A(x))=>A\cap B=B\cap A$$

$$max(\mu_A(x),\mu_\beta(x))=max(\mu_\beta(x),\mu_A(x))=>A\cup B=B\cup A$$

3) ассоциативность:

$$min(min(\mu_A(x),\mu_\beta(x),\mu_c(x))=$$

$$=min(\mu_A(x),min(\mu_\beta(x),\mu_c(x))=>$$

$$=>(A\cap B)=A\cap(B\cap C)$$

$$max(max(\mu_A(x),\mu_\beta(x),\mu_c(x))=$$

$$=max(\mu_A(x),max(\mu_\beta(x),\mu_c(x))=>$$

$$=>(A\cup B)=A\cup(B\cup C)$$

4) монотонность:

$$\mu_A(x)\le\mu_c(x)\wedge,\mu_{\beta c}(x)\le\mu_D(x)=min(\mu_A(x),\mu_{\beta c}(x))\le$$

$$\le min)=\mu_c(x),\mu_D(x))=>A\subset C\cap B\subset D=A\cap B=C\cap D.$$

$$max(\mu_{AA}(x),\mu_{\beta c}(x)\le max(\mu_C(x)\mu_D(x)=>$$

$$A\subset C\cap B\subset D=>A\cup B\subset C\cup D$$

5)идемпотентность:

$$min(\mu_A(x),\mu_A(x)=\mu_A(x)=>A\cap A=A$$

$$max(\mu_A(x),\mu_A(x)=\mu_A(x)=>A\cup A=A$$

6)дистрибутивность:

$$min\,\mu_A(x),max\,\mu_B(x),\mu_C(x)=max(min(\mu_A(x),\mu_B(x))$$

$$min(\mu_A(x),\mu_C(x))=>A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$$

$$max(\mu_A(x),\mu_C(x))=>A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$$

7) поглощение

$$min(\mu_A(x),max\,\mu_A(x),\mu_{BC}(x)))=\mu_A(x)=>A\bigcap(A\bigcup B)=A$$

$$max(\mu_A(x),min(\mu_A(x),\mu_B(x)))=\mu_A(x)=>A\bigcup(A\bigcap B)=A$$

8) Закон Деструкция Моргана:

$$1 - min(\mu_A(x), max\,\mu_B(x) =$$

$$= max(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \Rightarrow \overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$$

$$1 - max(\mu_A(x), \mu_B(x)) =$$

$$= min(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)) \Rightarrow \overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$$

9) двойное отрицание: $1 - (1 - \mu_A(x) = \mu_A(x) \Rightarrow \overline{\overline{A}} = A$

10) Отрицание основного и пустого множеств:

1-1=0=>G=ϕ

1-0=1=>ϕ=G

Для объединения и пересечения нечетких множеств можно пользоваться и другими операторами.

Определение 4.25. Алгебраическим произведением нечетких множеств А и В будем называть множество С, функция принадлежности которой определяется в виде:

$$\mu_c(x) = \mu_{AB}(x) = \mu_A(x), \mu_B(x)\,для \forall x \in X \quad (4.19)$$

Для нечетких множеств А и В примера 4.8

Имеем:

AB=0,2/2+0,42/4+0,56/5+0,9/7

Алгебраическое произведение обозначается

$$AB = \sum_x \mu_A(x)\mu_B(x)/x \quad (4.20)$$

Из (4.20) следует, что для любого нечеткого множества А, где m-положительное число, A^mследует понимать так

$$A^m = \sum_x [\mu_A(x)]^m / x$$

Определение 4.26. Нечеткое множество, возникшее в результате возведения в степень (с помощью оператора концетрирования нечеткого множества)

$$con_m A = \{[\mu_A(x)]^m / x\}; \qquad \forall x \in X \quad (4.21)$$

будем называть концентрацией нечеткого множества А, а нечеткое множество, возникшее в результате извлечения из корня

$$dit_m A = \{ \sqrt[m]{\mu_A(x)} / x, \quad \forall x \in X \} \qquad (4.22)$$

будем называть расширением нечеткого множества А.
Пример 4.9. A={0,01/2;0,25/3;0,36/5;0,6/7} и m-2. Тогда
con_2A={0,0001/2;0,625/3;0,1296/5;0,36/7}
dit_2A={0,1/2;0,5/3;0,6/5;0,77/7}
Следствие 4.1. Так как соотношение
$[\mu_A(x)]^m \le \mu_A(x) \le \sqrt[m]{\mu_A(x)}$ справедливо и соотношение $con_m A \subset A \subset dim\, A$

Следствие 4.2. Так как $A \subset B$ тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ для $\forall x \in X$, то $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x)$ для $\forall x \in B$, т.е. функция принадлежности множества В фактически не учавствует в определении $\mu_{A \cap B}(x)$.

Определение 4.27. Алгебраической суммой нечетких множеств А и В будем называть множжество С, функция принадлежности которой оопределяется в виде:

$$\mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x), \ \forall x \in X \quad (4.23)$$

Пример 4.10. Если
A={0,1/1;0,4/3;0,63/4;0,82/5;1/7;0,9/8;0,7/9;0,5/10} и
B={0,35/3;0,5/4;0,25/5;0,7/6;0,8/7;0,2/8;0,15/9;0,1/10;0,005/11}, тогда

$$A \overset{\wedge}{+} B =$$

$$= \{0{,}1/1;0{,}61/3;0{,}825/4;0{,}87/5;0{,}7/6;1/7;0{,}92/8;$$

$$0{,}75/9;0{,}54/10;0{,}005/11\}$$

Определение 4.28. Ограниченной суммой нечетких множеств А и В будем называть множество А«+»В, функция принадлежности которой определяется в виде:

$$\mu_{A \oplus B}(x) = \min[1, \mu_A(x) + \mu_B(x)] \text{ для } \forall x \in X \qquad (4.24)$$

Пример 4.11. Если
A={0,2/1;0,35/2;0,4/3;0,5/4;0,7/6;0,8/7;0,45/8;1/9;0,6/10} и
B={0,3/2;0,7/3;0,45/4;0,4/5;0,2/6;0,15/7;0,1/8;0,05/9}
Тогда
$A \oplus B$={0,2/1;0,6/2;1/3;0,95/4;0,4/5;0,9/6;0,95/7;1/8;1/9;0,6/10}

Определение 4.29. Ограниченным произведением нечетких множеств A и B будем называть нечеткое множество $A \otimes B$, если ее функция принадлежности определяется в виде:

$$\mu_{A \otimes B}(x) = max[0; \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1]; \forall x \in X \quad (4.25)$$

Пример 4.12. Для нечетких множеств A и B из примера 4.11

$$A \otimes B =$$

$$= \{0/1;0/2;0{,}1/3;0/4;0/5;0/6;0/7;0{,}05/8;0{,}05/9;0/10\}$$

Определение 4.30. Ограниченной разностью нечетких множеств A и B называется нечеткое множество $(A|-|B)$, функция принадлежности которой определяется в виде:

$$\mu_{A|-|B}(x) = max[0; (\mu_A(x) - \mu_B(x))], \ \forall x \in X \quad (4.26)$$

Пример 4.13.

$A = (0{,}3a + 0{,}5b + 0{,}8c + 0{,}9d + m + 0{,}8n + 0{,}45k + 0{,}1p)$ и

$B = (0{,}4a + 0{,}3b + 0{,}5c + d + 0{,}8m + 0{,}6n + 0{,}3k + 0{,}2p + 0{,}1q)$

Определение 4.31. Симметрической разностью нечеткого множества A и B будем называть нечеткое множество $(A \nabla B)$, функция принадлежности которой определяется в виде:

$$\mu_{A \nabla B}(x) = |\mu_A(x) - \mu_B(x)| \quad , \ \forall x \in X \quad (4.27)$$

Пример 4.14.
A={0,08/1+0,25/2+0,45/3+0,7/4+0,85/5+0,9/5+0,9/7+1/8+0,92/9+0,8/10}

B={0,03/5+0,09/4+0,1/5+0,25/7+0,38/7+0,38/9+0,55/10+0,7/11+0,9/12}

$(A \nabla B)$={0,08/1+0,25/2+0,42/3+0,61/4+0,75/5+0,65/7+1/8+0,54/9+0,25/10+0,7/11++0,9/12}

Определение 4.32. Декартово произведение нечетких множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$ будем называть нечеткое множество $(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)$, являющееесянечетким помножеством множества $(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n)$, функция рпинадлежности которого определяется в виде:

$$\mu_{A_1 x \ldots A_n}(x_1, \ldots x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{A_n}(x_n) \qquad (4.28)$$

Поэтому

$$(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \bigcup_{x_1 \ldots x_n} (\mu_{A_1}(x_1) \wedge \ldots \wedge \mu_{A_n}(x_n)) / x_1 \ldots . x_n$$

Пример 4.15. Если $X_1 = X_2 = \{2+4+6+8\}$

A_1={0,4/2+0,7/4+1/6+0,6/8}

A_2={0,5/4+0,8/6+1/8}, тогда

$$(A_1 \times A_2) = \{0{,}4/2 \cdot 4) + 0{,}5/(4 \cdot 4) + 0{,}5/(6 \cdot 4) +$$
$$+ 0{,}5/(8 \cdot 4) + 0{,}4/(2 \cdot 6) + 0{,}7/(4 \cdot 6) +$$
$$+ 0{,}8/(6 \cdot 6) + 0{,}6/(8 \cdot 6) + 0{,}4/(2 \cdot 8) +$$
$$+ 0{,}7/(4 \cdot 8) + 1/(6 \cdot 8) + 0{,}6/(8 \cdot 8)\}$$

Определение 4.33. Опрератор F, преобразующий обычное (не нечеткое) множество в нечеткое множество, будем называть оператором увеличения нечеткости.

Из этого определения следут, что если оператор увеличения нечеткости F действует на нечеткое подмножество универсального множества X, то полученное множество F(A,K), где K-ядро оператора F, также есть нечеткое множество вида:

$$F(A,K) = \bigcup_x \mu_A(x)/K(x) \qquad (4.29)$$

То есть, результатом действия оператора F на одноточеченое множество {1/x} есть
$K(x) = F(1/x, K)$

Пример 4.16.
X={1+2+3+4}; A={0,8/1+0,6/2}
K(1)=1/1+0,4/2; K(2)=1/2+0,4/1+0,4/3
Из определения 4.30 следует, что оператор увеличения нечеткости является оператором сжатия (сужения или концентрации) нечеткого множества.

Определение 4.34. Если $A_1, A_2, \ldots A_n$ - нечеткое множество в $X_1, X_2, \ldots, X_n$ соответственно, то кортезитивным произведением нечеткого множества в пространстве $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, функция принадлежности которого определяется в виде:

$\mu_{A, A_2 \ldots A_n}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mu_{A_1}(x_1), \ldots . \mu_{A_n}(x_n)]$ или же

$$\mu_{A, A_2 \ldots A_n}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), \ldots . \mu_{A_n}(x_n) \qquad (4.30)$$

Пример 4.17.
A={20/0,1+21/0,3+22/0,4}
B={60/0,33+65/0,45+70/0,78}

$$R = A \times B = [(20 \cdot 60) + (20 \cdot 65) + (20 \cdot 70)]/0{,}1 +$$
$$+ [(21 \cdot 60) + (21 \cdot 65) + (21 \cdot 70)]/0{,}3 + (22 \cdot 60)0{,}33 +$$
$$+ (22 \cdot 65)/0{,}45 + (22 \cdot 70)/0{,}4$$

Иллюстрация основных операций над нечеткое множество приведено в таблице 4.1.

Отметим, что определение операций дополнение, объединение, пересечение и т.д. для нечеткого множества типа 2 сопровождается с использованием принципа обобщения . Однако удобнее выполнить это в два этапа:

сначала обобщить это определение для нечеткого множества типа 1 на нечеткие множества, значений функции принадлежности которых являются интервалы, а затем используя принцип обощения в форме множеств уровня перейти от интервалов к нечетким множествам.
Проиллюстрируем этот метод на примере обощения понятия пересечения на нечеткое множество типа 2.
Пусть А и В есть нечеткие подмножества типа 1 множества X. Тогда

$$\mu_{A \cap B}(x) = min[0;(\mu_A(x)\mu_B(x))], \quad \forall x \in X$$

Если $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ есть интервалы на [0;1], т.е.если для фиксированного x $\mu_A(x) = [a_1;b_1]$ и $\mu_B(x) = [a_2;b_2]$, где a_1, a_2, b_1, b_2 зависят от x, то применяя принцип обощения [5] к функции (min) получим:

$$min([a_1;b_1];[a_2;b_2]) = [min(a_1;a_2), min(b_1;b_2)] \quad (4.31)$$

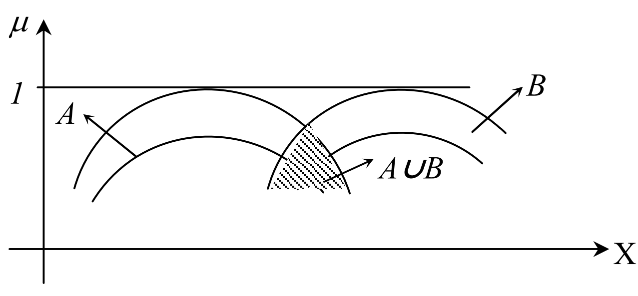
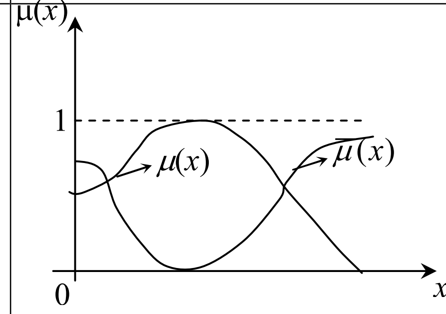
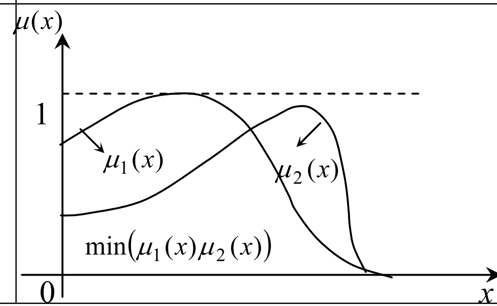
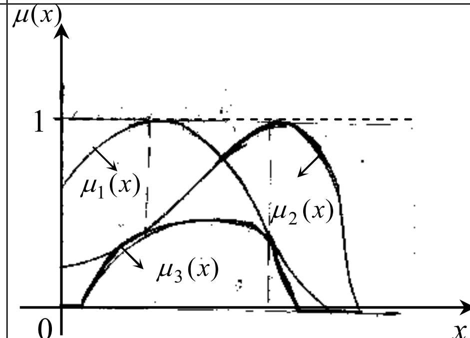
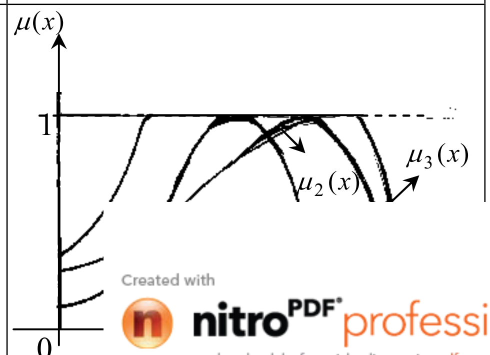
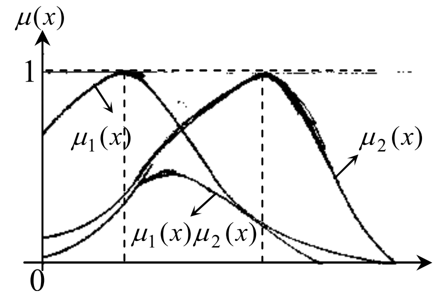
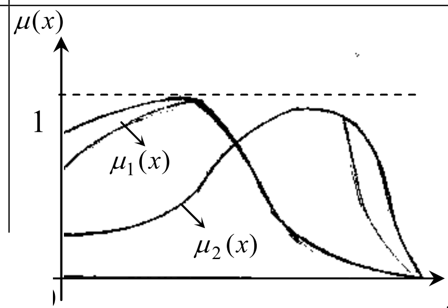


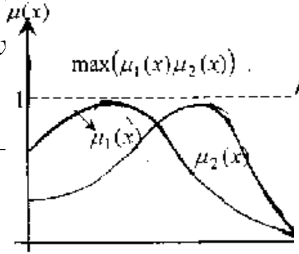
Рис.4.2

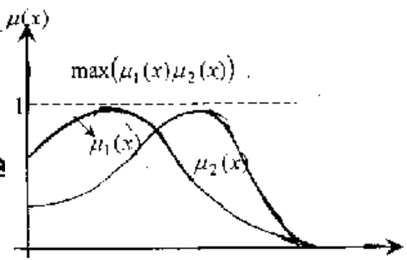
Таблица 4.1

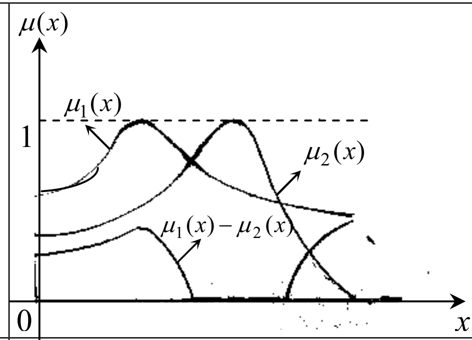
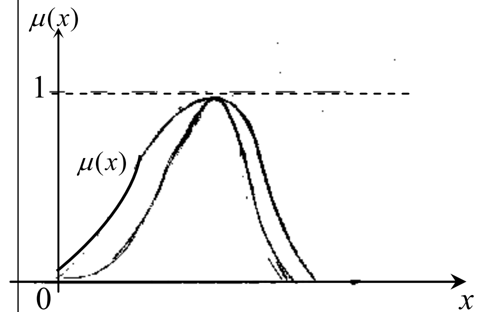
№	Название операций и символическая запись (в классе)	Символическая запись (в классе)	Графическое представление
1.	Дополнение $\ddot{\mu}(x) = 1 - \mu(x);\ \forall x \in X$	$\overline{A}_\alpha = X \setminus \bigcup\limits_{\beta \in [0;\alpha]} A(1-\beta)$ НЕ	
2.	Пересечение (минимум; невзаимодействующие переменные) $\mu_3(x) = (\mu_1 \wedge \mu_2(x))$ $= \min\limits_{\forall x \in X}(\mu_1(x); \mu_2(x))$	$A_3(\alpha) = A_1(\alpha) \cap A_2(\alpha)$ $\forall \alpha \in [0;1]$ И (И, …, И)	

3.	Объединение (максимум; невзаимодействующие переменные) $\mu_3(x)=(\mu_1\vee\mu_2)(x)=$ $=\max\limits_{\forall x\in X}(\mu_1(x);\mu_2(x))$	$A_3(\alpha)=A_1(\alpha)\cup A_2(\alpha)$ $\forall\alpha\in[0;1]$ ИЛИ (ЛИБО….ЛИБО)	O
4.	Ограниченное произведение $\mu_3(x)=(\mu_1\wedge\mu_2)(x)=$ $=\max\ \{\mu_1(x)+\mu_2(x)-1$ $\forall x\in X$	$A_3(\alpha)=\bigcup\limits_{\substack{\beta_1\beta_2\in[0;1]\\ \beta_1+\beta_2-1\ge\alpha}}(A_1(\beta_1)\cap A_2(\beta_2))$ $\forall\alpha\in[0;1]$ И	
5.	Ограниченная сумма $\mu_3(x)=(\mu_1\vee\mu_2)(x)=$ $=\min\limits_{\forall x\in X}\{1,\mu_1(x)+\mu_2(x)\}$	$A_3(\alpha)=\bigcup\limits_{\substack{1\ge\beta_1+\beta_2\ge\alpha\\ \beta_1\beta_2\in[0;1]}}(A_1(\beta_1)\cap A_2(\beta_2))$ $\forall\alpha\in[0;1]$ ИЛИ	

6.	Алгебраическое произведение $\mu_3(x) = (\mu_1 \cdot \mu_2)(x) =$ $= (\mu_1(x) \cdot \mu_2(x))$ $\forall \alpha \in [0;1]$	$A_3(\alpha) = \bigcup\limits_{\substack{\beta_1 \cdot \beta_2 \geq \alpha \\ \beta_1 \beta_2 \in [0;1]}} (A_1(\beta_1) \cap A_2(\beta_2))$ $\forall \alpha \in [0;1]$	
7.	Алгебраическая сумма $\mu(x) = \left(\mu_1 \hat{+} \mu_2\right)(x) =$ $= \mu_1(x) + \mu_2(x)$ $- \mu_1(x) \cdot \mu_2(x)$ $\forall \alpha \in [0;1]$	$A_3(\alpha) = \bigcup\limits_{\substack{\beta_1 + \beta_2 - \beta_1\beta_2 \geq \alpha \\ \beta_1 \beta_2 \in [0;1]}} (A_1(\beta_1) \cap A_2(\beta_2))$ $\forall \alpha \in [0;1]$ ИЛИ	





8.	Разность $\mu_3(x) = \mu_1(x)\cdot\mu_2(x) =$ $= \max\{0; \mu_1(x) - \mu_2(x)\}$ $\forall x \in X$	$A_3(\alpha) = \bigcup\limits_{\substack{\beta_1-\beta_{2_2}\ge\alpha\\ \beta_1\beta_2\in[0;1]}} \left(A_1(\beta_1)\cap A_2(\beta_2)\right)$ $\forall\,\alpha \in [0;1]$	
9.	Концентрирование $\mu_3(x) = \mu^2(x)$ $\forall x \in X$	очень	

Таким образом, если значения функции принадлежности подмножеств A и B есть интервалы на [0;1], то пересечение этих множеств имеет функцию принадлежности, значения которой так же являются интервалом.

Пусть теперь для каждого $x \in X$, $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ есть нечеткие подмножества множества [0;1]. Для простоты предположим, что эти подмножества выпуклы, т.е. множество уровня есть интервалы. Иными словами, предположим, что для каждого $\alpha \in [0;1]$ множества α-уровня нечетких подмножеств A и B описываются функциями принадлежности $\mu_A^\alpha(x)$ и $\mu_A^\alpha(x)$, значениями которых являются интервалы.

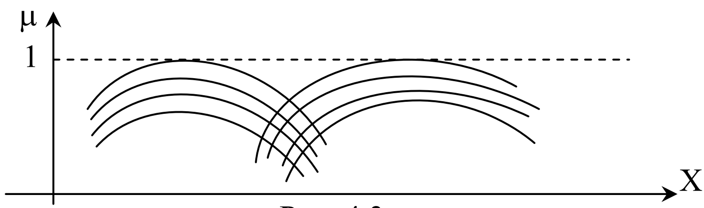


Рис. 4.3

Применяя принцип обощения в форме

$A = \bigcup\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha A_\alpha$ к множествам α-уровня нечетких подмножеств A и B называется множество, функция принадлежности которого $\mu_{A \cap B}$ определяется в виде:

$$\mu_{A \cap B}(x) = min(\mu_{A_\alpha}(x)\mu_{B_\alpha}(x)), \quad \forall x \in X \text{ и } \forall \alpha \in [0;1] \quad (4.32)$$

При этом $(A \cap B) = \bigcup\limits_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha(A_\alpha \cap B_\alpha)$

В заключении приведем перечень свойств множества нечетких подмножеств.

Если A, B, C –нечеткие подмножества универсального множества X, то справедливы следующие свойства

$$\left.\begin{aligned} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{aligned}\right\}\text{-коммутативность}$$

$$\left.\begin{aligned} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{aligned}\right\}\text{ассоциативность}$$

$$\left.\begin{aligned} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{aligned}\right\}\text{идемпотентность}$$

$$\left.\begin{aligned} (A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}\right\}\text{дистрибутивность}$$

$A \cap \phi = \phi$

где ϕ-обычное множество, таоке, что $\forall x_i \in E,\ \mu_\phi(x_i) = 0,\ A \cup \phi = A,$

$A \cap E = A$, где E-обычное множсетво, такое, что $\forall x_i \in E,\ \mu_E(x_i) = 1$

$A \cup E = E$

$(\overline{\overline{A}}) = A$-инволюция

$$\left.\begin{aligned} \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}\right\}\text{-теорема деструкция Моргана для}$$

нечетких множеств.

Отметим, что в отличии от обычных (четких множеств)

Для нечетких множеств не выполняются условия
$A \bigcap \overline{A} = \phi$ и $\overline{A} \bigcup A = E$

§3 Принцип обобщения

Принцип обобщения как одна из основных идей теории нечетких множеств имеет эвристический характер и позволяет расширить область определения исходного отображения на класс нечетких множеств, а также обощить определения операций над нечетким множеством типа 2 и выше [29-31]. Оно, в сущности, представляет собой основное равенство, позволяющее расширить область определения отображения или отношения, включив в нее наряду с точками произвольные нечеткие подмножества универсального множества X.

Пусть $\varphi : X \to Y$ -заданное отображение, а А - нечеткое множество в У с функцией принадлежности

$$\mu_B(y) = \underset{x \in \varphi^{-1}}{sur}\, \mu_A(x), \quad y \in Y$$

где $\varphi^{-1}(y) = \{x \in X \varphi(x) = y\}$. В случае нечеткого отображения $\varphi : X \to Y$ имеем:

$$\mu_B(y) = \underset{x \in X}{sur} \min\{\mu_A(x), \mu_\varphi(x, y) \tag{4.33}$$

Конкретное, если $A \subset X$ подмножество вида: $A = \{\mu_1 / x + \mu_2 / x_2 + ... + \mu_n / x_n\}$. Тогда принцип обобщения утверждает, что

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \{\mu_1 / x + \mu_2 / x_2 + ... + \mu_n / x_n\} = \\ &= \mu_1 \varphi(x_1) + \mu_2 \varphi(x_2) + ... + \mu_n \varphi(x_n) \end{aligned} \tag{4.34}$$

Итак, образ множества А можно получить, зная образы элементов при этом отображении.

Пример 3.18. Пусть X={1+2+….+10}

φ-оператор возведения в куб,

A={1/1+1/2+0,8/3+0,6/4+0,4/5}. Тогда учитывая (4.34) имеем:

$\varphi(A) = \{1/1 + 1/8 + 0{,}8/27 + 0{,}6/64 + 0{,}4/125\}$

Если носитель нечеткого множества имеет мощность континиум, то

$$A = \bigcup_x \mu_A(x)/x \qquad x \in X \tag{4.35}$$

При этом принцип обобщения означает следующее:

$$\varphi(A) = \varphi(\bigcup_x \mu_A(x)/x) = \bigcup_y \mu_A(x)/\varphi(x) \tag{4.36}$$

При этом необходимо учесть, что $\varphi(x)$ точки множества $y_{\alpha a}\mu_A(x)$-степень принадлежности $\varphi(x)$-нечеткому подмножеству $\varphi(A)$ множества У.

В некоторых случаях принцип обобщения удобно использовать в другой форме, которая получается из (4.36) путем разложения А не на одноточечные нечеткие множества, а на соответствующие ему множества уровней:

$$A = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha A_\alpha$$

В этом случае принцип обобщения выражаются в следующей форме:

$$\varphi(A) = \varphi(\sum_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha A_\alpha) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha\varphi(A_\alpha) \tag{4.37}$$

Если носитель А имеет мощность континиум, то

$$\varphi(A) = \varphi\left(\bigcup_{\alpha=0}^{\alpha=1} \alpha A_\alpha\right) = \bigcup_\alpha \alpha\varphi(A_\alpha) \tag{4.38}$$

Замечание 4.3. Принцип обобщения в форме (4.41) позволяет расширить область определения отображения

φ, включив в себя наряду с точками и произвольные нечеткие подмножества множества X. Принцип обобщения в форме (4.38) позволяет рассмотреть область определения отображения φ, включив в нее наряду с обычными (не нечеткими) подмножествами X произвольные нечеткие подмножества X.

Следует отметить, что (4.36) и (4.38) эквивалентны, поскольку (4.38) вытекает из (4.36), если перегруппировать члены в различные множества A.

Замечание 4.4. Принцип обобщения аналогичен принципу суперпозиции для линейных систем, согласно которому, если L-линейная система и $x_1, x_2, ..., x_n$-входные сигналы, то откликом (изображением, образом) системы L на любую линейную комбинацию $x = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + ... + \gamma_n x_n$, где γ_i $(i = 1, n)$-постоянные коэффициенты, являются:

$$\begin{aligned} L(x) &= L(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + ... + \gamma_n x_n) = \\ &= \gamma_1 L(x_1) + \gamma_2 L(x_2) + ... + \gamma_n L(x_n) \end{aligned} \tag{4.39}$$

Существенное различие между (4.39) и (4.34) состоит в том, что в (4.34) знак (+) означает объединение, а не арифметическую сумму и φ не ограничивается только линейным отображением.

Следует отметить, что во многих приложениях принципа обобщения возникает следующая проблема.

Имеется функция n-переменных

$f: x_1 \times x_2 \times ... \times x_n \to y_n$ нечеткое множество (отношение) A в $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, характеризующаяся функцией принадлежности $\mu_A(x_1,..x_n)$ $(x_i \in X_i,\ i = \overrightarrow{1,n})$.

Непосредственное применение принципа обобщения (4.36) в этом случае дает:

$$f(A)f\left(\bigcup_{(x_1 \dots x_n)} \mu_A(x_1,\dots x_n)/x_1,\dots x_n\right)= \\ =\bigcup_y \mu_A(x_1,\dots,x_n)/f(x_1,\dots x_n) \quad (4.40)$$

Однако во многих случаях нам бывает известно не само множество А, а его проекции $A_1, A_2, \dots A_n$ на $X_1, X_2, \dots, X_n$ соответственно. В связи с этим возникает вопрос: как выражение для μ_A следует использовать в (4.39)?

В этих случаях, если особенно не оговорено, будем предполагать, что функция принадлжености отноошения А имеет вид:

$$\mu_{A1}(x_1,\dots,x_n) = \mu_{A_1}(x_1) \wedge \mu_{A_2}(x_2) \wedge \dots\dots \wedge \mu_{A_n}(x_n) = \\ = min\, \mu_{A_i}(x_i) \quad (4.41)$$

где μ_{A_i} -функции принадлежности отношения A_i. Т.е. А есть наибольшее множество, проекции которого на $X_1, X_2, \dots, X_n$ суть $A_1, A_2, \dots A_n$ соответственно.

Пример 4.19. Пусть $X_1 = X_2 = \{1 + 2 + \dots. + 10\}$ и

$A_1 = \{\text{примерно } 2\} = \{0{,}6/1 + 1/2 + 0{,}6/3\}$

$A_2 = \{\text{примерно } 6\} = \{0{,}8/5 + 1/6 + 0{,}7/7\}$

f-операция возведения в квадрат.

$f(x_1, x_2) = x_1 \times x_2$ -арифметическое произведение. Используя (4.41) и применяя принцип обобщения (4.41) имеем:

$$2 \times 6 = \{0{,}6/1 + 1/2 + 0{,}6/3\} \times \{0{,}8/5 + 1/6 + 0{,}7/7\} =$$

$$= \{0{,}6/5 + 0{,}6/6 + 0{,}6/7 + 0{,}8/10 + 1/12 + 0{,}7/14 +$$

$$+ 0{,}6/15 + 0{,}6/18/0{,}6/21\}$$

§4 Размытые нечеткие множества

В [18] было предложено ввести в рассмотрение показатель неопределенности, который можно использовать для оценки классификации объектов, описываемых нечетким множеством. Там же были сформулированы основные свойства, которыми должен удовлетворять такой показатель, называемый показателем размытости нечетких множеств. В качестве этого показателя был предложен функционал, аналогичный шенновской энтропии в теории информации. В настоящее время существует большое количество работ, в которых рассматриваются различные подходы к определению показателя размытости нечетких множеств, обсуждаются их способы и возможные приложения [4, 5, 8, 19, 22, 29, 50, 71].

Можно выделить несколько аспектов, связанных с понятием показателя размытости нечетких множеств: 1) интерпретация показателя размытости как показателя внутренней неопределенности, двусмысленности, противоположности, обусловленных неполной, частичной принадлежностью объектов множеству; 2) интерпретация показателя размытости, как мера отличия нечеткого множества от обычного множества; 3) существование нетривиального показателя размытости, удовлетворяющего определенным свойствам, оказывается тесно связанным со свойствами самой алгебры нечеткое множество и характеризующее как алгебраическую структуру. Рассмотрим основные результаты, связанные с понятием показателя размытости нечеткого множества в соответствии этих трех аспектов.

I. Аксиоматический подход к определению показателей размытости нечеткого множества

Основные свойства, которым должны удовлетворятт показатели размытости нечеткого множества сформулированы в [16]. Можно привести список множества работ, в которых приведены различные модификации и дополнения этих свойств, положенные в основу аксиоматического определения показателя размытости нечеткого множества.

Показатель размытости нечеткого множества можно определить как меру внутренней неопределенности, двусмысленности объектов множества Х по отношению к некоторому свойству А, характеризующему эти объекты и определяющему в Х нечеткое множество объектов А. Если некоторый объект $x \in X$ обладает свойством А, но лишь в частичной мере $0 < \mu_A(x) < 1$, то внутренняя неопределенность, двусмысленность объекта х по отношению к свойству А проявляется в том, что он, хотя и в разной степени принадлежит сразу двум противоположным классам: классу объектов, обладающих свойством "А" и классу объектов, не обладающих свойству "А". Эта двусмысленность объекта *x* по отношению к свойству "А" максимальна, когда степень принадлежности объекта *x* обеим классам "А" и "не А" равны, т.е. $\mu_A(x) = 0{,}5$; $\mu_{неA}(x) = 1 - 0{,}5\mu_A(x) = 0{,}5$.

И наоборот, двусмысленность объекта минимальна, когда объект принадлежит только к одному из этих классов, т.е. либо $\mu_A(x) = 1$ $\mu_{неA}(x) = 0$, либо $\mu_A(x) = 0$; $\mu_{неA}(x) = 1$. Таким образом, глобальный показатель размытости нечеткого множества можно определить в виде функционала $F(x) \to R^+$, удовлетворяющего следующим условиям:

1. d(A)=0 тогда и только тогда, когда А-обычное множество;

2. d(A) принимает максимальное значение тогда и только тогда, когда $\mu_A(x) = 0{,}5;\ \forall x \in X$
3. d(A)<d(B), если A является заострением $B: \mu_A \le \mu_B$, т.е. $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ при $\mu_B(x) < 0{,}5; \mu_A(x) \ge \mu_B(x)$ при $\mu_B(x) > 0{,}5;$ и $\mu_B(x)$ любое при $\mu_B(x) = 0{,}5;$
4. d(A)=d($\overline{A}$) (симметричность по отношению к 0,5);
5. $d(A \bigcup B) + d(A \bigcap B) = d(A) + d(B)$, т.е. d-является оценкой на решетке F(x). (где всюду d-нечеткий квантор-степень отличия нечеткости от четкости или же показатель размытости).

Условие 4 представляется достаточно естейственным, а условие 5 приводит к адитивности показателя размытости d.

В[25] установлено, что условие 5 при конечном X выполняется для любой функции $d: F(x) \to R^+$ тогда и только тогда, когда d – допускает представление

$$d(A) = \sum_{i=1}^{N} T_i\left(\mu_A(x_i)\right) \tag{4.42}$$

где $T_i(y)$-вещественнозначные функции от $y \in [0;1]$ и N – число элементов множества $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

В [25], [26] предлагается усилить условие и потребовать наряду с условиями 1 и 2 строгого возрастания d. В условии 3 $d(A) < d(B)$, если A является заострением B и $A \ne B$. Тогда услови 2 окажется лишним, так как оно следует из условия 3, а из условия 3 и 5 следует, что условие 1 можно заменить на более простое: d (∅)=0, т.е. (∅)=0 для всех $x \in X$. Условия 5 и 6 d (∅)=0 эквивалентны условию q.7. $d(A \bigcup B) = d(A) + d(B)$, если $A \bigcap B = \varnothing$.

Итак, показатель размытости можно рассматривать как адаптивный (услови 7), симметричный условию 4 и строго возрастающий с увеличением размытости нечеткого множества (3) – функсионал, определенный на $F(x)$. Можно показать, что определенный на $F(x)$ вещественный функционал является показателем размытости на $F(x)$ тогда и только тогда, клгда он допускает представление (4.42), где для всех $j \in \{1,2,...N\}$ $T_i(y)$ - вещественные функции от $y \in [0;1]$ такие, что $T_i(0) = 0; T_i(y) = T_i(1-y)$, $T_i(y)$ -строго возрастает на интервале $[0;0,5]$.

Здесь предполагается, что $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$. По аналгогии с шенновской энтропией теории информации в [24] вводится логарифмическая энтропия нечеткого множества.

$$d(A) = K \sum_{j=1}^{N} S(\mu_A(x_i)) \tag{4.43}$$

где S-функция Шеннона

$$S(y) = -y \ln y - (1-y) \ln(1-y) \tag{4.44}$$

и К-положительная константа. В (4.44) полагается, что $S(0) = S(1) = 0$.

В [10] исследуются также свойства показателя размытости (3.42), в котором $T_i(y)$ имеет вид:

$$T_i(y) = h(y) + h(1-y) \tag{4.45}$$

где $h(y)$ -непрерывные и строго вогнутые функции в интервале [0;1] такие, что

$\lim\limits_{y\to 0} h(y) = \lim\limits_{y\to 1} h(y) = 0$. Этот показатель размытости связан с мощностью нечеткого множества $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_A(x_i)$ следующим образом $d(A) \le NT(P(A)/N)$

В (4.45) функции h могут быть записаны в виде $h(y) = yL(1/y)$, где L-непрерывная вогнутая функция в (1;+∞).

Выбор $L(y) = \ln(y)$ приводит к (4.43), а выбор $L(y) = 1 - 1/y$ приводит к функционалу

$$d(A) = \sum_{i=1}^{N} \mu_A(x_i)[1 - \mu_A(x_i)] \qquad (4.46)$$

Если моменты нечеткого множества определить в виде [10]:

$$M_h(A) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left\{\mu_A^K(x_i)[1-\mu_A(x_i)] + [1-\mu_A(x_i)]^K \mu_A(x_i)\right\},$$

$$K = 1,2,\dots,\infty,$$

то показатель размытости (4.46) будет моментом первого порядка, логарифмическая энтропия может может быть выражена через моменты следующим образом:

$$d(A) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k(A)}{K} \qquad (4.47)$$

Если отказаться от условия адитивности 5, то показатель размытости может быть задан как монотонно возрастающая функция

$$d(A) = F\left[\sum_{k=1}^{\infty} T_i(\mu_A(x_i))\right] \qquad (4.48)$$

Выбор конкретного показателя размытости зависит от условий задачи.

В [10], [16] рассмотрена связь между показателями размытости нечеткого множества и неопределенностью, возникающей при принятии решения, к какому из двух классов “А” или “не А” отнести объекты множества X.

Пример 4.20. Определить показатель размытости нечеткого множества.

$$A = \{1/0{,}2 + 3/0{,}4 + 4/0{,}8 + 5/0{,}9 + 6/1 +$$
$$+ 7/0{,}6 + 8/0{,}4 + 9/0{,}3 + 10/0{,}1\}$$

На основании (4.46) имеем:

$$d(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0 +$$
$$+ 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 1{,}35$$

В эвклидовом пространстве на основании (4.48) имеем:

$$d_A =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{10}} \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}2^2 + 0{,}1^2 + 0{,}4^2 + 0{,}4^2 + 0{,}3^2 + 0{,}1^2} =$$
$$= 0{,}61$$

II. Метрический подход к определению показателя размытости нечеткого множества.

Показатель размытости нечеткого множества можно определить как меру отличия нечеткого множества от ближайшего к нему обычного неразмытого множества с помощью метрики, введенной в $\Im(x)$ [44, 55]. Другой способ задания показателя размытости множества с помощью метрики – это определение его с помощью расстояния до максимального размытого множества. $A_{0,5}; \mu_{A_{0,5}}(x) = 0{,}5, \quad \forall x \in X$ и расстояния между нечетким множествами его дополнением. Оказывается, эти подходы имеют много общего между собой и определяемый с помощью метрики показатель размытости обладает многими ранее сформулированными свойствами.

Определение 4.35. Множество, ближайший к множеству $\widetilde{A}$ называется неразмытое множество А такое, что $\mu_A(x) = 0$ при $\mu_A(x) \le 0{,}5$ $\mu_A(x) = 1$ при $\mu_{\widetilde{A}}(x) > 0{,}5$. При этом

Определение 3.36. Показатель размытости называется функционал

$$d(A) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| \mu_{\widetilde{A}}(x_i) - \mu_A(x_i) \right|, \qquad (4.49)$$

который может быть представлен в виде:

$$d(A) = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} \mu_{A \cap \overline{A}}(x_i)$$

Если вместо расстояния Хемминга в (4.49) использовать евклидово расстояние, то:

$$d(A) = \frac{2}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\mu_A(x_i) - \mu_A(x_i) \right)^2} \qquad (4.50)$$

Здесь А и $\overline{A}$ -соответственно четкие множества, ближайшие к нечеткому множеству слева и справа.

Показатели (4.49) и (4.50) соответственно, вид (4.42) и (4.48) и удовлетворяют соответственно свойствам показателя размытости. В случае произвольной метрики.

$d(A) = \rho(A, \underline{A})$ удовлетворяет свойтсвам условия 1 и условия 3.

Показатель размытости можно задать с помощью расстояния между нечетким множеством и его дополнением.

$$d(A) = K[\rho(\phi, B) - \rho(A, \overline{A})]$$

где B(x)=1, $\forall x \in X$ и $\rho(A, \overline{A}')$ в случае метрики Хемминга имеет вид:

$$\rho(A,\overline{A}) = \sum_{i=1}^{N} \left|\mu_A(x_i) - \mu_{\overline{A}}(x_i)\right| = \sum_{i=1}^{N} \left|2\mu_A(x_i) - 1\right|$$

В общем случае такой показатель размытости удовлетворяет свойствам условий 1-4.

Показатель размытости можно задать функционалом [25,26].

$$d(A) = \frac{1}{2}\rho(\phi, B) - \rho(A, A_{0,5}),$$

который в общем случае удовлетворяет лишь свойствам 1, 2, 3.

Следует отметить, что свойства 1 и 2 в зависимости от определения показателя размытости не выполняеися для метрики.

$$\rho(A,B) = \sup_{x \in X} \left|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\right|$$

Пример 4.21.

Для $A = \{x_1/0{,}3 + x_2/0{,}8 + x_3/1 + x_4/0{,}6\}$ и

$B = \{x_1/0{,}8 + x_2/0{,}1 + x_3/0{,}1 + x_4/0\}$

$d(A,B) = |0{,}3 - 0{,}8| + |0{,}8 - 0{,}1| + |1 - 0{,}1| + |0{,}6 - 0| = 2{,}7$

III. Другие подходы к определению показателей размытости

В [26] предложено обобщение понятия неопределенности на случай M-ортогональных свойств, т.е. таких $A^j (j = \overrightarrow{1, M})$, что $\sum_{j=1}^{M} \mu_{A^j}(x) = 1$. Обычный показатель размытости получается при M=2. Этот обобщенный показатель неопределенности описывается для каждого $x \in X$ с помощью (4.45):

$$M(x) = \sum_{j=1}^{M} (\mu_{A^j}(x)) \qquad (4.51)$$

Этот показатель может использоваться при анализе процессов принятия решений на основе описания объектов с помощью М-ортогональных свойств.

Интересный вариант аксиоматизации показателей размытости предложен в [39], где рассмотрен класс С , дополненнный в алгебре нечетких множеств, введено понятие равновесного значения *c(x)=x* и дана расширенная интерпритация условия 3.

Условие 3‘. $\mu_A \le \mu_B$, если $\left|\mu_A(x) - C(\mu_A(x))\right| \ge \left|\mu_B(x) - C(\mu_A(x))\right|$

Для случая L-нечетких множеств, когда L-векторная решетка, показатель размытости (4.42) может быть представлено в виде:

$$d(A) = \begin{bmatrix} d_1(A) \\ d_2(A) \\ \dots\dots\dots \\ d_k(A) \end{bmatrix}$$

или его свертки $d(x) = \sum_{j=1}^{K} d_j(A)$, где $d(A_j)$- показатель размытости нечеткого множества $d(A_j)$ на случай произвольного множества X даются в работах [19, 8, 42]. Эти подходы основаны на понятиях сходящихся рядов, интеграла по мере и нечеткого интеграла.

В отдельную группу следует выделить показатели неопределенности в ситуации принятия решения, основанные на понятии мощности подмножества α-уровня нечеткого множества,

$$\left|A_\alpha\right| = \left|\{x \in X / \mu(x) \geq \alpha\}\right|$$

Примерами могут служить

$$T_\tau(\mu_A) = \int_0^{\alpha_{\max}} \frac{1}{\left|A_\alpha\right|} d\alpha$$

и двойственный ему показатель

$A_n(\mu_A) = 1 - T_\tau(\mu_A)$, а так же показатель неопределенности

$$W(\mu_A) = \int_0^1 \log_2 \left|A_\alpha\right| d\alpha$$

и связанная с ним мера прироста информации.

$$g(\mu_A, \mu_B) = W(\mu_B) - W(\mu_A) = \int_0^1 \log_2 \left|\frac{B_\alpha}{A_\alpha}\right| d\alpha,$$

где $A_\alpha = \{x \in X; \mu_A \geq \alpha\}$; $B_\alpha = \{x \in X;\ \mu_B \geq \alpha\}$

IV. Решетка нечеткого множества и связь показателя размытости с алгебраическими свойствами.

Определение 4.37. Пусть Е-универсальное множество. Предположим, что для каждой пары обычных подмножеств $\{x_i, x_j\}$ множества Е существует один и только один элемент Е-нижняя граница $\{x_i, x_j\}$ и существует один и только один элемент Е-верхняя граница $\{x_i, x_j\}$. В этом случае говорят, что Е-решетка или сетчатое множество [23, 43].

Если $x_i \Delta x_j$ и $x_i \nabla x_j$ -нижняя и верхняя границы $\{x_i, x_j\}$, то определение решетки можно записать:

$$(\forall X_i), (\forall X_j), (X_i \in E \text{ и } (X_j \in E)$$

$$\left.\begin{array}{l} \exists! X_k = X_i \Delta X_j \text{ и } X_k \in E \\ \exists! X_i = X_i \nabla X_j \text{ и } X_j \in E \end{array}\right\} \qquad (4.52)$$

Решетка обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta B = B\Delta A \\ A\nabla B = B\nabla A \end{array}\right\} \text{коммутативность} \qquad (4.53)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C \\ A\nabla(B\nabla C) = (A\nabla B)\nabla C \end{array}\right\} \text{ассоциативность} \qquad (4.54)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta A = A \\ A\nabla A = A \end{array}\right\} \text{идемпотентность} \qquad (4.55)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\Delta(A\nabla B) = A \\ A\nabla(A\Delta B) = A \end{array}\right\} \text{поглощение} \qquad (4.56)$$

Определение 4.38. Решетка Е называется молярной, если для трех произвольных элементов X_1, X_2 и $X_3 \in E$

$$(X_1 \lesssim X_3) => (X_1 \nabla (X_2 \Delta X_3)) = ((X_1 \nabla X_2)\Delta X_3) \quad (4.57)$$

где $\lesssim$-означает отношение порядка на решетке.

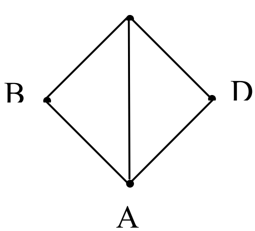
Определение 4.39. Решетку Е будем называть дистрибутивной, елси выполняются условия:

$\forall X_1, X_2, X_3 \in E$

$$X_1 \nabla (X_2 \Delta X_3) = (X_1 \nabla X_2) \Delta (X_1 \nabla X_3) \qquad (4.58)$$

$$X_1 \Delta (X_2 \nabla X_3) = (X_1 \Delta X_2) \nabla (X_1 \Delta X_3)$$

Например:



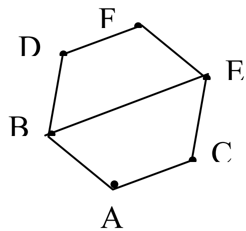


Рис.4.4

Решетка на рис.4.4 *A* модулярна. Проверим длщя AB и C. Имеем A < C

$$A \nabla (B \Delta C) = A \nabla A = A; \quad (A \nabla B) \Delta C = B \Delta C = A$$

Можно проверить, что рештка на рис. б дистрибутивна.

Определение 4.40. Пусть V-нижняя граница решетки E, а элемент U-верхняя граница. Тогда элемент X_j называется дополнением элемента X_i, если:

$$X_i \Delta X_j = V \text{ и } X_i \Delta X_j = U \qquad (4.59)$$

Обозначим через $\overline{X}_i$ дополнительный элемент элемента X_i. Дополнение X_i (если оно существует) не обязательно единственно.

Определение 4.41. Решетка E называется решеткой с дополнением, если:

1) она обладает единственным элементом $0 = \inf(E)$ и единственным элементом $U = sur(E)$,

2) каждый $X_i \in E$ обладает по крайней мере одним дополнением Е.

Определение 4.42. Решетка, которая дистрибутивна и с дополнением, называется булевой, т.е. удовлетворяет слледующим свойствам булевой рештки:

1) для каждого элемента существует одно и только одно дополение;
2) для каждого X_i имеем $\overline{\left(\overline{X}_i\right)} = X_i$;
3) $\overline{X_i \Delta X_j} = \overline{X}_i \nabla \overline{X}_j; \quad \overline{X_i \nabla X_j} = \overline{X}_i \Delta \overline{X}_j;$ (4.60)
4) каждая конечная булева решетка изоморф на решетке множества всех подмножеств относительно включения и наоборот.

Определение 4.43. Пусть $A_1, A_2, ...A_n$ -множество, каждое из которых вполне упорядочено отношением <. Произведение множеств $A_1, A_2, ...A_n$ упорядочено и образует решетку, называемую векторной решеткой, а отношение порядка на ней является отношением доменирования (ν' доменирует ν, если $\nu' \underset{\sim}{>} \nu$) тогда и только тогда, когда

$K'_1 \geq K_1, \; K'_2 \geq K_2, ...K'_n \geq K_n$, где

$$\nu = (K_1, K_2, ...K_n) \text{ и } \nu' = (K'_1, K'_2, ...K'_n) \qquad (4.61)$$

На рис. 4.5 изображена векторная решетка, образованная произведением множеств:

$$A = \{A_1 A_2\}, \; B = \{B_1, B_2, B_3\} \text{ и } C = \{C_1, C_2, C_3\}$$

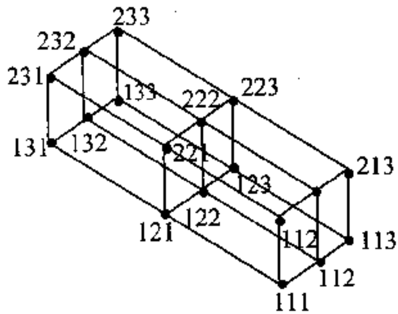


Рис. 4.5

132 означает

$(A_1 B_3 C_2)$

Отметим, что каждая векторная решетка дистрибутивна, но не имеет дополнений.

Произведение двух решеток есть решетка, т.е., если E_1-решетка, E_2-решетка, то $E_1 \times E_2$-решетка.

Например, имеем $E_1 = \{A, B, C, D, E, F\}$,

$E_2 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ и

$F < E < B < A,\ F < E < C < A,\quad F < E < D < A,$

$\varepsilon < \nu < \beta < \alpha, \varepsilon < \delta < \alpha$, то

$(F, \varepsilon) < (F\nu) < (FB) < (F\alpha);\ (F\varepsilon) < (E\varepsilon)$ и т.д.

Существование показателя размытости тесно связано со свойтсвами алгебры нечеткого множества Заде. Для алгебры обычных множеств показатель размытости со свойствами условий 3, 4, 7 выражается в тривиальный показатель, всюду равный нулю. Для более общих алгебр такой показатель просто не существует.

Сначала установим соотношения, существующие между произвольными метриками и показателями размытости, а так же связь между свойствами показателя размытости и свойствами алгебры нечеткого множества.

Определение 4.44. Положительной оценкой на решетке нечеткого множества $F(x)$ называется функция $\upsilon : F(x) \to R^{+}$, если она удовлетворяет свойству

$$\upsilon(A \bigcup B) + \upsilon(A \bigcap B) = \upsilon(A) + \upsilon(B) \qquad (4.62)$$

и условию: из $A \subset B$ следует

$$\upsilon(A) < \upsilon(B) \qquad (4.63)$$

Положительная оценка υ определяет на $F(x)$ метрику:

$$\rho(A,B) = (A \bigcup B) - \upsilon(A \bigcap B) \qquad (4.64)$$

Определение 4.45 Решетка $F(x)$ с положительной оценкой υ и метрической решеткой нечеткого множества.

Определение 4.46. Метрика называется симметричной, если она удовлетворяет условию

$$\rho(A,B) = \rho(\overline{A},\overline{B}) \qquad (4.65)$$

Так как в алгебре нечетких множеств выполняются законы Деструкция Моргана

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}; \quad \overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}; \qquad (4.66)$$

то из (4.62), (4.64) и (4.66) следует, что метрика является симметричной тогда и только тогда, когда она определяется симметричной оценкой, т.е. удовлетворяющей условию

$$\upsilon(A)+\upsilon(\overline{A})=\upsilon(\phi)+\upsilon(B) \qquad (4.67)$$

В [25], [26] доказаны:

Теорема 4.1. В метрической решетке нечетких множеств функционалы

$$d(A)=2K[\upsilon(B)-\upsilon(A\bigcup\overline{A})] \qquad (4.68)$$

$$d(A)=2K[\upsilon(A\bigcap\overline{A})-\upsilon(\phi)] \qquad (4.69)$$

$$d(A)=K[\rho(\phi,B)-\rho(A,\overline{A})] \qquad (4.70)$$

удовлетворяют свойствам условий 3,4,7 и они попарно тождественны тогда и только тогда, когда положительная оценка υ симметрична.

Теорема 4.2. Если ρ-симметричная метрика, то функционал

$$d(A)=K[\rho(0,B)-2\rho(A,\overline{A}_{0,5})] \qquad (4.71)$$

удовлетворяет свойствам условий q3, q4, q7 и тождественно функционалам (4.68)-(4.70), причем для любого показателя размытости, введенного в $F(x)$ и удовлетворяющего свойствам условий q3, q4, q7 существет единственная согласованная с ним соотношение (4.51) симметричная метрика.

Примером симметричной оценки на решетке нечеткого множества может служить энергия нечеткого множества

$$E(A)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\mu_A(x_i),$$

которая определяет симметричную метрику

$$\rho(A,B)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left|\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i)\right| \qquad (4.72)$$

и согласованную с нею меру энтропии:

$$d(A) = E(A \cap \overline{A}) =$$
$$= 2\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \min\{\mu_A(x_i),\ 1-\mu_A(x_i)\} = \qquad (4.73)$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i - 2\sum_{i=1}^{N} \lambda_i |\mu_A(x_i) - 0{,}5|$$

Сформуоируем усорвия, аналогичные условиям 3,4,7 для произвольных алгебр Деструкция Моргана ($L_m, U, \cap, -$). Условие 7 удобнее записать в виде условий 5 и 6.[27]

A.1. $d(\phi) = 0$

A.2. $d(a) = d(\overline{A})$

A.3. $d(A) < d(B)$, если $A \cap \overline{A} \subset B \cap \overline{B}$

A.4. $d(A \cup B) + d(A \cap B) = d(A) + d(B)$

Теорема 4.3. На метрической алгебре Деструкция Моргана L_m с положительной оценкой υ может быть задана функция d, удовлетворяющая условиям A1-A4, тогда ти только тогда, когда L_m является булевой алгеброй. Функции (4.68)-(4.70), определенные на L_m, удовлетворяют условиям A1-A4. Они попарно тождественны тогда и только тогда, когда оценка υ симметрична. Однако υ симметрична тогда и только тогда, когда определенная ею метрика симметрична.

Наконец, следует отметить, что показатель размытости так же принято называть индексом нечеткости. [23]

Причем, кроме (4.49)и (4.50) относительно расстояний Хемминга пользуются и квадратичным индексом нечеткости, обозначив их

$$\nu(\widetilde{A}) = \frac{2}{n} d(\widetilde{A}, A) \qquad (4.74)$$

$$\eta(\widetilde{A}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \ell(\widetilde{A}, A) \qquad (4.75)$$

Число 2 появилось в числителе для того, чтобы получить $0 \le \nu(A) \le 1$ и $0 \le \eta(A) \le 1$, так как

$0 \le d(\widetilde{A}, A) \le \frac{1}{2}$ и $0 \le \ell(\widetilde{A}, A) \le \frac{1}{2}$

Например, по формуле (4.74) имеем:

$\nu(\widetilde{A}) = \frac{2}{b-a} \int_a^b \left| \mu_{\widetilde{A}}(x) - \mu_A(x) \right| dx,$ а ближайшее обычное множество на рис.4.6

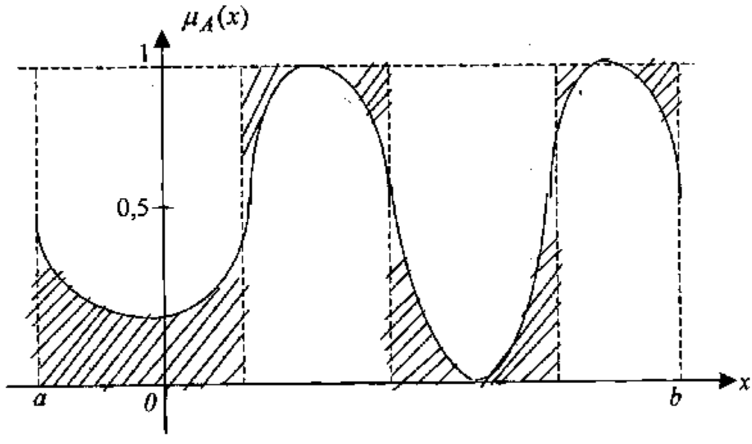


Рис.4.6

Пример 4.21

$\overline{A} = \{x_1 / 0{,}6; x_2 / 0{,}2; x_3 / 0{,}5; x_4 / 1; x_5 / 0{,}7\}$

$A \cap \overline{A} = \{x_1 / 0{,}4; x_2 / 0{,}8; x_3 / 0{,}5; x_4 / 0; x_5 / 0{,}3\}$

Нечеткое подмножество с функцией принадлежности $2\mu_{A\bigcap\overline{A}}(x)$ иногда называют векторным индиктаором нечеткости. Таким образом, для $A=\{x_1/0{,}4;x_2/0{,}8;x_3/0{,}5;x_4/0;x_5/0{,}3\}$ имеем векторный индекс нечеткости $\{x_1/0{,}8;x_2/0{,}4;x_3/1;x_4/0;x_5/0{,}6\}$ и $\nu(A)=0{,}56$

V. Оценка нечеткости через энтропию.

Как известно, энтропия системы измеряет степень беспорядка компонентов системы отностительно вероятностей состояния.

Рассмотрим конечное универсальное множество. Рассмотрим N состояний $\varepsilon_1,\varepsilon_2,....,\varepsilon_N$ системы, с которыми связаны вероятности $P_1,P_2,....,P_N$.

Тогда энтропия системы определяется выражением

$$H\ (P_1,P_2,....,P_N)=-\sum_{i=1}^{N}P\ln P \qquad (4.76)$$

Легко показать, что

$$H_{\min}=0 \text{ при } P_\tau=1\ \ (\tau=\overrightarrow{1,N}) \qquad (4.77)$$

и $P_i=0,\ \ i\neq\tau$.

при

$$P_1=P_2=....=P_N=1/N, \qquad H_{\max}=\ln N \qquad (4.78)$$

Если воспользоваться формулой

$$H\ (P_1,P_2,....,P_N)=-\frac{1}{\ln N}\sum_{i=1}^{N}P_i\ln P_i \qquad (4.79)$$

то энтропия будет величиной, изменяющейся между 0 и 1.

$$H_{\min} = 0;\ H_{\max} = 1 \tag{4.80}$$

Рассмотрим на примере, как использовать это понятие для оценки нечеткости подмножества.

Пусть $A = \{x_1 / 0{,}6; x_2 / 0{,}8; x_3 / 0{,}1; x_4 / 0{,}5; x_5 / 1\}$

Пусть

$$\pi_A(x_i) = \frac{\mu_A(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{5} \mu_A(x_i)} \tag{4.81}$$

Тогда

$$\pi_A(x_1) = \frac{1}{5}; \pi_A(x_2) = \frac{4}{15}; \pi_A(x_3) = \frac{1}{30};$$

$$\pi_A(x_4) = \frac{1}{6}; \pi_A(x_5) = \frac{1}{3};$$

При этом

$$H(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) =$$

$$= \frac{-1}{\ln 5}\left(\ln\frac{1}{5} + \frac{4}{15}\ln\frac{4}{15} + \frac{1}{30}\ln\frac{1}{30} + \frac{1}{6}\ln\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\ln\frac{1}{3} \right)$$

Таким образом, общую формулу, позволяющую подсчитать энтропию по нечеткости, можно записать в виде:

$$H(\pi_A(x_1),...\pi_A(x_N)) =$$

$$= -\frac{1}{\ln N}\sum_{i=1}^{N}\pi_A(x_i)\ln\pi_A(x_i) =$$

$$= \frac{1}{\ln N\sum_{i=1}^{N}\mu_A(x_i)}\left[\sum_{i=1}^{N}\mu_A(x_i)\cdot\left(\ln\sum_{i=1}^{N}\mu_A(x_i)\right) - \right. \tag{4.82}$$

$$\left. - \sum_{i=12}^{N}\mu_A(x_i)\ln\mu_A(x_i)\right]$$

Заметим, что метод подсчета нечеткости через энтропию зависит не непосредственно от функции принадлежности, а от их относительных значений.

Отметим, что все обычные подмножества с единственным ненулевым элементом имеют энтропию 0, пустое же подмножество всегда имеет энтропию, равную 1.

ГЛАВА V. НЕЧЕТКИЕ ОТНОШЕНИЯ И НЕЧЕТКИЕ ГРАФЫ

§1. Понятие нечетких отношений и операции над ними

Нечеткие отношения (НО) играют фундаментальную роль в теории нечетких (размытых) систем.

Понятие нечёткое отношение – это обобщение чётких отношений в теории нечеткого множества. Оно может моделировать ситуацию, где взаимодействия между элементами являются более или менее сильными [6]. Различаются множество типов отношений (или соответствий): эквивалентности порядка, превосходства и т.д.

Обычное неразмытое n –арное отношение R определяется как подмножество декардово произведения n – множеств ($X_1 \times X_2 \times ... X_n$).

$R \subseteq X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$

Поэтому по аналогии:

Определение 5.1. Если ($X_1 \times X_2 \times ... X_n$) есть n универсумов, то n –арным нечетким отношением (НО) в $X_1 \times X_2 \times ... X_n$ будем называть всякое подмножество $R \subset X_1 \times ... \times X_n$, заданного с помощью его функции принадлежности

$$\mu_R(x_1, x_2, ..., x_n) : (X_1 \times X_2 \times ... \times X_n) \to [0;1] \qquad (5.1)$$

Сравнивая понятия четких и нечетких отношений очевидно, что обычное (четкое) отношение является частным случаем нечетких отношений. Кроме того, носителем нечеткого отношения R на множестве X называется подмножество декартово произведения $X \times Y$ вида

$$surrR = \{(x/y)/x \in X,\ y \in Y,\ \mu_R(x,y) > 0\} \qquad (5.2)$$

Отметим, что в приложениях теории нечеткого отношения часто оказывается удобным в качестве [0;1] брать какую-либо более общую структуру, чем [0,1]. (например – множество вещественных чисел, множество лингвистических переменных, множество m-мерных векторов и т.д.). Такой подход к определению нечеткого отношения дает возможность, во-первых, строить интересные обобщения, понятия и отношения. Во-вторых, он позволяет применить интерпретацию различных функций как нечеткое отношение для анализа свойств этих функций. В-третьих, этот подход дает возможность связать и рассматривать с единой точки зрения многие понятия и методы, применяющиеся при анализе эмпирических данных, в частности, в классическом анализе.

Кроме того, следует отметить, что в качестве частных случаев можно рассмотреть тенарное отношение – множество из упорядоченных троек и бинарное нечеткое отношение – множество из упорядоченных пар.

Ограничимся рассмотрением лишь бинарных нечетких отношений.

Определение 5.2. Бинарным нечетким отношением (БНО) R между множествами X и Y будем называть всякое его подмножество $R \subset (X \times Y)$, заданного с помощью его функции принадлежности

$$\mu_R(x,y) : (X \times Y) \to [0,1] \qquad (5.3)$$

Носителем БНО является:

$$surrR = \{(x,y)/\forall x \in X,\ y \in Y,\ \mu(x,y) > 0\} \qquad (5.4)$$

Домен БНО R и его ранг определяются соответственно:

$$\mu_{dom(R)} = \underset{x}{sur}\, \mu_R(x,y), \ \forall x \in X \qquad (5.5)$$

$$\mu_{ran(R)} = \underset{x}{sur}\, \mu_R(x,y), \ \forall y \in Y \qquad (5.6)$$

Отметим, что когда множество X и Y совпадают, то НБО $R : X \times Y \to [0,1]$ называется НБО на множестве X. Такому отношению можно поставить в соответствии вещественный граф.

Пример 5.1. Если множества X и Y конечны, то нечеткое отношение R между ними можно представить с помощью его матрицы отношения

Таблица 5.1

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0	1	0,6	0,7	0,7	0,9
x_2	1	1	0,8	0,9	0,6	0,8
x_3	0,6	0,8	0,8	0,6	0,4	0,9
x_4	0,7	0,9	0,6	0,8	1	0,3

Элементы $R(x,y)$ помещены в таблице 5.1 на пересечении строк и столбцов.

Пример 5.2. Пусть $E_1 = E_2 = X$, где $X=(-\infty;\infty)$, т.е. X – множество всех действительных чисел. Тогда отношение $y \le x$, где $x \in X$, $y \in Y$ есть нечеткое отношение на (XY). Отношение $y \le x$ можно задать следующим образом:

$$\underset{XY}{\mu}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y > x \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(x-y)^2}}, & \text{если } y \le x \end{cases}$$

Следует также отметить, что при решении многих задач отдельных отраслей науки и техники нечеткое отношение рассматривается как нечеткое ограничение, композиция, нечеткое отношение ЕСЛИ-ТО и нечеткий граф.

Определение 5.4. Пусть $z=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ - есть переменная на $Z=x_1\times\ldots\times x_n$. Нечетким ограничением *R(z)* будем называть нечеткое отношение *R* , которое действует как гибкое ограничение на значение переменной *Z*.

Определение 5.3. Проекцией нечеткого отношения *R* на $X_{i_1},\ldots X_{i_k}$ (где $i_1,\ldots i_k$ -подпоследовательность 1,2, ...n) является отношение $X_{i_1},\ldots X_{i_k}$, определенное как

$$proj(X,X_{i_1},\ldots,X_{i_k})=\bigcup_{\substack{x_j \\ x_{i_1}\times\ldots\times x_{i_k}}} sur_{x_{j_k}}\, x_{j_k}\, \mu_R(x_1,\ldots x_n)/(x_1\ldots x_{x_n}) \qquad (5.7)$$

где ($j_1,\ldots j_k$)-подпоследовательности, дополняющаяся до ($i_1,\ldots i_k$) в (1,2,...,n).

Первую проекцию R определяет функция принадлежности

$$\mu_R^{(1)}(x)=\vee_y \mu_R(x,y) \qquad (5.8)$$

аналогично вторую проекцию определяет

$$\mu_R^{(2)}(y)=\vee_x \mu_R(x,y) \qquad (5.9)$$

Вторая проекция первой проекции (или наоборот) будет называться глобальной проекцией нечеткого бинарного отношения и обозначается:

$$h(R)=\vee_x\vee_y \mu_R(x,y)=\vee_x\vee_y \mu_R(x,y) \qquad (5.10)$$

При этом, если $h(R)=1$, то нечеткое отношение называют нормальным, если же $h(R)<1$, то – субнормальным.
Пример 5.3.

Таблица 5.2

а)

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
x_1	0,1	0,2	0,4	1	0,6	0,5	0,8
x_2	0,6	0,4	0	0,8	0,3	0,2	0,9
x_3	0,2	0,3	0,1	0	0	1	0,3
x_4	0,5	0,4	0,9	1	0,1	0,9	1

Первая проекция

б)

1
0,9
1
1

Вторая проекция

в)

0,6	0,4	0,9	1	0,6	1	1

г)

1

Глобальная проекция

$$\mu_R^{(1)}(x_1)=\underset{y}{\vee}(x_1,y)=\max[0{,}1;0{,}2;0{,}4;1;0{,}6;0{,}5;0{,}8]=1$$

$$\mu_R^{(2)}(y_1)=\underset{x}{\vee}(x,y_1)=\max[0{,}1;0{,}6;0{,}2;0{,}5]=0{,}6 \text{ и т.д.}$$

Пример 5.4. Рассмотрим отношение xRy, где $x\in R^+; y\in R^+$ и $\mu_R(x,y)=l^{-K(x-y)^2}$

В этом случае для фиксированного значения x_0.

$$\mu_R^{(1)}(x_{01})=\underset{y}{\vee}\mu_R(x_0,y)=\underset{y}{\vee} l^{-K(x-y)^2}=l^{-k(x_0-y)^2}=1$$

Поскольку $\mu_R^{(2)}(y_0)=1$, то $h(R)=1$

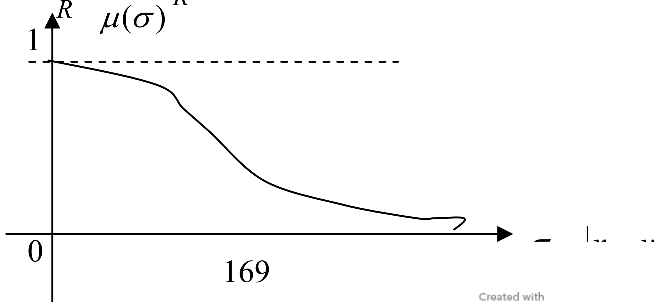


Рис.5.1

Для простоты изложения все понятия, связанные с нечетким отношением приведем для бинарного нечеткого отношения.

Определение 5.4. Носителем нечеткого бинарного отношения R называется обычное (четкое) множество упорядоченных пар (x,y), для которых функция принадлежности положительна.

$$S(R) = \{(x, y) / \mu_R(x, y) > 0\} \qquad (5.11)$$

Пример 5.5. Рассмотрим отношение *xRy,* где $x \in R^+, y \in R^+$

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} l^{-(y-x)^3} & |y-x| \le 0{,}46 \\ 0 & |y-x| > 0{,}46 \end{cases}$$

Тогда $S(R) = \{(x, y) / 0 \le |y-x| \le 0{,}46\}$

Определение 5.5 Пусть R и Q два нечетких отношения, такие, что

$$\forall (x, y) \in X_1 \times X_2;\ \mu_R(x, y) \le \mu_Q(x, y) \qquad (5.12)$$

тогда будем говорить, что Q содержит R или R содержится в Q.

Пример 5.6. Легко показать, что R содержит Q, если:

Таблица 5.3

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,4	0	1
x_2	0,5	0,6	0,4	0,9
x_3	0,8	0,3	0,1	0,7

Q	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,2	0,3	0	0,9
x_2	0,4	0,5	0,4	0,8
x_3	0,6	0,3	0	0,6

Определение 5.6. Объединением двух нечетких отношений R и Q называется нечеткое отношение, обозначенное через $R \bigcup Q$ или $R + Q$ и определенное выражением:

$$\mu_{R \cup Q}(x, y) = \mu_R(x, y) \vee \mu_Q(x, y) = \max\left[\mu_R(x, y) \mu_Q(x, y)\right] \quad (5.13)$$

Если же $R_1, R_2, \ldots, R_n$ –нечеткие отношения, то

$$\mu_{R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n}(x, y) = \bigvee_{R_i} \mu_{R_i}(x, y) \quad (5.14)$$

Результат объединения обозначим:

$$R = \bigcup_i R_i \text{ или } R = \sum_{i=1}^{n} R_i \quad (5.15)$$

Пример 5.7. Для нечетких отношений R и Q из примера 4.6. имеем: $R \bigcup Q = R$

Таблица 5.4

$R \bigcup Q$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,4	0	1
x_2	0,5	0,6	0,4	0,9
x_3	0,8	0,3	0,1	0,7

Определение 5.7. Пересечением двух нечетких отношений R и Q называется нечеткое отношение, обозначенное $R \bigcap Q$ и определенное выражением:

$$\mu_{R \cap Q}(x, y) = \mu_R(x, y) \wedge \mu_Q(x, y) = \min\left[\mu_R(x, y) \mu_Q(x, y)\right] \quad (5.16)$$

Если же $R_1, R_2, \ldots, R_n$ –нечеткие отношения, то

$$\mu_{R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n}(x, y) = \underset{R_i}{\wedge} \mu_{R_i}(x, y) \qquad (5.17)$$

Пример 5.8. Для нечетких отношений R и Q из примера 5.6. имеем:

$R \cap Q = Q$

Определение 5.8. Алгебраическим произведением двух нечетких отношений R и Q называется нечеткое отношение, обозначенное R·Q и определенное выражением:

$$\mu_{R \cdot Q}(x, y) = \mu_R(x, y) \cdot \mu_Q(x, y) \qquad (5.18)$$

Пример 5.9.

Таблица 5.5

Таблица 5.6

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,1	0,5	0
x_2	1	0,6	0,1	0,8
x_3	0,2	0,1	0,3	0,9

Q	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,3	0,2	0,6	1
x_2	0,8	1	0,3	0,4
x_3	0,5	0,2	0	0,8

Если $P = R^{\bullet} \cdot Q$, то $\mu_P(x, y) = \mu_R(x, y) - \mu_Q(x, y)$

Таблица 5.7

P	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,12	0,02	0,3	0
x_2	0,8	0,6	0,03	0,32
x_3	0,1	0,02	0	0,72

Определение 5.9. Алгебраической суммой двух нечетких отношений R и Q называется нечеткое отношение,

обозначенное $R \hat{+} Q$ и определенное выражением $\mu_{R \hat{+} Q}(x,y) = \mu_R(x,y) + \mu_Q(x,y) - \mu_R(x,y) \cdot \mu_Q(x,y)$

Пример 5.10. Для нечетких отношений R и Q из примера 5.9 имеем:

Если $G = R \hat{+} Q$, то на основании (5.19)

$\mu_G(x_1, y_1) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}58$ и т.д.

G	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,58	0,28	0,8	1
x_2	1	1	0,37	0,88
x_3	0,6	0,28	0,3	0,98

Определение 5.10. Дополнением нечеткого отношения R есть такое нечеткое отношение $\overline{R}$, что $\forall (x,y) \in X \times Y$

$$\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y) \qquad (5.20)$$

Пример 8.11. Для нечеткого отношения R из примера 4.9 имеем:

Таблица 5.8

$\overline{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,9	0,5	1
x_2	0	0,4	0,9	0,2
x_3	0,8	0,9	0,7	0,1

Определение 5.11. Дизъюнктивной суммой двух нечетких отношений R и Q называется нечеткое отношение $R \oplus Q$ и определенная выражением

$$R \oplus Q = \left(R \cap \overline{Q}\right) \cup \left(\overline{R} \cap Q\right) \qquad (5.21)$$

$$\mu_{R\oplus Q}(x,y)=\left[\mu_R(x,y)\wedge\left(1-\mu_Q(x,y)\right)\right]\vee\left[\left(1-\mu_Q(x,y)\right)\wedge\mu_Q(x,y)\right]= \\ =\max\left\{\left[\min\mu_R(x,y),\left(1-\mu_Q(x,y)\right)\right],\left[\min\left(1-\mu_R(x,y),\mu_Q(x,y)\right)\right]\right\} \quad (5.22)$$

Пример 5.12. Пусть

Таблица 5.9

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,9	0	0,4
x_2	0,3	0,5	0,8	1
x_3	0,1	0,8	0,3	0,7

Таблица 5.10

Q	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,9	0,4	0,2	1
x_2	0,3	0,7	0	0,6
x_3	0,5	0,1	0,4	0,8

Тогда

Таблица 5.11

$R\cap\overline{Q}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,1	0,6	0	0
x_2	0,3	0,3	0,8	0,4
x_3	0,1	0,9	0,3	0,2

Таблица 5.12

Q	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,1	0,2	0,6
x_2	0,3	0,5	0	0
x_3	0,2	0,1	0,4	0,3

Откуда

Таблица 5.13

$R\oplus Q$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,6	0,2	0,6
x_2	0,3	0,5	0,8	0,4
x_3	0,2	0,9	0,4	0,3

Определение 5.12. Пусть $\widetilde{R}$ - нечеткое отношение. Обычным (четким) отношением, близким к $\widetilde{R}$ будем называть четкое отношение R, которое определяется выражением:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ } \textit{если} \quad \mu_{\tilde{R}}(x,y) < 0{,}5 \\ 1, \text{ } \textit{если} \ \mu_{\tilde{R}}(x,y) > 0{,}5 \\ 0 \ \textit{или} \ 1, \textit{ если} \ \ \mu_{\tilde{R}}(x,y) = 0{,}5 \end{cases} \qquad (5.23)$$

Это определение пригодно для любых универсальных множеств X и Y, образующих X×Y и независимо от того, конечным или нет.

Пример 5.13. По договоренности принимают

$\mu_{\tilde{R}}(x,y) = 0{,}5 \Rightarrow \mu_{\tilde{R}}(x,y) = 0$. Поэтому

Таблица 5.14

$\tilde{R}$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,4	0,7	0,6	0,2
x_2	0,9	0,5	0,7	0,9
x_3	0,2	0,1	0,8	0

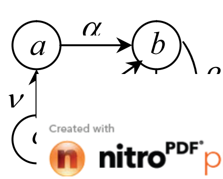
Таблица 5.15

Q	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	1	1	0
x_2	1	0	1	1
x_3	0	0	1	0

Отметим, что для случая нечеткого множества аналогично определяются неразмытые (четкие) множества, ближайшие к размытым нечетким множествам.

§2. Нечеткие графы

Понятие графа так же, как соответствия и отношения играют важную роль в приближениях математики. Их можно обобщить на случай нечетких подмножеств. При этом обнаруживаются их новые интересные свойства. Прежде чем ввести понятие нечеткого графа, выясним что же собой представляет граф? Любой граф состоит из двух групп элементов: точек и стрелок, соединяющих эти точки. Точки могут



изображаться на плоскости, хотя могут и не иметь такой определенной «физической» связки. В частности, стрелки могут изображаться линиями, соединяющими пары точек. Например, для графа, изображенного линиями, соединяющими пары точек. Например, для графа, изображенного на рис.5.1, точки помечены буквами *a,b, c,d*, а стрелки буквами α, β, γ, ν, φ, δ. Отметим, что имеются две стрелки γ и β, которые идут из точки *b* в точку *d*, т.е. имеет началом точку *b* и концом точку *d*.

Тот же самый граф можно было бы задать не рисунком, а просто пересечением стрелок $\alpha=(a,b),\beta=(b,d),\gamma=(b,d);\varphi=(c,d);\delta=(c,b);\gamma=(c,a)$, представленных упорядоченными парами точек, где первая точка пары определяет начало соответствующей стрелки, а вторая ее конец. Придерживаясь стандартных терминологии точки графа, будем называть *вершинами*, а стрелки графа – *дугами.*

Дадим формальное определение графа.

Определение 5.13. Граф – это совокупность множества X, элементы которого называются вершинами и множество *A* упорядоченных пар вершин, элементы которого называются дугами и обозначается как (*X,A*).

Предполагается, что множество *X* и множество *A* – содержат конечное число элементов.

В случае, когда две вершины соединяются двумя дугами (как на рис.5.1) можно обозначить $\beta=(b,d)_1;\gamma=(b,d)_2$.

Кроме того:

1) Дуга, начальная и конечная вершина которой совпадает, называется *петлей*;

2) Две вершины будем называть *соседними*, если есть их соединяющая дуга;

3) Любая последовательность дуг $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, концевыми точками которых являются соседние вершины

(для дуги α_i концевые вершины $x_i x_{i+1}$) называется *цепью*; 4) *Длиной цепи* называется число дуг, входящих в нее; 5) *Циклом* называется цепь, у которой начальная и конечная вершины совпадают; 6) *Контуром* называется путь, у которого начальная и конечная вершины совпадают;

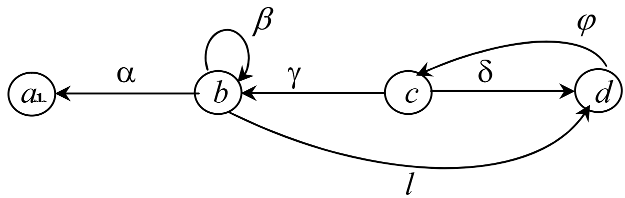


Рис.5.3

6) *Контуром* называется путь, у которого начальная и конечная вершины совпадают.
На рис. 5.3 β - является петлей; *b* и *c* – соседние вершины; последовательность α,β, γ, δ, φ - образует цепь длиной 5; дуги γ, ℓ ,φ - образуют контур длины 3.
Наконец, 7) будем говорить, что две дуги инцидентны друг другу, если обе они инцидентны одной и той же вершине;
8) Вершина и дуга инцидентны друг другу, если вершина для этой дуги является концевой или начальной точкой;
9) Цепь, путь, цикл или контур называется простым, если ни одна вершина не инцидентна более чем двум входящим в нее дугам (т.е. если цепь, путь, цикл или контур не содержат внутри себя циклов). На рисунке 5.3. цепь (α,γ) – простая, а цепь вершина (α,β,γ) – не является простым, а цикл (α,β, ℓ ,δ) – не является простым циклом.
Определение 5.14. Граф называется связанным, если в нем для каждой пары вершин найдется соединяющая их цепь. Графы 5.2 и 5.3 являются связанными. Кроме того, любой граф можно рассматривать как некоторую совокупность связанных графов.

Пусть X есть некоторое подмножество множества X, содержащее вершины графа $G(X,A)$. Граф, множество вершин которого совпадают с X', а множество дуг включают все дуги множества A с концевыми вершинами в X' называется подграфом графа G, порожденным X'. Например, для графа на рис.5.3. имеем:

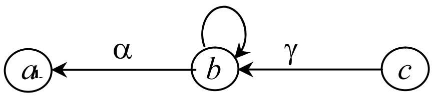


Рис.5.4 Подграф, порожденный вершинами *(a,b,c)*

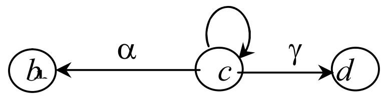


Рис.5.5 Подграф порожденный подмножеством дуг γ, δ, φ

Определение 5.15. Совокупность дуг называется деревом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) порождает связный подграф;
2) не содержит циклов.

В графе на рис.5.2 совокупности

$$\{\alpha, \gamma, \ell\}; \{\alpha,\gamma,\varphi\}; \{\alpha, \ell, \delta\}; \{\varphi,\gamma\}; \{\alpha,\gamma\}; \{\ell\}; \{\gamma\} \quad (5.24)$$

образуют дерево.

Следует отметить, что дерево, состоящее из $(n\text{-}1)$ дуги должно включать n вершин.

Определение 5.16. Любая совокупность дуг, не содержащая циклов, называется *лесом*.

Определение 5.17. Любое дерево, образованное совокупностью его дуг, включающих все вершины графа, называется *покрывающим деревом графа*.

В графе 5.2 $\{\alpha, \ell, \varphi\}$ образует покрывающее дерево.

Пусть G – произвольный граф без петель, состоящий из «m» строк, каждая из которых соответствует определенной вершине и «n» - столбцов, каждая из которых соответствует определенной дуге. Обозначим через

g_{ij} элементы матрицы $\underline{G}$, которая определяется следующим образом.

$$g_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{– если, вершина которой соответствует} \\ & i\text{-я строка, является началом для дуги,} \\ & \text{соответствующий } j\text{-му столбцу.} \\ -1 & \text{– если, вершина которой соответствует} \\ & i\text{-я строка, является конечной для дуги,} \\ & \text{соответствующий } j\text{-му столбцу.} \\ 0 & \text{– во всех других случаях.} \end{cases} \qquad (5.25)$$

При этом матрица $\underline{G}$ называется матрицей графа *G*.

Матрица графа, изображенного на рис.5.2 имеет следующий вид:

Таблица 5.16

$\underline{G}$	α	β	γ	ν	δ	φ
a	1	0	0	-1	0	0
b	-1	1	1	0	0	0
c	0	0	0	1	-1	-1
d	0	-1	-1	0	0	1

Теперь, обобщая понятие графа в терминах определения 5.14, можно принять следующее понятие нечеткого графа.

Определение 5.18. Нечеткий граф – это совокупность нечеткого множества *X* универсального множества под *E,* элементы которого называются вершинами и *H* множества *A* упорядоченных пар вершин, элементы которого называются дугами (пунктирными линиями).

Нечеткий граф также можно обозначить как (*X*,*A*). При этом нечеткость элементов множества *A* означает нечеткую связь между элементами множества *X*. Это означает, что если множество *X* даже будет четким множеством, а связь между его элементами (дуги связи, образующие пары вершин) будет нечеткой, то *G(X,A)* также называется нечетким графом.

Следует отметить, что понятие нечеткого графа вплотную связано с понятием нечеткого отношения, поэтому аналогично понятию бинарного нечеткого отношения, если E – обычное (четкое) множество узлов, то нечеткий граф определяется как

$$G(x_i, x_j) = \{(x_i, x_j),\ \mu_G(x_i, x_j) > 0, (x_i, x_j) \in \times E\} \quad (5.26)$$

Если же E – нечеткое множество, то нечеткий граф определяется аналогично нечетким отношением.

Пример 5.14. $E = \{x_1 x_2 x_3 x_4\}$. Тогда нечеткий граф может быть определен как

$$G(x_i, x_j) = \{(x_1 x_2)/0{,}4; (x_1, x_3)/0{,}6; (x_1, x_4)/1; (x_2, x_1)/0{,}9;$$
$$(x_3, x_1)/0{,}2; (x_3, x_2)/0{,}7; (x_4 x_3)/0{,}8\}$$

Таким образом, сравнивая понятия четкого и нечеткого графов, можно прийти к следующему выводу:

1) если в (5.26) $\mu_G(x_i x_j) = 1$, то G -четкий граф

2) если в (5.26) $0 < \mu_G(x_i x_j) < 1$, то G - нечеткий граф

При этом в терминах определений 5.14 и 5.19 для четких графов *A={0;1}*, а для нечетких графов *A=[0;1]*

Поэтому все выше приведенные понятия для четких графов применимы (справедливы) и для нечетких графов.

Говоря о связи между отношением и графом (будь обе четкие или нечеткие), следует отметить, что оба они представляют собой совокупность множества элементов (точек) и множества отдельных совокупностей (связей) этих элементов. Однако отличие графа отношения (четкого, либо нечеткого) заключается в том. что для отношения не играет роль. направление связи между элементами, образующие их совокупности, когда для графа она играет важную роль.

Пример 5.15. Пусть $E = \{x_1 x_2 x_3 x_4\}$ и пусть нечеткое отношение

$$R(x_i x_j) = \{(x_1 x_2)/0{,}6; (x_1 x_3)/0{,}4; (x_1 x_4)/1; (x_2 x_1)/0{,}9;$$
$$(x_3 x_2)/0{,}2; (x_3 x_1)/0{,}7; (x_4 x_3)/0{,}8\}$$

и

$$G(x_i x_j) = \{(x_1 x_2)/0{,}6; (x_1 x_3)/0{,}4; (x_1 x_4)/1; (x_2 x_1)/0{,}9;$$
$$(x_3 x_1)/0{,}7; (x_4 x_3)/0{,}8;\}$$

Построим их матрицы. Учитывая (5.24), имеем:

Таблица 5.17

а)

R	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0,6	0,4	1
x_2	0,9	0	0	0
x_3	0,7	0,2	0	0

б)

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	0,6	0,4	1
x_2	-0,9	0	0	0
x_3	-0,7	-0,2	0	0
x_4	0	0	0,8	0

x4	0	0	0,6	0

По аналогии с нечеткими отношениями определяется множество уровней нечеткого графа, т.е.

$$G_\alpha(x_i x_j) = \{x_i x_j\},\ \mu(x_i x_j) \geq \alpha\ \ (x_i x_j) \in E \times E \quad (5.27)$$

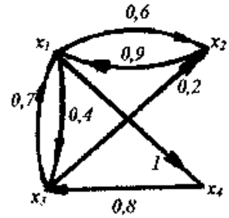


Рис.5.6

Пример 5.16. Для нечеткого графа примера 5.15. Нечеткий подграф уровня a = 0,6 будет:

R	x1	x2	x3	x4
x1	0	0,6	0	1
x2	-0,9	0	0	0
x3	-0,7	0,2	0	0
x4	0	0	-0,8	0

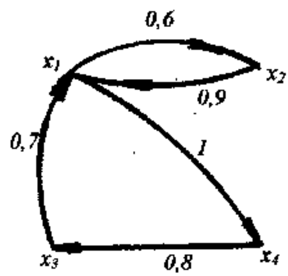


Рис.5.7

Учитывая, что понятие прямого произведения двух множеств $E_1 \times E_2$ можно обобщить для произведения множеств $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$
имеем:

Определение 5.19. Нечетким графом называется нечеткое подмножество $G \subset E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ такое, что

$$\forall (x_1, x_2, \ldots x_n) \in E_1 \times E_2 \times \ldots E_n,\ \mu_G(x_1, x_2, \ldots x_n) \in (0,1] \quad (5.28)$$

Пример 5.17. $E_1 = \{x_1, x_2\}$; $E_2 = \{y_1, y_2\}$; $E_3 = \{z_1, z_2\}$;

$G = \{(x_1, y_1, z_1)/0{,}4;\ (x_1, y_1, z_2)/0{,}3 (x_1 y_2 z_1)/0{,}9; (x_1, y_2, z_2)/1;$ $(x_2 y_1 z_2)/0{,}2; (x_2 y_2 z_1)/0{,}7\}$ есть граф в $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_3$ A – есть множество ограниченных гиперповерхностей (n-1)-го порядка.

Из данного примера следует, что если пользоваться понятием (определением 5.13 или 5.18) графа, то для графа (четкого либо нечеткого) в $E_1 \times E_2 \times E_3$ A - есть множество ограниченных гиперповерхностей (n-1)-го порядка.

Таким образом, проведя резюме, можно принять следующее определение графа.

Определение 5.20. Граф - это геометрическое (графическое) представление отношений. При этом нечеткий граф- это графическое представление нечетких отношений.

Поэтому все свойства нечетких отношений справедливы и для нечетких графов.

§3. Композиция двух нечетких отношений

Определение 5.21 - Если $R_1 \subset X \times Y$ и $R_2 \subset Y \times X$ нечеткие отношения, то композицией (max-min) отношений R_1 и R_2 будем называть отношение, определяемое выражением:

$$\mu_{R_2 \circ R_1}(x, z) = \bigvee_y [\mu_{R_1}(x, y) \wedge \mu_{R_2}(y, z)] = \\ = \max_y \left[\min \ \left(\mu_{R_1}(x, y)\, \mu_{R_1}(x, y)\right)\right] \qquad (5.29)$$

и обозначенное $R_2 \circ R_1$, где $x \in X;\ y \in Y;;\ z \in Z$.

Пример 5. 18. Рассмотрим два нечетких отношения R_1 и R_2, где $x, y,\ z \in R^+$.

Пусть

$$\mu_{R_1}(x,y) = \ell^{-K(x-y)^2}\, k \geq 1$$
$$\mu_{R_2}(y,z) = \ell^{-K(y-z)^2}\, k \geq 1 \qquad (5.30)$$

Определим $\mu_{R_2 \circ R_1}(x,y)$

Рассмотрим два значения $x = a$, $y=b$.Функции принадлежности непрерывны на [0; ∞]
на [0;co). В соответствии с (5.30) имеем:

$$\mu_{R_2 \circ R_1}(a,b) = \underset{y}{V}\left[\mu_{R_1}(a,y) \wedge \mu_{R_2}(y,b)\right] = \underset{y}{V}\left[\ \ell^{-k(a-y)^2} \wedge \ell^{-(y-b)^3}\ \right]$$

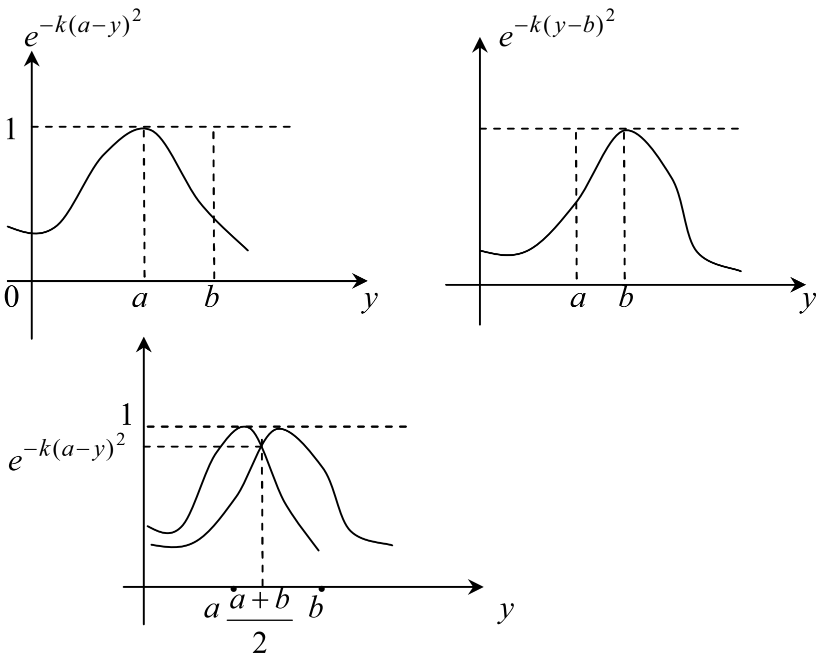


Рис. 5.8

Композиция R_1 и R_2 посредством (max-min) оператора представлена на рис.5.7. Легко видеть, что

$$\mu_{R_2\circ R_1}(a,b) = e^{-k\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2} = e^{-k\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

и для произвольных значений x и z имеем:

$$\mu_{R_2\circ R_1}(a,b) = e^{-ka-\frac{(x-z)^2}{4}}$$

Пример 5.19.

Если принять X={x_1, x_2, x_3}; Y={y_1, y_2, y_3, y_5} и Z={z_1, z_2, z_3, z_4} и матрицы R_1 и R_2 имеют вид:

Таблица 5.18

R_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,2	0,3	1	0	0,6
x_2	0,4	0,6	0	0,8	0,5
x_3	0,7	0,2	0	0	0,7

а)

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,8	0	0,4	0,8
y_2	0,3	1	0,6	0
y_3	0,7	0,9	0,4	0
y_4	0,1	0,9	1	0,4

б)

Тогда

Таблица 5.19

R_1

$R_1 \circ R_2$

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,7	0,9	0,6	0,4
x_2	0,4	0,6	0,6	0,4
x_3	0,7	0,7	0,7	0,8

в)

Отметим, что существует (max_*) композиции, среди которых наиболее важное внимание заслуживает (max_*), где *-есть умножение и она обозначается знаком·; тогда

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x,z) = \bigvee_y \left[\mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(y,z)\right] \tag{5.30}$$

Пример 5.20. Для данных примера 5.19 имеем:

Таблица 5.13

$R_1 \cdot R_2$

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,7	0,9	0,6	0,24
x_2	0,32	0,6	0,5	0,32
x_3	0,72	0,63	0,7	0,72

Определение 5.22. Обычным подмножеством α-уровня нечеткого отношения $R \subset X \times X$ будем называть обычное подмножество

$$G_\alpha = \{(x,y) / \mu_R(x,y) \geq \alpha\} \tag{5.31}$$

где G_α -нечеткий граф α-уровня.

Пример 5.21. Рассмотрим нечеткое отношение, определенное формулой

$$\mu_R(x,y) = 1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

Подмножество уровня 0,6 определяется условием

$$1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \geq 0{,}6$$

или же

$$x^2 + y^2 \geq 1{,}5$$

Это подмножество есть внешность круга r=1,5 с центром в начале координат.

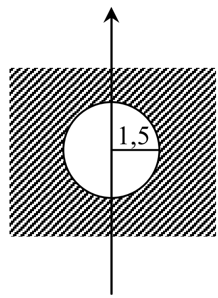


Рис.5.9

Пример 5.22. Пусть

Таблица 5.20

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,4	0,6	0,9	1	0
x_2	1	0,3	0,6	0,2	0,1
x_3	0,3	0,4	0,5	0,8	0,7
x_4	0,6	0,2	0,1	0,6	0,9

Тогда

$$G_{0,6} = \{(x_1 y_2);\ (x_1 y_3),\ (x_1 y_4),\ (x_2 y_1);(x_2 y_3),(x_3 y_4),$$
$$(x_3 y_5);(x_4 y_1),(x_4 y_1),(x_4 y_4),(x_4 y_5)\}$$

Обычное подмножество G_α можно определить другим способом с помощью обычного отношения R_α, такого, что

$$\left.\begin{array}{l}\mu_{R_\alpha}(x,y)=1,\ \text{если}\ \mu_R(x,y)\geq\alpha\\ \mu_{R_\alpha}(x,y)=0,\ \text{если}\ \mu_R(x,y)<\alpha\end{array}\right\} \tag{5.32}$$

Применяя данные примера 5.22, имеем:

Таблица 5.21

$R_{0,6}$=

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	1	1	1	0
x_2	1	0	1	0	0
x_3	0	0	0	1	1
x_4	1	0	0	1	1

Так же как и для нечетких множеств справедливо свойство:

$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow G_{\alpha_2} \subset G_{\alpha_1}$ или, что то же самое

$$R_{\alpha_2} \subset R_{\alpha_2} \tag{5.33}$$

Теорема декомпозиции. Любое нечеткое отношение R можно представить в виде:

$$R = \underset{\alpha}{V}\, \alpha R_\alpha\,,\ 0<\alpha\leq 1\,, \tag{5.34}$$

где

$$\mu_{R_\alpha}(x,y)=\begin{cases}1, \text{если } \mu_R(x,y)\geq\alpha\\ 0, \text{если } \mu_R(x,y)<\alpha\end{cases} \qquad (5.35)$$

Здесь запись αR_α- означает, что все элементы обычного отношения умножаются на α.

Доказательство. Функцию принадлежности для отношения R, определенного в (5.34) можно записать в виде:

$$\mu_{\underset{\alpha}{V}\alpha R_\alpha}(x,y)=\underset{\alpha}{V}\,\alpha\mu_{R_\alpha}(x,y)=\underset{\alpha\leq\mu_{R_\alpha}}{V}\alpha=\mu_R(x,y) \qquad (5.36)$$

Пример 5.23

Таблица 5.22

0,4	0,7	0	1
0,5	1	0,6	0,9
0,8	0,7	0	1

=V (0,4

1	1	0	1
1	1	1	1
1	1	0	1

0	1	0	1
1	1	1	1
	1	0	1

:0.6

0	1	0	1
0	1	1	1
1	1	0	1

0	1	0	1
0	1	0	1
1	1	0	1

:0.8

0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1

0	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

: 1

0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	1

)

Справедливо утверждение: R_i- обычные отношения, ближайшие нечетким отношением $R_i(i=\overrightarrow{1,n})$, то (в частности) где R обозначает (max-min) композицию

Пример 5.24.

Таблица 5.23

а) R_1

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,1	0,2	0	1	0,7
x_2	0,3	0,5	0	0,2	1
x_3	0,8	0	1	0,4	0,3

б) R_2

	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0	0,3	0,4
y_2	0,2	1	0,8	0
y_3	0,8	0	0,7	1
y_4	0,4	0,2	0,3	0,8
y_5	0	1	0	

в) R

	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0	1	0	1
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	1

г) R_1

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0	0	1	1
x_2	0	0	0	0	1
x_3	1	0	1	0	0

д) R_2

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0	0	1	1
x_2	0	0	0	0	1

x_3	1	0	1	0	0

§4. Свойства нечетких отношений

Различие типы нечетких отношений определяются с помощью свойств аналогичных свойствам обычных отношений. В качестве основных свойств нечетких отношений рассмотрим свойства, имеющие такую же алгебраическую запись, что и обычные отношения.

1. Нечеткое отношение R называется симметричным, если

$$R=R^{-1},\ R(x,y)=R(y,x),\ \forall\, x,y\in X,\ x\neq y \tag{5.38}$$

Пример 5.25. Если R –бинарное нечеткое отношение, заданное в виде:

Таблица 5.24

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,2	0,4	0,1	0,7	0,3
x_2	0,4	0,9	0,5	1	0
x_3	0,1	0,5	0,6	0,4	0,9
x_4	0,7	1	0,4	1	0,6
x_5	0,3	0	0,9	0,6	0,1

то оно сисмметрично.

2. Нечеткое отношение R называется антисимметричной, если

$$R\bigcap R^{-1}\subset E,\ R(x,y)\wedge R(x,y)=0,\ \forall x,y\in X \tag{5.39}$$

или же

$$\mu_R(x,y)\neq\mu_R(y,x)\ \text{или}\ \mu_R(x,y)=\mu_R(y,x)=0$$

Пример 5.26. Нечеткое бинарное отношение R, заданное в виде:

Таблица 5.25

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0,3	0	0	0,8	1
x_2	0,8	0,1	0	0,7	0,8
x_3	0,6	0,4	0,2	0,5	0,9
x_4	0,1	0,4	0,6	0	1
x_5	0	0,4	0,6	0	0,4

то оно антисимметрично.

3. Совершенная антисимметрия Л.А.Заде определяет антисимметрию иным способом, которую будем называть совершенной антисимметрией.

Совершенно антисиммметричным отношением называется такое отношение, что

$$\forall(x,y)\in E\times E \text{ и } x\neq y \text{ и } \mu_R(x,y)>0 \quad \mu_R(y,x)=0 \quad (5.40)$$

Л.А.Заде дает другое определение: $\mu_R(x,y)>0$ и $\mu_R(y,x)>0 => \mu_R(y,x)=0$.

Справедливо устверждение. Любое совершенное антисимметричное отношение является антисимметричным отношением.

4. Нечеткое отношение R называется антисимметричной, если

$$R \bigcap R^{-1} = \varnothing; \ R(x,y) \wedge R(y,x) = 0, \forall x,y \in X \qquad (5.41)$$

Пример 5.27. Нечеткое отношение R-антисимметрично.

Таблица 5.26

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	0	0,8	0	0,3	0
x_2	0	0	0,4	0	0
x_3	0,6	0	0	0,2	0,9
x_4	0	0,8	0	0	0,7
x_5	0,9	0,1	0	0	0

5. Нечеткое отношение R- рефлексивно, если

$$\forall x \in X; \ \mu_R(x,x) = 1 \qquad (5.42)$$

Пример 5.28. Нечеткое бинарное отношение R-рефлексивно, если оно задано в виде:

Таблица 5.27

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0	0,4	0,2	0
x_2	0	1	0,5	0,7	0,8
x_3	0,4	0,5	1	0,6	0,9
x_4	0,6	0	0,2	1	1
x_5	1	0,4	0,8	0,9	1

6. Нечеткое отношение R- слабо рефлексивно, если

$$R(x,y) \le R(x,x), \quad \forall x \in X \qquad (5.43)$$

Это равносильное тому, что

$$\mu_R(x,y) \le \mu_R(x,x), \quad \forall x \in X \qquad (5.44)$$

Пример 5.29.

Таблица 5.28

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0,4	0,8	0,2	0,3
x_2	0,5	1	0,6	0,4	0,8
x_3	0,8	0,5	1	0,6	0,7
x_4	0,4	0,1	0,5	0,8	0,1
x_5	0	0,9	0,7	0,1	1

Нечеткое отношение R –слабо рефлексивно.

7. Нечеткое отношение R называется сильно рефлексивной, если

$$\mu_R(x,x) = 1,\ \mu_R(x,y) < 1,\ \forall x \in X \qquad (5.45)$$

Пример 5.30.

Таблица 5.29

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0,7	0,4	0,1	0,7
x_2	0,8	1	0,6	0,3	0,5
x_3	0,6	0,8	1	0	0,9
x_4	0	0,2	0,3	1	0,1
x_5	0,7	0,6	0,4	0,1	1

Нечеткое отношение R-сильно рефлексивно.

8. Нечеткое отношение R-антирефлексивно, если

$$\mu_R(x,x) = 0, \quad \forall x \in X \qquad (5.46)$$

Пример 5.31.

Таблица 5.30

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0,9	0,5	0,2
x_2	0,8	0	0	1
x_3	0,6	1	0	0,9
x_4	0,7	0,8	0,4	0

Нечеткое отношение R-антирефлексивно.

9. Нечеткое отношение R-слабо антирефлексивно, если

$$\mu_R(x,x) \le \mu_R(x,y), \ \forall x \in X \qquad (5.47)$$

10. Нечеткое отношение R –сильно антирефлексивно, если

$$R(x,x) = 0; 0 < R(x,y), \ \forall x, y \in X \qquad (5.48)$$

Пример 5.32.

Таблица 5.31

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0	0,4	0,6	0
x_2	0,2	0	0,7	1
x_3	0,1	0,5	0,1	0,9
x_4	0,3	0,1	0,8	0

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0	0	0
x_2	0	1	1	0
x_3	1	0	1	1
x_4	0	0	0	0

а) R –слабо рефлексивно

б) R –сильно рефлексивно

11. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию транзитивности, если для

$\forall x, y, z \in X$

$$\mu_R(x,z) \geq \max\left[\min\left(\mu_R(x,y), \mu_R(y,z)\right)\right] \qquad (5.49)$$

Это отношение можно записать в виде:

$$\mu_R(x,z) \geq \overset{T}{\underset{y}{V}}\left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right] \qquad (5.50)$$

где V-максимальное из значений, а $\wedge$-минимальное из значений.

Пример 5.33.

Таблица 5.32

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,2	1	0,4	0,4
x_2	0	0,6	0,3	0
x_3	0	1	0,3	0
x_4	0,1	1	1	0,1

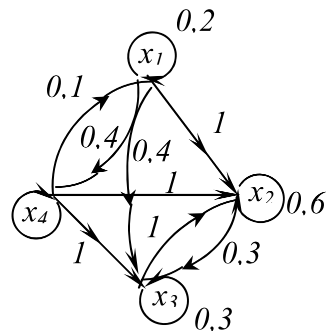


Рис. 5.10

Это нечеткое отношение транзитивно. Роведем полную проверку:

Дуга $(x_1 x_2)$

$\mu(x_1x_1) \wedge \mu(x_1x_1) = 0{,}2 \wedge 0{,}2 = 0{,}2$

$\mu(x_1x_2) \wedge \mu(x_2x_1) = 1 \wedge 0 = 0$

$\mu(x_1x_3) \wedge \mu(x_3x_1) = 0{,}4 \wedge 0 = 0$

$\mu(x_1x_4) \wedge \mu(x_4x_1) = 0{,}4 \wedge 0{,}1 = 0{,}1$

$\max[0{,}2; 0; 0{,}1] = 0{,}2;\ \mu(x_1, x_1) = 0{,}2 \geq 0{,}2$

Дуга $(x_1 x_2)$

$\mu(x_1 x_1) \wedge \mu(x_1 x_1) = 0{,}2 \wedge 1 = 0{,}2$

$\mu(x_1 x_2) \wedge \mu(x_2 x_2) = 1 \wedge 0{,}6 = 0{,}6$

$\mu(x_1 x_3) \wedge \mu(x_3 x_2) = 0{,}4 \wedge 1 = 0{,}4$

$\mu(x_1 x_4) \wedge \mu(x_4 x_2) = 0{,}4 \wedge 1 = 0{,}4$

$\max[0{,}2; 0{,}6; 0{,}4; 0{,}4] = 0{,}6;\ \mu(x_1, x_2) = 1 \geq 0{,}6$

Дуга $(x_1 x_3)$

$\mu(x_1 x_1) \wedge \mu(x_1 x_3) = 0{,}2 \wedge 0{,}4 = 0{,}2$

$\mu(x_1 x_2) \wedge \mu(x_2 x_3) = 1 \wedge 0{,}3 = 0{,}3$

$\mu(x_1 x_3) \wedge \mu(x_3 x_3) = 0{,}4 \wedge 0{,}3 = 0{,}3$

$\mu(x_1 x_4) \wedge \mu(x_4 x_3) = 0{,}4 \wedge 1 = 0{,}4$

$\max[0{,}2; 0{,}3; 0{,}3; 0{,}4] = 0{,}4;\ \mu(x_1, x_3) = 0{,}4 \geq 0{,}4$

Дуга $(x_1 x_4)$

$\mu(x_1 x_1) \wedge \mu(x_1 x_4) = 0{,}2 \wedge 0{,}4 = 0{,}2$

$\mu(x_1 x_2) \wedge \mu(x_2 x_{34}) = 1 \wedge 0 = 0$

$\mu(x_1 x_3) \wedge \mu(x_3 x_4) = 0{,}4 \wedge 0 = 0$

$\mu(x_1 x_4) \wedge \mu(x_4 x_4) = 0{,}4 \wedge 0{,}1 = 0{,}1$

$\max[0{,}2; 0; 0{,}1] = 0{,}2;\ \mu(x_1, x_4) = 0{,}4 \geq 0{,}2$

Дуга $(x_2 x_1)$

$\mu(x_2 x_1) \wedge \mu(x_1 x_1) = 0 \wedge 0{,}2 = 0$

$\mu(x_2 x_2) \wedge \mu(x_2 x_1) = 0{,}6 \wedge 0 = 0$

$\mu(x_2 x_3) \wedge \mu(x_3 x_1) = 0{,}3 \wedge 0 = 0$

$\mu(x_2x_4)\wedge\mu(x_4x_1)=0\wedge 0{,}1=0$

$\max[0;0;0;0]=0;\ \mu(x_2,x_1)=0\geq 0$

Проведя аналогичным образом подсчеты для дуг (x_2x_2); (x_2x_3); (x_2x_4); (x_3x_1); (x_3x_2); (x_3x_4); (x_4x_1); (x_4x_2); (x_4x_3) и (x_4x_4), легко доказать, что взятое нечеткое отношение R удовлетворяет (5.47) и (5.48), т.е. оно транзитивно.

12. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию слабой транзитивности, если из $R(x,y)>0;\ R(y,z)>0$ следует $R(x,z)>0$

13. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию сильной транзитивности, если из

$R(x,y)>0;\ R(y,z)>0$ следует, что

$R(x,y)\geq 0;\ R(x,y)\vee R(y,z)$

14. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию сверхсильной транзитивности, если совместно с ( ) выполнено условие:

$R(x,y)>0;\ R(y,z)>0 \Rightarrow R(x,z)>R(x,y)\vee R(y,z)$

15.Нечеткое отношение R удовлетворяет условию ультраметрической транзитивности, если из $R(x,y)>0$; $R(y,z)>=>0;\ R(x,y)\vee R(y,z)\geq R(x,z)\geq R(x,y)\wedge R(y,z)$ 16. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию линейной транзитивности, если из

$$R(x,y)>0;\ R(y,z)>0 \Rightarrow R(x,z)=R(x,y)+R(x,z)$$

17. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию метрической транзитивности, если из

$R(x,y)>0;\ R(y,z)>0 \Rightarrow R(x,y)+$

$+R(y,z)\geq R(x,z)\geq R(x,y)\vee R(y,z)$

18. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию отрицательной транзитивности, если из

$R(x,y)\ge 0;\ R(y,z)\ge 0 \Rightarrow R(x,y)\ge 0$

19. Нечеткое отношение R удовлетворяет условию квазисерийности, если из

$R(x,y)\ge 0;\ R(y,z)\ge 0 \Rightarrow R(x,z)\vee R(y,z)$

20. Нечеткое отношение R ациклической, если

$\forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in X$; из

$R(x_0,x_1)>0;\ R(x_1,x_2)>0, \ldots, R(x_{n-1},x_n)>0$ следует, что

$R(x_0,x_n)\ge 0$

Другие формулировки свойств нечеткого отношения можно найти в [32, 37,49]

В заключении введем понятие транзитивности замыкания нечеткого отношения.

Определение 5.23. Транзитивным замыканием нечеткого отношение

$$\hat{R} = R^1 \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k \cup \ldots \qquad (5.51)$$

где нечеткое отношение R^k определяется как $R^{k-1}\cup R$, (*к=1,2,…*)

Теорема 5.1. Транзитивное нечеткое замыкание $\hat{R}$ любого нечеткого отношения R транзитивно им является наименьшим транзитивным отношением, включающим R, т.е. $R\subset \hat{R}$ и для любого нечеткого транзитивного отношения Т такого, что $R\subset T$, следует $\hat{R}\subset T$.

Из этой теоремы следует, что R транзитивно тогда и только тогда, когда $R=\hat{R}$.

Если множество X состоит из n элементов, то

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n \qquad (5.52)$$

В случае, когда R рефлексивно, то

$$R \subset R^2 \subset ... \subset R^{n-1} = R^n = R^{n+1}$$

Откуда следует, что $\hat{R} = R^{n-1}$.

Весьма полезным фактом является то, что α-уровень транзитивности замыкания соответствующего α-уровня:

$$\left(\hat{R}\right)_\alpha = \left(\hat{R}_\alpha\right) \text{ для всех } \alpha \in [0;1] \qquad (5.53)$$

Свойства операции транзитивного замыкания подробно рассматриваются в [32; 37; 49]

Пример 5.34. Рассмотрим нечеткое отношение, представленное в виде

Таблица 5.33

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,4	1	0,2
x_2	0,1	0,7	0,3	0,8
x_3	0	1	0,4	0,1
x_4	0,6	0,3	0	0,9

тогда

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	1	0,6	0,4
x_2	0,6	0,7	0,3	0,8
x_3	0,1	0,7	0,4	0,8
x_4	0,6	0,4	0,6	0,9

а)

б)

Далее имеем:

Таблица 5.34

R^3

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,7	0,6	0,8
x_2	0,6	0,7	0,6	0,8
x_3	0,6	0,7	0,4	0,8
x_4	0,6	0,6	0,6	0,9

и

R^4

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,7	0,6	0,4
x_2	0,6	0,7	0,3	0,8
x_3	0,6	0,7	0,4	0,8
x_4	0,6	0,6	0,6	0,9

а) *б)*

Мы видим, что $R^4 = R^3$ и поэтому вычисления можно прекратить. При этом

Таблица 5.35

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,4	0,1	0,2
x_2	0,1	0,7	0,3	0,8
x_3	0	1	0,4	0,1
x_4	0,6	0,3	0	0,9

$\cup$

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,7	0,6	0,8
x_2	0,6	0,7	0,6	0,8
x_3	0,6	0,6	0,4	0,8
x_4	0,6	0,6	0,6	0,9

а) *б)*

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,6	0,7	0,6	0,2
x_2	0,6	0,7	0,6	0,8
x_3	0,6	1	0,4	0,8
x_4	0,6	0,3	0,6	0,9

Поскольку $R^3 \supset R$, то это нечеткое отношение не транзитивно.

Пример 5.35. Проведя аналогичные подсчеты легко показать, что нечеткое отношение R, заданное в виде

Таблица 5.36

R

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,6	0,7	0,6
x_2	0,6	0,7	0,6
x_3	0,6	1	0,4

является транзитивным нечетким отношением

Пример 5.36. Пусть заданы два нечетких отношения

Таблица 5.27

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,5	0,9	0	0,5
x_2	0	0,7	0	0
x_3	0	1	0,1	0
x_4	0	1	0,4	0
x_5	0,7	0.9	0	0,5

а)

R

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0,7	0	0	0
x_2	0,8	1	0,6	1
x_3	0	0	0,5	0
x_4	0	0	0,2	0
x_5	0,8	1	0,6	1

б)

Легко доказать, что $R_1^2 \subset R_1$ и $R_2^2 \subset R_2$, т.е. R_1 и R_2 - транзитивные нечеткие отношения. Подсчитав $R_2 \circ R_1$ и $(R_2 \circ R_1)^2$ легко убедиться, что $(R_2 \circ R_1)^2 \subset (R_1 \circ R_2)$ не выполняется и следовательно $(R_1 \circ R_2)$- не транзитивно. Отсюда следует, что композиция двух транзитивных отношений не всегда транзитивное отношение.

§5. Классификация нечетких отношений

Все типы нечетких отношений в зависимости от свойств, которыми они обладают, могут быть разделены на три класса: 1) симметричные отношения, которые обычно характеризуют сходство или различие между объектами множества X и представляются с помощью взвешенного графа с неориентированными дугами; 2) антисимметричные отношения, которые задаются на множестве отношение упорядоченности, доминирование подчиненности. Им соответствуют ориентированные взвешенные графы с односторонней ориентацией дуг; 3) класс отношений состоит из всех остальных отношений, которым соответствуют взвешенные графы с двухсторонней ориентацией дуг, причем веса противоположно направленных дуг в общем случае могут не совпадать.

Отношения каждого из классов, в зависимости от выполнения условий рефлексивности или антирефлексивности, могут быть разделены на подклассы.

Рассмотрим конкретные нечеткие отношения.

1. Нечеткое отношение предпорядка.

Определение 5.24. Нечеткое отношение предпорядка называется бинарное нечеткое отношение, обладающее свойством транзитивности и рефлексивности.

Сначала рассмотрим важную теорему.

Теорема 5.2. Если R- транзитивно и рефлексивно (т.е. предпорядок), то

$$R^k = R \qquad \kappa=1,2,2,\ldots \tag{5.51}$$

Доказательство. Из определения транзитивности (5.49), елси $\mu_R(x,x)=1$ и поскольку $R^2 = R \circ R$, то согласно (5.29)имеем:

$$\mu_{R^2}(x,z) = \underset{y}{V}\left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right] \tag{5.52}$$

Правая часть содержит два равных члена

$$\mu_R(x,x) \wedge \mu_R(x,z) = \mu_R(x,z) \wedge \mu_R(z,z) = \mu_R(x,z) \quad (5.53)$$

Поскольку в силу рефлексивности

$$\mu_R(x,x) = \mu_R(z,z) = 1$$

Напомним, что R-транзитивное отношение, т.е.

$$\mu_R(x,z) \geq \underset{y}{V}\left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right]$$

и поэтому $\mu_R(x,z)$ не меньше, чем $\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)$. Следовательно, $\mu_R(x,z)$-значение правой части (5.52)и поэтому

$$R^2 = R \quad (5.54)$$

Теорема 5.3. Если R-предпорядок, то

$R^2 = R = \ldots = R^k = \hat{R}$

Доказательство. Это следует из теоремы 5.2, формул (5.48) и (5.54).

Пример 5.37. Рассмотрим предпорядок

$E = \{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5\}$

Таблица 5.38

R

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0,7	0,8	0,5	0,5
x_2	0	1	0,3	0	0,2
x_3	0	0,7	1	0	0,2
x_4	0,6	1	0,9	1	0,6
x_5	0	0	0	0	1

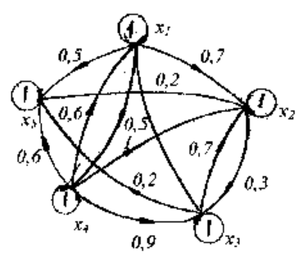


Рис.5.11

Так как $R(x,x)=1$, то R-рефлексивно. Докажем, что $R^2 = R$. В силу (5.52) имеем:

Дуга $(x_1 x_1)$

$\mu(x_1 x_1) \wedge \mu(x_1 x_1) = 1 \wedge 1 = 1$

$\mu(x_1 x_2) \wedge \mu(x_2 x_1) = 0{,}7 \wedge 0 = 0$

$\mu(x_1 x_3) \wedge \mu(x_3 x_1) = 0{,}8 \wedge 0 = 0$

$\mu(x_1 x_4) \wedge \mu(x_4 x_1) = 0{,}5 \wedge 0{,}6 = 0{,}5$

$\mu(x_1 x_5) \wedge \mu(x_5 x_1) = 0{,}5 \wedge 0 = 0$

$\max[1;0;0;0;0{,}5;0] = 1;\ \mu(x_1, x_1) = 1$

Дуга $(x_1 x_2)$

$\mu(x_1 x_1) \wedge \mu(x_1 x_2) = 1 \wedge 0{,}7 = 0{,}7$

$\mu(x_1 x_2) \wedge \mu(x_2 x_2) = 0{,}7 \wedge 1 = 0{,}7$

$\mu(x_1 x_3) \wedge \mu(x_3 x_2) = 0{,}8 \wedge 0{,}7 = 0{,}7$

$\mu(x_1 x_4) \wedge \mu(x_4 x_2) = 0{,}5 \wedge 1 = 0{,}5$

$\mu(x_1 x_5) \wedge \mu(x_5 x_2) = 0{,}5 \wedge 0 = 0$

$\max[0{,}7;0{,}7;0{,}7;0{,}5;0] = 0{,}7;$

Дуга $(x_1 x_3)$

$\mu(x_1 x_1) \wedge \mu(x_1 x_3) = 1 \wedge 0{,}8 = 0{,}8$

$\mu(x_1 x_2) \wedge \mu(x_2 x_3) = 0{,}7 \wedge 0{,}3 = 0{,}3$

$\mu(x_1 x_3) \wedge \mu(x_3 x_{13}) = 0{,}8 \wedge 1 = 0{,}8$

$\mu(x_1 x_4) \wedge \mu(x_4 x_3) = 0{,}5 \wedge 0{,}9 = 0{,}5$

$\mu(x_1 x_5) \wedge \mu(x_5 x_3) = 0{,}5 \wedge 0 = 0$

$\max[0{,}8;0{,}3;0{,}8;0{,}5;0] = 0{,}8;\ \mu(x_1, x_3) = 0{,}8$

Дуга (x_1x_4)

$\mu(x_1x_1)\wedge\mu(x_1x_4)=1\wedge 0{,}5=0{,}5$

$\mu(x_1x_2)\wedge\mu(x_2x_4)=0{,}7\wedge 0=0$

$\mu(x_1x_3)\wedge\mu(x_3x_4)=0{,}8\wedge 0=0$

$\mu(x_1x_4)\wedge\mu(x_4x_4)=0{,}5\wedge 1=0{,}5$

$\mu(x_1x_5)\wedge\mu(x_5x_4)=0{,}5\wedge 0=0$

$\max\left[0{,}5;0;0;0{,}5;0\right]=0{,}5;\ \ \mu(x_1,x_4)=0{,}5$

Дуга (x_1x_5)

$\mu(x_1x_1)\wedge\mu(x_1x_5)=1\wedge 0{,}5=0{,}5$

$\mu(x_1x_2)\wedge\mu(x_2x_5)=0{,}7\wedge 0{,}2=0{,}2$

$\mu(x_1x_3)\wedge\mu(x_3x_5)=0{,}8\wedge 0{,}2=0{,}2$

$\mu(x_1x_4)\wedge\mu(x_4x_5)=0{,}5\wedge 0{,}6=0{,}5$

$\mu(x_1x_5)\wedge\mu(x_5x_5)=0{,}5\wedge 1=0{,}5$

$\max\left[0{,}5;0{,}2;0{,}2;0{,}5;0{,}5\right]=0{,}5;\ \ \mu(x_1,x_5)=0{,}5$

Дуга (x_2x_1)

$\mu(x_2x_1)\wedge\mu(x_1x_1)=0\wedge 1=0$

$\mu(x_2x_2)\wedge\mu(x_2x_1)=1\wedge 0=0$

$\mu(x_2x_3)\wedge\mu(x_3x_1)=0{,}3\wedge 0=0$

$\mu(x_2x_4)\wedge\mu(x_4x_1)=0\wedge 0{,}6=0$

$\mu(x_2x_5)\wedge\mu(x_5x_1)=0{,}2\wedge 0=0$

$\max\left[0;0;0;0;0\right]=0;\ \ \mu(x_2,x_1)=1$

Дуга (x_2x_2)

$\mu(x_2x_1)\wedge\mu(x_1x_2)=0\wedge 0{,}7=0$

$\mu(x_2x_2)\wedge\mu(x_2x_2)=1\wedge 1=1$

$\mu(x_2x_3)\wedge\mu(x_3x_2)=0{,}3\wedge 0{,}7=0{,}3$

$\mu(x_2x_4)\wedge\mu(x_4x_2)=0\wedge 1=0$

$$\mu(x_2 x_5) \wedge \mu(x_5 x_2) = 0{,}2 \wedge 0 = 0$$

$$\max[0;1;0{,}3;0;0] = 1; \;\; \mu(x_2, x_2) = 1$$

Продолжая подсчеты получаем, что

$$R^2 = R$$

II. Нечеткое отношение подобия

Определение 5.25. Отношение подобия или нечеткое отношение эквивалентности называется нечеткое бинарное отношение, обладающее свойствами: транзитивности, рефлексивности и симметричности. Очевидно, что это симметричный предпорядок.

Пример 5.38.

Таблица 5.39

R

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	1	0,9	0,7	0,8	0,9
x_2	0,9	1	0,7	0,8	1
x_3	0,7	0,7	1	0,7	0,7
x_4	0,8	0,8	0,7	1	0,8
x_5	0,9	1	0,7	0,8	1

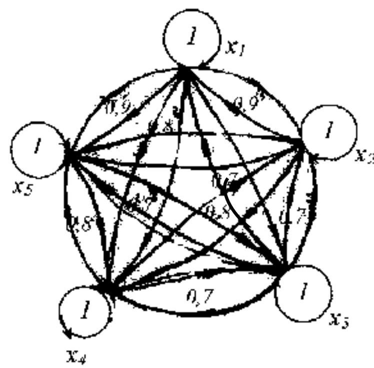


Рис.5.12

Из рисунка 5.12. видно, что нечеткое отношение R симметрично, главная диагональ состоит из единиц, поэтому R-рефлексивно и применяя (5.52) легко доказать, что $R^2 = R$, т.е. R- транзитивно.

Справедлива теорема 5.4. Пусть $R \subset E_1 \times E_2$ есть отношение подобия. Пусть также $x, y, z \in E$. Положим

$$\mu_R(x,y) = \mu_R(y,x) = a;\ \mu_R(x,z) = \mu_R(z,x) = c, \\ \mu_R(y,z) = \mu_R(z,y) = b \tag{5.55}$$

Тогда

$$c \geq a;\ \text{или}\ a \geq c;\ \text{или}\ a \geq c = a \tag{5.56}$$

Иными словами из величин *a, b, c* по крайней мере две величины равны друг другу, а третья больше двух других.

Теорема 5.5. (теорема декомпозиция для отношений подобия). Пусть R – отношение подобия в $E \times E$.

Тогда R можно разложить так:

$R = \underset{\alpha}{V}\, \alpha R_\alpha$, $0 < \alpha < 1$ при $\alpha_1 > \alpha_2 \Rightarrow R_{\alpha_2} \supset R_{\alpha_1}$

Приведем декомпозицию отношения R примера 5.38. Имеем:

Таблица 5.40

R

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,9	0,7	0,8	0,9
x_2	0,9	1	0,7	0,8	1
x_3	0.7	0,7	1	0,7	0,7
x_4	0,8	0,8	0,7	1	0,8
x_5	0,9	1	0,7	0,8	1

а)

$R_{0,7}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1	1	1
x_2	1	1	1	1	1
x_3	1	1	1	1	1
x_4	1	1	1	1	1
x_5	1	1	1	1	1

б)

$R_{0,8}$ $R_{0,9}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	1	1
x_2	1	1	0	1	1
x_3	0	0	1	0	0
x_4	1	1	0	1	1
x_5	1	1	0	1	1

в)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	1
x_2	1	1	0	0	1
x_3	0	0	1	0	0
x_4	0	0	0	1	0
x_5	1	1	0	0	1

г)

R_1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0	0	0	0
x_2	0	1	0	0	1
x_3	0	0	1	0	0
x_4	0	0	0	1	0
x_5	0	1	0	0	1

д)

III. Нечеткое отношение порядка.

Определение 5.26. Нечетким отношением порядка называется бинарное отношение, которое: 1) рефлексивно (согласно (5.43)), 2) транзитивно (согласно (5.50)), 3) антисимметрично (согласно (5.42)).

Можно также дать следующее определение: антисимметричное нечеткое отношение предпорядка называется нечетким отношением порядка.

Пример 5.39. Легко проверить, что нечеткое отношение К рефлексивно, транзитивно и антисимметрично.

R_1	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0,7	0	0
x_2	0,3	1	0	0
x_3	0,4	0,5	1	0,2
x_4	0	0	0	1

Теорема 5.6. Каждое нечеткое отношение порядка индуцирует порядок (в смысле теории множеств) на своем универсуме посредством отношения.

$$\mu_R(x,y) \geq \mu_R(y,x) \qquad (5.57)$$

Этот порядок будем обозначать $y \geq x$.

Доказательство.

Достаточно рассмотреть обычный антисимметричный граф, связанный с данным нечетким отношением порядка.

Определение 5.27. Нечеткое отношение называется полным порядком (или полностью упорядоченным нечетким отношением), если соответствующий ему обычный граф представляет полный порядок.

Кроме того, (по Л.Заде) оно называется отношением линейного порядка, если этот порядок совершенный.

Линейный порядок можно определить с помощью более строгого условия антисимметричности.

Пример 5.40.

Таблица 5.41

R_1

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	1	1	0,8
x_2	0	1	0	1
x_3	0	0,8	1	1
x_4	0	0	0	1

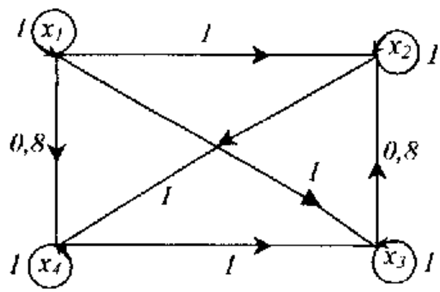


Рис.5.13

Используя обозначение $y \underset{\sim}{>} x$, если $\mu_R(x,y) > \mu_R(y,x)$

имеем $x_4 > x_2 \underset{\sim}{>} x_3 > x_1$

Отметим, что различаются также нечеткое отношение строгого и нестрогого порядка. При этом: транзитивное, антирефлексивное и антисимметричное нечеткое отношение называется нечеткое отношение строгого порядка, а транзитивное, рефлексивное и антисимметричное нечеткое отношение называется нечеткое отношение нестрогого порядка.

Пример 5.41. Рассмотрим xRy, где $x, y \in R$

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ если } \ y < x \\ \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(y-x)^2}}, \text{ если } \ y \geq x \end{cases}$$

Это отношение представляет собой строгий и совершенный порядок и при $x=y;$ $\mu_R(x,y) = 0$.

IV. Отношение различия

Определение 5.28. Нечеткое бинарное отношение, удовлетворяющее свойствам транзитивности, антирефлексивности и симметричности называется нечетким отношением различия, т.е. $\overline{R}$ - есть нечеткое отношение различия, если:

1) $\forall (x,y),(y,z),(x,z) \in E \times E$ (5.58)

$\mu_{\overline{R}}(x,z) \leq \underset{y}{\wedge}\left[\mu_{\overline{R}}(x,y) \vee \mu_{\overline{R}}(y,z)\right]$-(min-max)

2) $\forall (x,y) \in E \times E;$ $\mu_{\overline{R}}(x,x) = 0$ (5.59)

3) $\forall (x,y) \in E \times E;$ $\mu_{\overline{R}}(x,x) = \mu_{\overline{R}}(y,x)$ (5.60)

Сравнивая свойства отношения подобия со свойствами отношения различия, убеждаемся, что справедливое для нечеткого отношения подобие условия транзитивности (max-min), а условие рефлексивности на условие антирефлексивности.

Это означает, что нечеткое отношение различия является дополнением по отношению к нечеткому отношению подобия. В терминах теории вероятностей это следует понимать как два противоположных события.

Пример 5.41. Пусть $\overline{R}$ задано в виде

Таблица 5.42

$\overline{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0,1	0,3	0,2	0,1
x_2	0,1	0	0,3	0,2	0
x_3	0,3	0.3	0	0,3	0,3
x_4	0,2	0,2	0,3	0	0,2
x_5	0,1	0	0,3	0,2	0

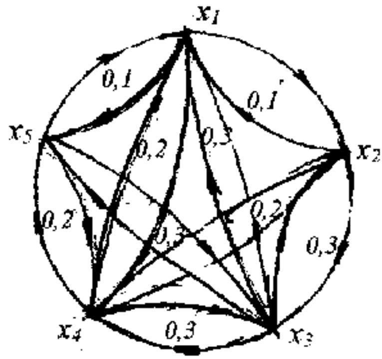


Рис.5.14

Отметим, что приведенное нечеткое отношение $\overline{R}$ совпадает с отношением подобия R в примере 5.38.

В качестве упражнения проверим (5.58) для нескольких пар элементов. Дуга (x_1x_2)

$$\mu(x_1x_1) \vee \mu(x_1, x_2) = 0 \vee 0{,}1 = 0{,}1$$

$$\mu(x_1x_2) \vee \mu(x_2, x_2) = 0{,}1 \vee 0 = 0{,}1$$

$$\mu(x_1x_3) \vee \mu(x_3, x_2) = 0{,}3 \vee 0{,}3 = 0{,}3$$

$$\mu(x_1x_4) \vee \mu(x_4, x_2) = 0{,}2 \vee 0{,}2 = 0{,}2$$

$$\mu(x_1x_1) \vee \mu(x_5, x_2) = 0{,}1 \vee 0{,}1 = 0{,}1$$

$$\min[0{,}1; 0{,}1; 0{,}3; 0{,}2; 0{,}1] = 0{,}1; \mu_{\overline{R}}(x_1x_2) = 0{,}1$$

Дуга (x_1x_3)

$$\mu(x_1x_1) \vee \mu(x_1, x_3) = 0 \vee 0{,}3 = 0{,}3$$

$$\mu(x_1 x_2) \vee \mu(x_2, x_3) = 0{,}1 \vee 0{,}3 = 0{,}3$$
$$\mu(x_1 x_3) \vee \mu(x_3, x_3) = 0{,}3 \vee 0 = 0{,}3$$
$$\mu(x_1 x_4) \vee \mu(x_4, x_3) = 0{,}2 \vee 0{,}3 = 0{,}3$$
$$\mu(x_1 x_5) \vee \mu(x_5, x_3) = 0{,}1 \vee 0{,}3 = 0{,}3$$
$$\min[0{,}3; 0{,}3; 0{,}3; 0{,}3; 0{,}3] = 0{,}3; \quad \mu_{\overline{R}}(x_1 x_3) = 0{,}3$$

и т.д.

V. Отношение сходства

Определение 5.29. Рефлексивное и симметричное нечеткое отношение называется нечеткое отношение сходства, т.е. если R – есть нечеткое отношение сходства, то

$$\forall (x, y) \in E \times E; \quad \mu_R(x, x) = 1 \text{ и } \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$$

Пример 5.42. Нечеткое отношение R является отношением сходства, так как оно рефлексивно и симметрично. Легко показать, что оно не транзитивно.

Таблица 5.43

$\overline{R}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,1	0,8	0,2	0.3
x_2	0,1	1	0	0,3	1
x_3	0,8	0	1	0,7	0
x_4	0.2	0,3	0,7	1	0,6
x_5	0,3	1	0	0,6	1

Отметим, что 1) (min-max) – расстояние на отношении сходства.

Если R есть отношение сходства, то его транзитивное замыкание $\hat{R}$ есть отношение подобия. В таком случае понятие (min-max) – расстояние, порожденного R можно определить через расстояние, порожденного $\hat{R}$

$$d_R(x,y) = 1 - \mu_{\hat{R}}(x,y) \qquad (5.61)$$

Пример 5.43. Рассмотрим нечеткое отношение R из примера 5.42. С помощью композиционной формулы (5.29) можно подсчитать транзитивное замыкание $\hat{R}$. При этом получим:

Таблица 5.44

R^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,6	0,8	0,7	0,6
x_2	0,6	1	0,6	0,6	1
x_3	0,8	0,6	1	0,7	0,6
x_4	0,7	0,6	0,7	1	0,6
x_5	0,6	1	0,6	0,6	1

а)

R^3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0,4	0,2	0,3	0,4
x_2	0,4	1	0,4	0,4	0
x_3	0,2	0,4	0	0,3	0,4
x_4	0,3	0,4	0,3	0	0,4
x_5	0,4	0	0,4	0,4	0

б)

Далее определяем $\overline{\hat{R}}$, так, что

$$\mu_{\overline{\hat{R}}}(x,y) = 1 - \mu_{\hat{R}}(x,y) \qquad (5.62)$$

Наконец, имеем: $d_{\overline{\hat{R}}}(x_1,x_2) = 0{,}4$; $d_{\overline{\hat{R}}}(x_1,x_3) = 0{,}2$,

$d_{\overline{\hat{R}}}(x_1,x_4) = 0{,}3$......, $d_{\overline{\hat{R}}}(x_3,x_4) = 0{,}3$,...... и т.д.

2) (max-.) – транзитивное замыкание для отношения сходства

Пусть R – отношение сходства. В некоторых случаях предпочтительнее измерить расстояние между элементами с помощью (max-.)

$$\mu_{R^2}(x,z) = \vee_y [\mu_R(x,y) \cdot \mu_R(y,z)] \qquad (5.63)$$

(max-.)- транзитивное замыкание отношения определяется как

$$\dot{\hat{R}} = R \cup \overset{x\cdot}{R^{2}} \cup \overset{x\cdot}{R^{3}} \cup \ldots \qquad (5.64)$$

где $R^{\dot{k}} = \underbrace{R \cdot R \ldots R}_{\text{к-раз}}$ (к=1,2,3,...)

Здесь точка над $\dot{\wedge}$ и $\dot{K}$ напоминает нам, что мы имеем дело с (max-.) композицией.

Пример 5.44. Рассмотрим отношение сходства R из примера 5.42. Для этого нечеткого отношения имеем:

Таблица 5.45

R^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,3	0,8	0,56	0,3
x_2	0,3	1	0,21	0,6	1
x_3	0,8	0,21	1	0,7	0,42
x_4	0,56	0,6	0,7	1	0,6
x_5	0,3	1	0,42	0,6	1

а)

R^3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	0,3	0,8	0,56	0,336
x_2	0,3	1	0,42	0,6	1
x_3	0,8	0,42	1	0,7	0,42
x_4	0,56	0,6	0,7	1	0,6
x_5	0,336	1	0,42	0,6	1

б)

Продолжая подсчеты легко доказать, что

$$\dot{\hat{R}} = R_1 \cup R^{\dot{2}} \cup R^{\dot{3}} \cup R^{\dot{4}} \cup R^{\dot{5}}$$

3) (min-sum)-расстояние на отношении сходства

Определение 5.30. (min-sum)- расстоянием будем называть величину

$$\nu_R(x,y) = \mu_{\dot{\hat{R}}}(x,y) \qquad (5.65)$$

Докажем, что эта функция удовлетворяет аксиомам расстояния

1) $\nu_R(x,y) > 0$, так как $\mu_{\tilde{R}}(x,y) \in [0,1]$

2) $\nu_R(x,y) = \nu_R(y,x)$, поскольку нечеткое отношение $\tilde{R}$ симметрично.

3) $\nu_R(x,x) = 0$, поскольку нечеткое отношение $\dot{\tilde{R}}$ рефлексивно, откуда следует, что $\mu_{\dot{\tilde{R}}}(x,x) = 0$.

4) Докажем справедливость условия:

$$\nu_R(x,y) * \nu_R(y,z) \geq \nu_R(x,z)$$

Имеем:

$$\mu_{\dot{\tilde{R}}}(x,z) > \nu\left[\mu_{\dot{\tilde{R}}}(x,y) \cdot \mu_{\dot{\tilde{R}}}(y,z)\right]$$

Откуда следует:

$$1 - \mu_{\bar{\tilde{R}}}(x,z) \geq \bigvee_y \left[1 - \mu_{\bar{\tilde{R}}}(x,y)\right] \cdot \left[1 - \mu_{\bar{\tilde{R}}}(y,z)\right] \geq$$
$$\bigvee_y \left[1 - \mu_{\bar{\tilde{R}}}(x,y) - \mu_{\bar{\tilde{R}}}(y,z) + \mu_{\bar{\tilde{R}}}(x,y) \cdot \mu_{\bar{\tilde{R}}}(y,z)\right]$$

Это дает

$\mu_{\bar{\tilde{R}}}(x,z) \leq \bigwedge_y \left[\mu_{\bar{\tilde{R}}}(x,y) + \mu_{\bar{\tilde{R}}}(y,z)\right]$ Откуда на основании (5.65) следует справедливость (5.66).

Пример 5.45. Рассмотрим опять пример 5.42. В примере 5.44 подсчитано (max-·) , т.е. $\dot{\tilde{R}}$. Теперь (min-sum) –

расстояние будет задаваться нечеткое отношение $\overline{\underset{\sim}{R}}$, для которого

$$\nu_R(x,y) = \mu_{\overline{\dot{\underset{\sim}{R}}}}(x,y) = 1 - \mu_{\dot{\underset{\sim}{R}}}(x,y) \qquad (5.66)$$

Учитывая, что

Таблица 5.46

$\overline{\dot{\underset{\sim}{R}}}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0,664	0,2	0,44	0,664
x_2	0,664	0	0,58	0,4	0
x_3	0,2	0,58	0	0,3	0,58
x_4	0,44	0,4	0,3	0	0,4
x_5	0,664	0	0,58	0,4	0

Так $\nu(x_3 x_5)$=0,58

$\nu(x_4, x_2)$=0,4 и. т.д.

Теорема 5.7. Пусть R – нечеткое отношение сходства. Тогда всегда справедливо включение

$$\overline{\underset{\sim}{R}} \subset \overline{\dot{\underset{\sim}{R}}} \qquad (5.67)$$

т.е.

$$\forall x,y;\ \ \mathrm{d(x,y)} \le \nu(x,y) \qquad (5.68)$$

Доказательство.

По условию (max-min) – транзитивности имеем:

$$\mu_R(x,z) \ge \bigvee_y \left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right]$$

По условию (max-·) транзитивности имеем:

$$\mu_R(x,x) \ge \bigvee_y \left[\mu_R(x,y) \cdot \mu_R(y,z)\right]$$

но согласно условию

$a \cdot b \le a \wedge b$, если $a, b \in [0,1]$.

$\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z) \ge \mu_R(x,y) \cdot \mu_R(y,z)$

Откуда следует:

$$\bigvee_{y}\left[\mu_R(x,y)\underset{\max-\min}{\wedge}\mu_R(y,z)\right]\geq\bigvee_{y}\left[\mu_R(x,y)\cdot\mu_R(y,z)\right] \quad (5.69)$$

т.е. $R \bullet R \subset R \circ R$,

где $\bullet$ - означает (max-·) – композиция, а $\circ$ - означает (max-min) – композиция. Отсюда $\dot{\hat{R}} \subset \hat{R}$ и следовательно

$\overline{\hat{R}} \subset \overline{\dot{\hat{R}}}$.

VI. Отношение несходства

Определение 5.31. Антирефлексивное симметричное отношение называется отношением несходства, т.е. если R – отношение несходства, то

1) $\forall (x,x) \in E \times E \;\; \mu_R(x,x) = 0$

2) $\forall (x,y) \in E \times E \;\; \mu_R(x,y) = \mu_R(y,x)$

Справедливо свойство: Если R – отношение сходства, то $\overline{R}$ - отношение несходства и наоборот.

Теорема 5.8. Если $\hat{R}$ есть (max-min) –транзитивное замыкание отношения сходства R, то $\overline{\hat{R}}$ есть (min -max) – транзитивное замыкание соответствующего отношения несходства.

Доказательство. (max-min) транзитивное замыкание выражается непосредством (5.29) и (5.21).

Поэтому $\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$ и

$$\mu_{R^\circ R}(x,y) = \bigwedge_{y}\left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right] \quad (5.70)$$

Тогда транзитивное замыкание (min-max) записывается в виде:

$$\overset{\vee}{R} = R \bigcap (R * R) \bigcap (R * R * R) \bigcap \dots \qquad (5.71)$$

Пусть R- отношение сходства, $\hat{R}$ - отношение подобия, $\overline{R}$ - отношение несходства и $\overset{\vee}{\overline{R}}$ - отношение различия.

Тогда

$$\overline{\hat{R}} = \overset{\vee}{\overline{R}} \qquad (5.72)$$

Действительно, ранее установлено, что если R- (max-min) транзитивность, то $\overline{R}$ – $(\min - \max)$ - транзитивность.

Покажем теперь, что

$$\underset{(\max-\min)}{\overline{R \circ R}} = \underset{(\min-\max)}{\overline{R} * \overline{R}} \qquad (5.73)$$

Имеем:

$$\mu_{R\circ R}(x,z) = \bigvee_{y}\left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right]$$

$$\mu_{\overline{R\circ R}}(x,z) = 1 - \mu_{R\circ R}(x,z) = 1 - \bigvee_{R}\left[\mu_R(x,y) \wedge \mu_R(y,z)\right] =$$

$$= \bigwedge_{y}\left[\mu_{\overline{R}}(x,y) \vee \mu_{\overline{R}}(y,z)\right] = \mu_{\overline{R}\circ\overline{R}}(x,z)$$

т.е. справедливо (5.73)

Теперь

$$\overline{\hat{R}} = \overline{R \bigcup R^2 \bigcup R^3 \bigcup \dots} = \overline{R \bigcup (R\circ R) \bigcup (R \circ R \circ R) \bigcup \dots} =$$

$$= \overline{R} \bigcap (\overline{R\circ R}) \bigcap (\overline{R\circ R\circ R}) \bigcap \dots = \overset{\vee}{\overline{R}}$$

(согласно (5.73)).

Пример 5.46. Отношение несходства R

Таблица 5.47

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0,7	0,4	0,9	0,1
x_2	0,7	0	0,6	0,2	0,1
x_3	0,4	0,6	0	0,4	0,3
x_4	0,9	0,2	0,4	0	0,5
x_5	0,1	0,3	1	0,5	0

VII. Нечеткое отношение ЕСЛИ-ТО

Пусть A и B нечеткие подмножества на универсумах X и Y. Для связи нечетких подмножеств A и B зададим на различных областях рассуждений X и Y вводится понятие нечеткого условного утверждения (лингвистической импликации), т.е. A==> при «ЕСЛИ A ТО B» [1]. Полученное импликацией отношение R выражается в терминах кортезитивного произведения подмножеств A и B, обозначенное как $R = A \times B$ с функцией принадлежности

$$\mu_R(x, y) = \mu_{A\times B}(x, y) = \min[\mu_A(x)\mu_B(y)],\ x \in X;\ y \in Y \quad (5.74)$$

(смотри определение 4.35, пример 4.16)

Может также встретиться вложение нечеткого отношения. В этом случае имеем нечеткое отношение «ЕСЛИ А, ТО ЕСЛИ В, ТО С». При этом нечеткое отношение

$$R = A \times (B \times C) = A \times B \times C \qquad (5.75)$$

Нечеткая импликация может состоять из двух (или n-го – конечного числа) импликаций; соединяющихся с помощью соединений «ИЛИ (ИНАЧЕ)», «И» и т.д.

Пример 5.47. Пусть даны импликации

ЕСЛИ A_i, ТО B_i $(i=\overrightarrow{1,n})$, где A_i, - нечеткие подмножества из Y.

Результаты нечеткого отношения R вычисляется как объединение отдельных нечетких отношений

R_i $(i=\overrightarrow{1,n})$.

$$R=\bigcup_{i=1}^{n} R_i=\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i \tag{5.76}$$

причем

$$\mu_R(x,y)=\max_i \{[\min \mu_{A_i}(x), \mu_{B_i}(y)]\} \tag{5.77}$$

§6. Путь в конечном нечетком графе

Рассмотрим в конечном графе $G \subset E \times E$ упорядоченный набор из r-элементов с повторениями или без повторения

$$C=(x_1, x_2, ..., x_r), \tag{5.78}$$

где $x_k \in E$ $(k=\overrightarrow{1,r})$, при условии

$$\forall(x_{i_k}, x_{i_{k+1}}): \mu_R(x_{i_k} x_{i_{k+1}})>0 \ (k=\overrightarrow{1,(r-1)}) \tag{5.79}$$

Упорядоченную ломанную (5.79) будем называть путем из x_1 в x_r в графе G (или в отношении R).

С каждым видом пути $(x_1, x_2, ..., x_r)$ будем связывать величину, определенную выражением

$$\begin{aligned} l(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_r}) = \mu_R(x_{i_1, x_{i_2}}) \wedge \mu_R(x_{i_2}, x_{i_3}) \wedge \\ \wedge ... \wedge \mu_R(x_{i_{r-1}} x_{i_R}) \end{aligned} \tag{5.80}$$

Теперь рассмотрим все всевозможные пути, существующие между двумя произвольными элементами $x_i x_j \in E$.

Пусть $C(x_i x_j)$ - множество таких путей. Определим сильнейший путь $C^*(x_i x_j)$ как

$$l^*(x_i, x_j) = \underset{x_i x_j}{\vee} l(x_{i_1} = x_i, x_{i_2} x_{i_r} = x_j) \qquad (5.81)$$

При этом длиной пути $\left| l(x_i x_j) \right|$ будем называть число на единицу меньше числа элементов, определяющих путь. Рассмотрим несколько теорем.

Теорема 5.9. Если $R \subset E \times E$, то

$$\forall (x, y) \in E \times E;\ \mu_R(x, y) = l_k^*(x, y) \qquad (5.82)$$

где $l_k(x, y)$ - сильнейший путь длиной «*К*», существующий между *x* и *y*.

Доказательство. Достаточно рассмотреть (5.80) и (5.81), с одной стороны, и композицию $R \circ R \circ .... \circ R$ - с другой стороны, то получим справедливость (5.82). Фактически речь идет об одной и той же (*max-min*) - операции, представленной двумя различными способами.

Теорема 5.10. Пусть $\hat{R}$ - транзитивное замыкание *R*, тогда

$$\forall (x, y) \in E \times E; \mu_{\hat{R}}(x, y) = l(x, y) \qquad (5.83)$$

Доказательство. Справедливо (5.83) следует из определений $\hat{R}$ и $l^*(x, y)$.

Теорема 5.11. Пусть *n=card E*. Если *К*-длина пути из x_i в x_j и $k > n$, то некоторые элементы пути входят в него более одного раза, причем в этом пути имеется, по крайней мере, один контур (замкнутый путь). Если этот (или эти) контур (ы) удалить, то полученный путь будет меньше или равен n; можно также установить, что

$$l_k^*(x, y) = l_i^* \le n(x, y) \tag{5.84}$$

Теорема 5.12. Если $R \subset E \times E$ и $n = card\, E$, тогда

$$\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^n \tag{5.85}$$

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы (5.10).
Пример 5.48. Рассмотрим отношение R.

Таблица 5.48

R	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	0,9	0,4	1	0
x_2	0	1	0	0,5	0
x_3	0,6	0	0	0	0,7
x_4	0	0,8	0	1	0
x_5	0,4	0	0,8	0	0

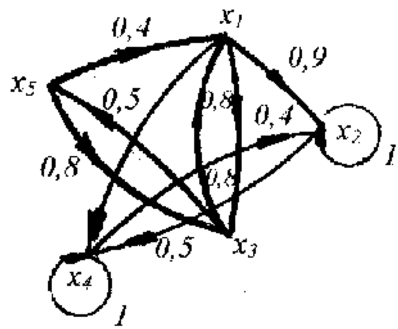


Рис.5.15

Определим сильный путь между различными элементами нечеткого множества $E = \{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5\}$. Приведем результаты подсчетов на основании теоремы (5.10).

Таблица 5.49

$R \cup R^2$

R^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0,4	0,9	0	1	0,4
x_2	0	1	0	0,5	0
x_3	0,4	0,6	0,7	0,6	0
x_4	0	0,8	0	1	0
x_5	0,6	0,4	0,4	0,4	0,7

а)

$R \cup R^2$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0,4	0,9	0,4	1	0,4
x_2	0	1	0	0,5	0
x_3	0,6	0,6	0,7	0,6	0,7
x_4	0	0,8	0	1	0
x_5	0,6	0,4	0,8	0,4	0,7

б)

R^3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0,4	0,9	0,4	1	0
x_2	0	1	0	0,5	0
x_3	0,6	0,6	0,4	0,6	0,7
x_4	0	0,8	0	1	0
x_5	0,4	0,6	0,7	0,6	0,4

в)

$R \cup R^2 \cup R^3$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0,4	0,9	0,4	1	0,4
x_2	0	1	0	0,5	0
x_3	0,6	0,6	0,7	0,6	0,7
x_4	0	0,8	0	1	0
x_5	0,6	0,6	0,8	0,6	0,7

г)

R^4

0,4	0,9	0,4	1	0,4
0	1	0	0,5	0
0,4	0,6	0,7	0,6	0,4
0	0,8	0	1	0
0,6	0,6	0,4	0,6	0,7

д)

$R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$

0,4	0,9	0,4	1	0,4
0	1	0	0,5	0
0,6	0,6	0,7	0,6	0,7
0	0,8	0	1	0
0,6	0,6	0,8	0,6	0,7

е)

R^5

0,4	0,9	0,4	1	0,4
0	1	0	0,5	0
0,4	0,6	0,7	0,6	0,4
0	0,8	0	1	0

R€

0,4	0,9	0,4	1	0,4
0	1	0	0,5	0
0,6	0,6	0,7	0,6	0,7
0	0,8	0	1	0

0,6	0,6	0,4	0,6	0,7

ж)

0,6	0,6	0,8	0,6	0,7

$\hat{R} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 \cup R^5$

з)

Проведем подробный подсчет величины пути $l_1(x_3, x_4)$. [36,38]

1) $l_1(x_3, x_4) = l(x_3, x_1) \wedge l(x_1, x_4) = 0{,}6 \wedge 1 = 0{,}6$

2) $l_2(x_3, x_4) = l(x_3, x_5) \wedge l(x_5, x) \wedge l(x_1 x_1) = 0{,}7 \wedge 0{,}4 \wedge 1 = 0{,}4$

3) $l_3(x_3, x_4) = l(x_3, x_1) \wedge l(x_1, x_2) \wedge l(x_2 x_4) = 0{,}6 \wedge 0{,}9 \wedge 0{,}5 = 0{,}5$

4) $l_4(x_3, x_4) = l(x_3, x_5) \wedge l(x_5, x_1) \wedge l(x_1 x_2) \wedge l_2(x_2 x_4) =$
$= 0{,}7 \wedge 0{,}4 \wedge 0{,}9 \wedge 0{,}5 = 0{,}4$

Таким образом,
$l^*(x_3, x_4) = l_1(x_3, x_4) \vee l_2(x_3, x_4) \wedge l_3(x_3 x_4) \vee l_4(x_3 x_4) =$
$0{,}6 \vee 0{,}4 \vee 0{,}5 \vee 0{,}4 = 0{,}6$

С другой стороны ранее подсчитано, что $\mu_{\hat{R}}(x_3, x_4) = 0{,}6$. Отсюда следует подтверждение справедливости теоремы (5.10).

Отметим, что здесь отброшены замкнутые контуры $l(x_3, x_1, x_3)$; $l(x_4, x_4)$ и $l(x_2 x_2)$ и $l(x_4, x_2, x_4)$.
Легко проверить, что и при учете этих замкнутых контуров $l^*(x_3, x_4) = 0{,}6$

§7.Разложение на максимальные подотношения подобия

Проблема разложения отношения сходства на максимальные подотношения подобия, когда отношение сходства (или соответствующее понятие расстояния) не позволяют получить классы подобия для расстояний меньших или равных заданному, связана с проблемой получения обыкновенных максимальных плоских подграфов соответствующих обычного графа.

Рассмотрим алгоритмы получения максимальных полных подматриц или главных подматриц.

I. Алгоритм Мальгранжа. Описание этого алгоритма требует введения некоторых понятий.

Определение 5.32. Полной подматрицей будем называть подматрицу, все элементы которой равные единице.

Определение 5.33. основной подматрицей или же максимальной полной подматрицей будем называть полную подматрицу, которая не содержит другую полную подматрицу.

Определение 5.34. Покрытием булевой матрицы будем называть множество полных подматриц, которые покрывают все единичные значения этой матрицы.

Пример 5.49. Для матрицы $[M]$ имеем следующие основные подмножества:

Таблица 5.50

$[M]=$

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
x_1	0	1	0	1	1	1	0	1
x_2	0	0	1	0	0	1	0	0
x_3	1	0	0	0	1	0	0	1
x_4	0	1	0	0	0	0	0	0
x_5	1	0	0	0	0	1	1	1
x_6	1	1	0	1	1	1	0	0

	y_2	y_4	y_5	y_6	y_8
x_1	1	1	1	1	1

	y_1	y_2	y_4	y_5	y_6
x_6	1	1	1	1	1

	y_2	y_4	y_5	y_6
x_1	1	1	1	1
x_6	1	1	1	1

	y_6
x_1	1
x_2	1
x_5	1
x_6	-1

	y_8
x_1	1
x_3	1
x_5	1

	y_1	y_6	y_7	y_8
x_5	1	1	1	1

	y_1
x_3	1
x_5	1
x_6	1

	y_3	y_6
x_2	1	1

	y_1	y_5	y_8
x_3	1	1	1

	y_2
x_3	1
x_4	1
x_6	1

Пусть *K* – множество строк, *j*-множество столбцов булевой матрицы. Каждая полная подматрица определяется упорядоченной парой обычных подмножеств $(K_p J_q)$, где $K_p \subset K_j J_q \subset J$. Можно показать, что операции $\dot{\cup}$ и $\underset{\bullet}{\cap}$, которые двум полным подмножествам булевой матрицы $[M]$, скажем

$[M_1]$ определяется посредством $(K_1 J_1)$

$[M_1]\,[\cancel{M_2}]$ $\qquad (K_2 J_2)$

$[M_1]\dot{\cup}[M_2]=[M']$- определенный упорядоченной парой $(K_1 \cup K_2, J_1 \cap J_2)$

$[M_1]\cap[M_2]=[M']$-определенный упорядоченной парой $(K_1 \cap K_2, J_1 \cap J_2)$ - есть внутренние операции на множестве *M* полных подмножеств матрицы $[M]$.

Для формирования всех полных матриц покрытия

$$C = \{[M_1],[M_2],\ldots,[M_p]\} \qquad (5.87)$$

следует придерживаться следующих правил

1. Вычеркиваются все матрицы $[M_r]$, содержащиеся в других матрицах покрытия C.

2. К покрытию C добавляются подматрицы, полученные применением операций $\dot{\cup}$ и $\underset{\bullet}{\cap}$, ко всем парам матриц $[M_r]$ и $[M_j]$, входящих в покрытие (кроме полных подматриц, которые уже содержатся в подматрицах покрытия C, что исключает бесконечный процесс).

Пример 5.50. Найти основные подматрицы булевой матрицы таблицы 5.42.

Этап 1. Выберем покрытие

$$[M_1] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & y_2 & y_4 & y_5 & y_6 & y_8 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \;;$$

$$[M_2] = \begin{array}{c|c|c|} & y_3 & y_6 \\ \hline x_2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \;;$$

$$[M_3] = \begin{array}{c|c|c|c|} & y_1 & y_5 & y_6 \\ \hline x_3 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \;;$$

$$[M_4] = \begin{array}{c|c|} & y_2 \\ \hline x_4 & 1 \\ \hline \end{array} \;;$$

$$[M_5] = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & y_1 & y_6 & y_7 & y_8 \\ \hline x_5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \;;$$

$$[M_6] = \begin{array}{c|ccccc} & y_1 & y_2 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \hline x_6 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array};$$

Этап 2 (второе правило) Подсчитаем объединения и пересечения:

$$K_1 \cup K_2 = \{x_1; x_2\};\ J_1 \cap J_2 = \{y_6\}$$
$$K_1 \cup K_3 = \{x_1; x_3\};\ J_1 \cap J_3 = \{y_5, y_8\}$$
$$K_1 \cup K_4 = \{x_1; x_4\};\ J_1 \cap J_4 = \{y_2\}$$
$$K_1 \cup K_5 = \{x_1; x_5\};\ J_1 \cap J_5 = \{y_6, y_8\}$$
$$K_1 \cup K_6 = \{x_1; x_6\};\ J_1 \cap J_6 = \{y_2, y_4, y_5, y_6\}$$

$$[M_7] = \begin{array}{c|c} & y_6 \\ \hline x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{array};\quad [M_8] = \begin{array}{c|cc} & y_5 & y_8 \\ \hline x_2 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 1 \end{array};$$

$$[M_9] = \begin{array}{c|c} & y_2 \\ \hline x_1 & 1 \\ x_4 & 1 \end{array};\quad [M_{10}] = \begin{array}{c|cc} & y_6 & y_8 \\ \hline x_1 & 1 & 1 \\ x_5 & 1 & 1 \end{array};$$

$$[M_{11}] = \begin{array}{c|cccc} & y_2 & y_4 & y_5 & y_6 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_6 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array};$$

$$K_2 \cup K_3 = \{x_2; x_3\};\ J_2 \cap J_3 = \varnothing$$
$$K_2 \cup K_4 = \{x_2; x_4\};\ J_2 \cap J_4 = \varnothing$$

$$\begin{array}{c|c} & y_6 \\ \hline x_2 & 1 \end{array}$$

$$K_{21} \cup K_5 = \{x_2; x_5\};\ J_2 \cap J_5 = \{y_6\} \qquad [M_{12}] =$$

$$K_2 \cup K_6 = \{x_2; x_6\};\ J_2 \cap J_6 = \{y_6\} \qquad [M_{13}] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} y_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_2 \\ x_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$K_3 \cup K_4 = \{x_3; x_4\};\ J_3 \cap J_4 = \varnothing$$

$$K_3 \cup K_5 = \{x_3; x_5\};\ J_3 \cap J_5 = \{y_1; y_8\} \qquad [M_{14}] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_8 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_3 \\ x_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$K_3 \cup K_6 = \{x_3; x_6\};\ J_3 \cap J_6 = \{y_1; y_5\} \qquad [M_{15}] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_3 \\ x_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$K_4 \cup K_5 = \{x_4; x_5\};\ J_4 \cap J_5 = \varnothing$$

$$K_4 \cup K_6 = \{x_4; x_6\};\ J_4 \cap J_6 = \{y_2\} \qquad [M_{16}] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} y_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$K_5 \cup K_6 = \{x_5; x_6\};\ J_5 \cap J_6 = \{y_1; y_6\} \qquad [M_{17}] = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} y_1 & y_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_{15} \\ x_0 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Этап 3 (первое правило). Выпишем новое покрытие

$$C = \{[M_1],[M_2],[M_3],[M_5],[M_6],[M_7],[M_8],[M_9],[M_{10}], \\ [M_{11}],[M_{12}],[M_{13}],[M_{14}],[M_{15}],[M_{16}],[M_{17}]\} \qquad (5.86)$$

$[M_4]$ содержится в $[M_7]$

Этап 4. (Второе правило). Подсчитаем объединения и пересечения.

$$K_1 \cup K_{12} = \{x_1; x_2, x_5\} = J_1 \cap J_{12} = \{y_6\} \to [M_{18}]$$
$$K_1 \cup K_{13} = \{x_1; x_2, x_6\} = J_1 \cap J_{13} = \{y_6\} \to [M_{19}]$$

$$K_1 \cup K_{14} = \{x_1; x_3, x_5\} = J_1 \cap J_{14} = \{y_8\} \to [M_{20}]$$
$$K_1 \cup K_{15} = \{x_1; x_3, x_6\} = J_1 \cap J_{15} = \{y_5\} \to [M_{21}]$$
$$K_1 \cup K_{16} = \{x_1; x_4, x_6\} = J_1 \cap J_{16} = \{y_2\} \to [M_{22}]$$
$$K_1 \cup K_{17} = \{x_1; x_5, x_6\} = J_1 \cap J_{17} = \{y_6\} \to [M_{23}]$$

Этап 5. (Первое правило)

Выпишем все покрытия

$$C'' = \{[M_1],[M_2],[M_3],[M_5],[M_6],[M_8],[M_{10}],[M_{11}],[M_{14}], [M_{15}],[M_{17}],[M_{18}],[M_{19}],[M_{20}],[M_{21}],[M_{22}],[M_{23}]\}$$

Этап 6. (Втрое правило). Подсчитаем объединения и пересечения

$$K_{18} \cup K_{13} = \{x_1; x_2, x_5; x_6\} = J_{18} \cap J_{19} = \{y_6\} \to [M_{24}]$$
$$K_{18} \cup K_{20} = \{x_1; x_2, x_3; x_5; x_6\} = J_{18} \cap J_{20} = \varnothing$$
$$K_{18} \cup K_{21} = \{x_1; x_2, x_3; x_5; x_6\} = J_{18} \cap J_{21} = \varnothing$$
$$K_{18} \cup K_{22} = \{x_1; x_2, x_4; x_5; x_6\} = J_{18} \cap J_{22} = \varnothing$$
$$K_{18} \cup K_{23} = \{x_1; x_2, x_5; x_6\} = J_{18} \cap J_{23} = \{y_6\} \to [M_{25}]$$
$$[M_{24}] = [M_{25}]$$

Поэтому

Этап 7. (Первое правило). Выпишем все покрытия

$$C'' = \{[M_1],[M_2],[M_3],[M_5],[M_6],[M_8],[M_{10}],[M_{11}],[M_{14}], [M_{15}],[M_{17}],[M_{19}],[M_{20}],[M_{22}],[M_{24}]\} \qquad (5.87)$$

Перейдем теперь к нахождению максимального подотношения подобия с помощью алгоритма Мальгранжа.

В качестве примера рассмотрим обычный симметричный граф на рис. 5.12.

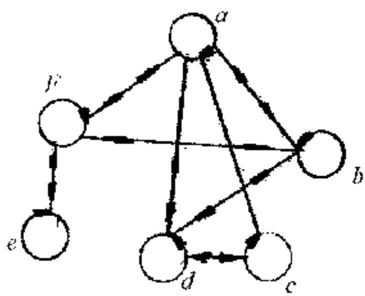
Таблица 5.51

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	1	1	1	0	1	5
x_2	1	1	0	1	0	1	4
x_3	1	0	1	1	0	0	3
x_4	1	1	1	1	0	1	5
x_5	0	0	0	0	1	1	2
x_6	1	1	0	1	1	1	5

a)

	x_1	x_4	x_6	x_2	x_3	x_5	
x_1	1	1	1	1	1	0	5
x_4	1	1	1	1	1	0	5
x_6	1	1	1	1	0	1	5
x_2	1	1	1	1	0	0	4
x_3	1	1	0	0	1	0	3
x_5	0	0	1	0	0	1	2

b)



в)

Рис.5.16

Найдем основные подматрицы соответствующей булевой матрицы (рис.5.14), которые составят ее покрытие.

Повторяя рассуждения, проведенные в примере 5.50, получим:

$$C'' = \{[M_1],[M_6],[M_7],[M_8],[M_9],[M_{10}],[M_{11}] \quad (5.88)$$

При получении (5.88) исключены подматрицы $[M_2]$, $[M_3],[M_7]$ и $[M_5]$ как содержащиеся в других подпокрытиях этого покрытия.

§8. Обратная задача для нечетких отношений

При моделировании нечетких систем часто возникает необходимость определения входных лингвистических переменных по заданным выходным при наличии нечетких рассуждений. К таким задачам относится ряд задач диагностики нечетких систем, задачи оптимального управления нечеткой системой при заданном нечетком целевом множестве, характеризующем критерий качества системы и т.д.

Рассмотрим два подхода к решению задач для нечетких отношений с применением α и β - композиции и с применением ω и ϖ- композиции.

В §3 приведено понятие композиции нечеткие отношений. По аналогии приведем понятие α - композиции.

Определение 4.35. Если $R_1 \subset X \times Y$ $R_2 \subset Y \times Z$ - нечеткие отношения, то α- композицией отношений R_1 и R_2 будем называть отношение, определенное с помощью функции принадлежности

$$\mu_{R_1 \alpha R_2}(x,z) = \bigwedge_{y \in Y} \mu_{R_1}(x,y) Z \mu_{R_2}(y,z) \tag{5.89}$$

где $\forall a,b \in [0,1]$, операция α определяется как

$$c = a\alpha b = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a \le b \\ b, & \text{если} \quad a > b \end{cases} \tag{5.90}$$

Отметим, что если $\forall a,b \in [0,1]$, $c = a\alpha b$ является наибольшим элементом в $[0,1]$ таким, что $a \wedge c \le b$, то справедливо неравенство $a \wedge (a\alpha b) \le b$. Если $a,b,d \in [0,1]$, то легко проверить, что $a\alpha(a \wedge b) \ge a\alpha d$ и $a\alpha(b \vee d) \ge a\alpha b$, а также $a\alpha(a \wedge u) \ge b$.

Используя данные соотношения, можно доказать следующие свойства нечетких отношений:

$$R_1 \subseteq R_2^{-1}\alpha(R_1 \circ R_2) \tag{5.91}$$

$$R_2 \subseteq \left(R_1\,\alpha(R_1 \circ R_2)^{-1}\right)^{-1} \tag{5.92}$$

$$\left(R_2^{-1}\alpha(R_1 \circ R_2)\right) \circ R_2 \subseteq (R_1 \circ R_2) \tag{5.93}$$

$$\left(\left(R_1 \circ (R\alpha(R_1 \circ R_2)\right)^{-1}\right)^{-1} \subseteq (R_1 \circ R_2) \tag{5.94}$$

В работе [26] показано, что обратное решение задачи для нечетких отношений базируется на двух теоремах.

Теорема 5.13. Пусть $R_1 \subseteq (X \times Y)$, $R_1 \circ R_2 \subseteq (X, z)$- нечеткие отношения, то если $\Im \subset (Y \times Z)$- множество нечетких отношений $R_2 \in \Im$, то $\Im \neq \varnothing$, тогда и только тогда, когда $\overline{R}_2 R_1^{-1} \alpha (R_1 \circ R_2) \in \Im$ является наибольшим элементом $\Im$.

Теорема 5.14. Пусть $R_1 \circ R_2 \subseteq (X, Z)$ и $R_2 \in (Y \times Z)$ - нечеткие отношения: тогда, если $\Im \subset (X, Y)$- множество нечетких отношений, то $\Im \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$\overline{R}_2 = \left(R_1 \alpha (R_1 \circ R_2)^{-1} \right)^{-1} \in \Im$; R_2 – является наибольшим элементом $\Im$.

Если композиция нечетких отношений определяется через минимакс, то рассмотренные теоремы могут быть заменены двойственными.

Определение 5.36. Если $R_1 \subset (X \times Y)$; $R_2 \subset (Y \times Z)$ нечеткие отношения, то γ-композицией двойственной α -композицией будем называть нечеткое отношение $Q = R_1 \gamma R_2$, $Q \in \Im(X \times Z)$, нечетких отношений R_1 и R_2, которое определяется с помощью функции принадлежности

$$\mu_Q(x, z) = \underset{y \in Y}{\vee} \mu_{R_1}(x, y) \gamma \mu_{R_2}(y, z), \qquad (5.95)$$

где $\forall a, b \in [0,1]$ операция γ определяется как

$$c = a \gamma b = \begin{cases} b, \text{ если } a < b \\ 0, \text{ если } a \geq b \end{cases}$$

Двойственные теоремы для γ -композиции можно сформулировать следующим образом.

Теорема 5.15. Пусть R_1 и Q – нечеткие отношения, тогда если $F \subset \Im(Y \times Z)$- множество нечетких отношений $R_2 \in F$ таких, что $R_1 \circ R_2 = Q$, то *F≠0* тогда и только тогда, когда $\hat{R}_2 = \left(R_2 \gamma Q^{-1}\right)^{-1}$; $R_2 \in F$ является наименьшим элементом *F*.

Теорема 5.16. Пусть $Q \in \Im(X \times Z)$ и $R_2 \in \Im(Y \times Z)$- нечеткие отношения, тогда, если $F \subset \Im(X \times Y)$- множество нечетких отношений, таких что $R_1 \gamma R_2 = Q$, то $F \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\hat{R}_2 = \left(R_1 \gamma Q^{-1}\right)^{-1} \in F$, $\hat{Q}$ является наименьшим значением $\Im$.

Из теорем 5.13, 5.14 видно, что α-композиция позволяет определить верхнюю грань подмножества решений обратной задачи для нечеткого отношения. Нижняя граница решений определяется с помощью γ-композиции.

Определение 5.37. Если $R_1 \in \Im(X \times Y), R_2 \in \Im(Y \times Z)$ - нечеткие отношения, то β -композицией $Q = R_1 \beta R_2, Q \in \Im(X \times Z)$ нечетких отношений R_1 и R_2 определяется через функции принадлежности

$$\mu_Q(x,z) = \underset{y \in Y}{\vee} \mu_{R_1}(x,y) \beta \mu_{R_2}(y,z), \tag{5.96}$$

где $\forall a,b \in [0,1]$ операция β определяется как

$$c = a \beta b = \begin{cases} 0, \text{ если } a < b \\ \beta, \text{ если } a \geq b \end{cases}$$

Нижняя грань $\Im(X \times Z)$ может быть найдена из условия

$$\hat{R}_1 \approx R \beta \left(R_2^{-1} \beta Q\right) \tag{5.97}$$

Рассмотрим второй подход к решению обратной задачи для нечетких отношений [64].

Пусть $X = \{x_i (i = \overline{1,m})\}$; $Y = y_j (j = \overline{1,n})$ - счетные множества, a_{ij}, b_j и r_{ij}- степени принадлежности элементов нечеткого множества *A,B* и нечеткого отношения *R*-соответственно. Композиционное правило вывода имеет вид:

$$A \circ R = B \tag{5.98}$$

Введем понятия ω и ϖ - композиций.

Пусть *P,q*$\in$*[0,1]*, тогда ω-композицию определим соотношением:

$$p\omega q = \begin{cases} q, \text{если } p > q \\ (q,1], \text{если } p = q \\ \varnothing \quad \text{если } p < q \end{cases},$$

а ϖ-композицию из условия

$$p\varpi q = \begin{cases} [0;q), \text{ если } p > q \\ [q,1], \text{если } p \le q \end{cases}$$

Пусть

$$U_{ij} = r_{ij}\omega b_j;\ \upsilon_{ij} = r_{ij}\tilde{\omega}\, b_j, \text{ а}$$

$$\omega_{ij}^k = \begin{cases} U_{ij}, \text{если} \exists i \in \{i / U_{ij} \ne \varnothing\ \} \\ \upsilon_{\omega}, \text{ если } \forall i \in \{i / U_{ij} = \varnothing\ \} \end{cases}$$

Тогда функция принадлежности нечеткого подмножества $\tilde{a}_i$ будет лежать в интервале $\tilde{a}$, который определяется из условия:

$$\tilde{a} = \bigcup_{k \in K} \tilde{a}^k, \text{ где}$$

$$\tilde{a}^k = \left(\bigcap_{i \in j} \omega_{ij}^k, \ldots, \bigcap_{i \in J} \omega_{nj}^k \right);\ K = \left\{ k / \forall i, \bigcap_{i \in j} \omega_{ij}^k \ne \varnothing \right\}$$

Нетрудно показать, что $\forall i \in (\overrightarrow{1,n})$; $a_i \in \tilde{a}_i$

Кроме того, верхняя и нижняя грани $\tilde{a}$ совпадают с верхней и нижней гранями

$\tilde{a}$ и $\overset{\text{€}}{a}$ вычисленных с помощью α и β- композиций

$$\overset{\text{€}}{a}\,\beta(R\beta B) \subset \tilde{a} \subset \overset{\text{€}}{a} = R\alpha B$$

Применение ω и $\tilde{\omega}$ -композиций удобно в случае, когда нечеткое отношение R имеет малую размерность. В схеме нечетких рассуждений удобно принять α и β-композиции, позволяющие определить не нечеткими матрицами, а векторными значениями функций принадлежности.

Пример 5.52. Пусть задана система нечетких рассуждений:

Если $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1m}$, то b_1 иначе

$a_{21}, a_{22}, ..., a_{2m}$, то b_2 иначе

....

$a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nm}$,то b_n иначе,

где $a_{ij} \in h_j$ - значения контролируемых Л.П., $u_i \in W$ - значения исправляемых Л.П., b_i - значения выходных Л.П. Пусть также определено множество управляемых значений Л.П. на базовом множестве Z.

Значениям Л.П. a_{ij}, b_i, u_i соответствуют нечеткие подмножества

$$\mu_{A_{ij}} \in \Im(X_j),\ \mu_{B_i} \in \Im(Y), \mu_{u_i} \in \Im(Z), \mu_{u_i} : \Im(Z) \to [0,1]$$

Приведенная схема нечетких рассуждений может соответствовать, например, описанию процесса лечения больного. Здесь U_i – нечеткие подмножества, элементами которых являются виды терапии. A_{ij} -параметры, характеризующие состояние больного; B_i-нечеткие интегральные оценки состояния больного – критерий качества болезни. В качестве таких критериев могут использоваться типы оценок самочувствия. Пусть требуется перевести больного в новое состояние B'-желаемое значение нечеткого критерия. При этом необходимо определить, к какому виду терапии наиболее чувствителен больной. В данном случае степень нечувствительности больного будет оцениваться разницей между верхней $\tilde{u}$ и нижней $\breve{u}$ границами множества нечетких подмножеств $F \subset \Im(Z)$, являющейся решением обратной задачи в соответствии с нечеткой информацией, содержащейся в схеме нечетких рассуждений Л.П. Следует отметить, что на управляемые Л.П. можно положить нечеткое ограничение $\varphi \in \Im(Z)$. Композиционное правило в данном случае примет вид:

$$B' = \bigcup_{i \in j} \left(\bigcap_{j=j} \left(C_j \circ \left(A_{ij} \times B_i\right)\right) \cap \left(\left(\varphi \cap U'\right) \circ \left(U_i \times B_i\right)\right) \right) \quad (5.99)$$

где $U' \in \Im(Z)$, $C_j \in \Im\left(X_j\right)$- нечеткие подмножества, соответствующие новым значениям Л.П., $u' \in W, c_j \in h_j$. Используя основные свойства нечеткого множества можно показать, что

$$B' = U \circ R \quad (5.100)$$

где

$$R = \bigcup_{i=j} \left(\varphi \cap U_i\right) \times B_i^{\eta}, \; \eta_i = \underset{i \in j}{\wedge} Poss\left(A_{ij} \middle| C_j\right)$$

$$B_i^{\eta} = \left\{ \left(y, \mu_{B_i}^{\eta}\right) \middle| \mu_{B_i}^{\eta} = \mu_{B_i} \wedge \eta_i \right\}$$

В данном случае нечеткие подмножества $\overset{\vee}{\tilde{u}}$ и $\overset{€}{\tilde{u}}$ можно определить с помощью ω и ϖ- композиций, но для этого необходимо определить нечеткое отношение R.

Рассмотрим метод вычисления $\overset{\vee}{\tilde{u}}$ и $\overset{€}{\tilde{u}}$ с помощью αи β-композиций из теоремы 4.14 имеем:

$$\begin{aligned} \overset{\vee}{\tilde{u}} &= R\alpha B' = \left(\bigcup_{i=I} (\varphi \cap U_i) \times B_i^{\eta} \right) \alpha B' = \\ &= \bigcap_{i=I} \left((\varphi \cap U_i) \alpha (\beta_i \alpha B') \right) \end{aligned} \tag{5.101}$$

и поскольку

$$R\beta B = \left(\bigcup_{i \in I} (\varphi \cap U_i) \times B_i^{\eta} \right) \beta B' = \bigcup_{i \in I} \left((\varphi \cap U_i) \alpha \left(B_i^{\eta} \beta B' \right) \right),$$

то

$$\overset{€}{\tilde{u}} \approx \overset{\vee}{\tilde{u}} \beta \left(\bigcup_{i \in I} \left((\varphi \cap U_i) \beta \left(B_i^{\eta} \beta B' \right) \right) \subset \tilde{u} \subset \overset{\vee}{\tilde{u}} \right) \tag{5.102}$$

Если $\forall i \in I;\, B_i \nu$ являются детерминированными значениями или одноэлементными множествами, имеющими функцию принадлежности, равную 1, то

$$\forall i \in I; B_i^{\eta} \beta B' = B_i \alpha B' = B_i^{\eta} \circ B'$$

Рассмотренные методы решений обратной задачи с помощью α и β-композиций могут применяться при анализе чувствительности логико-лингвистических моделей.

ГЛАВА VI. НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА

Логика – есть представление механизмов мышления, которая всегда строга и может быть формальной, но не нечеткой. Математики, исследовавшие эти механизмы мышления, установили, что существует не одна логика (например, Булева), а столько, сколько мы пожелаем, так как всё определяется выбором соответствующей системы аксиом. При этом все утверждения, построенные на этой основе, должны строго, без противоречия увязаны друг с другом согласно правилам, утвержденные в этой системе аксиом.

Следует отметить, что если булева алгебра связана с булевой теорией на четких множествах, то нечеткая логика связана с теорией нечетких множеств. Поэтому, если в качестве элементов (переменных) четкого множества, на котором при помощи четких операций (в частности, операций сложения, умножения и отрицания) строится четкая логика (в частности, четкая алгебра Буля), берутся произвольные четкие высказывания, то в качестве элементов (переменных) нечеткого множества, на котором при помощи (также) четких операций строится нечеткая логика можно взять значения функций принадлежности (характеристических функций) элементов нечетких множеств. При этом, если высказывания принимают одно из двух значений И (истина) и Л (ложь) (которым в математической логике сопоставляются численные значения «1» или «0»), то характеристические функции нечетких множеств могут принимать значения из [0,1]. Поэтому в отличии от четкой логики, в нечеткой логике значения характеристических функций нечетких множеств можно рассматривать как высказывания, принимающие значения (нечеткой истины) НИ и (нечеткой лжи) НЛ, которым в нечеткой математической логике сопоставляются значения из $[0;0,5)$ для НЛ и $[0,5;1]$ для НИ. Эти понятия будут более конкретизированы, если в качестве нечетких множеств рассматривать нечеткие множества конкретного α-уровня ($\alpha \in [0,1]$). При этом эстетике α-уровня сопоставляются значения из $[\alpha;1]$, а лжи α-уровня сопоставляется значение из $[0; \alpha)$.

§1. Равносильность формул алгебры характеристик нечеткого множества

Пусть *x*- элемент универсального множества E и *A, B, ...* - нечеткие подмножества этого универсального множества и пусть

$$\tilde{a} = \mu_A(x), \ \ \tilde{b} = \mu_B(x), ...; \ \tilde{a}, \tilde{b}, ... \in [0,1] \quad (6.1)$$

При этом величины $\tilde{a}, \tilde{b}, ...$ во всей главе будем называть характеристиками нечеткого множества. В соответствии с главой III определяются операций (логические операции) на величине $\tilde{a}, \tilde{b}$ ...

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \min(\tilde{a}, \tilde{b}) \quad (6.2)$$

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \max(\tilde{a}, \tilde{b}) \quad (6.3)$$

$$\overline{\tilde{a}} = 1 - \tilde{a} \quad (6.4)$$

$$\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{b}) \vee (\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}}) \quad (6.5)$$

Определение 6.1. Всякую характеристику нечеткого множества, состоящую из некоторых исходных характеристик нечеткого множества посредством применения логических операций (6.2)-(6.5) будем называть формулой алгебры характеристик нечеткого множества.

Исходными характеристиками нечеткого множества могут быть значения функций принадлежности элементов нечетких подмножеств заданного универсального множества.

Используя свойства множества нечетких подмножеств можно записать следующие равносильности:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{a}\wedge\tilde{b}=\tilde{a}\wedge\tilde{b}\\ \tilde{a}\vee\tilde{b}=\tilde{a}\vee\tilde{b}\end{aligned}\right\}\text{ коммуникативность}\qquad \begin{aligned}(6.6)\\(6.7)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}(\tilde{a}\vee\tilde{b})\wedge\tilde{c}=\tilde{a}\wedge(\tilde{b}\vee\tilde{c}\\ (\tilde{a}\vee\tilde{b})\vee\tilde{c}=\tilde{a}\vee(\tilde{b}\vee\tilde{c})\end{aligned}\right\}\text{ ассоциативность}\qquad \begin{aligned}(6.8)\\(6.9)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{a}\wedge\tilde{a}=\tilde{a}\\ \tilde{a}\vee\tilde{a}=a\end{aligned}\right\}\text{ иденпотентность}\qquad \begin{aligned}(6.10)\\(6.11)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\tilde{a}\wedge(\tilde{b}\vee\tilde{c})=(\tilde{a}\wedge\tilde{b})\vee(\tilde{a}\wedge\tilde{c}\\ \tilde{a}\vee(\tilde{b}\wedge\tilde{c})=(\tilde{a}\vee\tilde{b})\wedge(\tilde{a}\vee\tilde{c})\end{aligned}\right\}\text{ дистрибутивность}\qquad \begin{aligned}(6.12)\\(6.13)\end{aligned}$$

$$\tilde{a}\wedge 0=0 \qquad (6.14)$$

$$\tilde{a}\vee 0=0 \qquad (6.15)$$

$$\tilde{a}\wedge 1=\tilde{a} \qquad (6.16)$$

$$\tilde{a}\vee 1=1 \qquad (6.17)$$

$$\left(\overline{\overline{\tilde{a}}}\right)=\tilde{a} \qquad (6.18)$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{\tilde{a}\wedge\tilde{b}}=\overline{\tilde{a}}\vee\overline{\tilde{b}}\\ \overline{\tilde{a}\vee\tilde{b}}=\overline{\tilde{a}}\wedge\overline{\tilde{b}}\end{aligned}\right\}\text{ теоремы де Моргана}\qquad \begin{aligned}(6.19)\\(6.20)\end{aligned}$$

Доказательства всех этих формул тривиальны, за исключением формул (6.12), (6.13), (6.19) и (6.20).

Докажем (6.12). Предположим, что значения величин $\tilde{a},\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ могут находиться в отношениях, определяемых следующими тремя различными порядками:

$$1)\, 0\le\tilde{a}\le\tilde{b}\le\tilde{c}\le 1;\ 2)\ 0\le\tilde{b}\le\tilde{c}\le\tilde{a}\le 1 \text{ и}$$

$$3)\ 0\le\tilde{c}\le\tilde{a}\le\tilde{b}\le 1 \qquad (6.21)$$

Имеем:

$$1)\ \tilde a\wedge(\tilde b\vee\tilde c)=\min[\tilde a,\max(\tilde b,\tilde c)]=\min(\tilde a,\tilde c)=\tilde a \qquad (6.22)$$

$$(\tilde a\wedge\tilde b)\vee(\tilde a\wedge\tilde c)=\max[\min(\tilde a,\tilde b),\min(\tilde a,\tilde c)]=\max(\tilde a,\tilde a)=\tilde a \qquad (6.23)$$

$$2)\ \tilde a\wedge(\tilde b\vee\tilde c)=\min[\tilde a,\max(\tilde b,\tilde c)]=\min(\tilde a,\tilde c)=\tilde c \qquad (6.24)$$

$$(\tilde a\wedge\tilde b)\vee(\tilde a\wedge\tilde c)=\max[\min(\tilde a,\tilde b),\min(\tilde a,\tilde c)]=\max(\tilde b,\tilde c)=\tilde c \qquad (6.25)$$

$$3)\ \tilde a(\tilde b\vee\tilde c)=\min[\tilde a,\max(\tilde b,\tilde c)]=\min(\tilde a,\tilde b)=\tilde a \qquad (6.26)$$

$$(\tilde a\wedge\tilde b)\vee(\tilde a\wedge\tilde c)=\max[\min(\tilde a,\tilde c),\min(\tilde a,\tilde c)]=\max(\tilde a,\tilde c)=\tilde a \qquad (6.27)$$

Аналогично, можно доказать справедливость формулы (6.13).
Докажем теорему де Моргана (6.19).
Пусть

$$\max[(1-\tilde a),(1-\tilde b)]=1-\tilde a \qquad (6.28)$$

$$\min[\tilde a,\tilde b]=\tilde a \qquad (6.29)$$

$$\max[(1-\tilde a),(1-\tilde b)]+\min[\tilde a,\tilde b]=1-\tilde a+\tilde a=1 \qquad (6.30)$$

Тогда

$$\max[(1-\tilde a),(1-\tilde b)]=1-\min[\tilde a,\tilde b] \qquad (6.31)$$

или

$$\tilde a\vee\tilde b=\overline{\tilde a\wedge\tilde b} \qquad (6.32)$$

Замечание 6.1. За исключением двух свойств

$$\tilde a\cdot\bar{\tilde a}=0 \qquad \text{и} \qquad \tilde a+\bar{\tilde a}=1, \qquad (6.33)$$

для которых, кроме случая $\tilde a=0$ или $\tilde a=1$, соответствующие соотношения для нечеткого множества не выполняются, т.е., кроме свойства (6.6)-(6.20)

$\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{a}} = 0$ и $\tilde{a} \vee \overline{\tilde{a}} \neq 1$
составляют все свойства бинарной булевой алгебры.

Из-за этих исключений структура, определяемая на множестве переменных $\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots$ операциями «$\wedge, \vee$ и -» не может рассматриваться как алгебра в том смысле, в каком этот термин употребляется в современной математике. Поэтому, следует отдавать себе отчет в том, что слова «алгебра» как и многие другие математические термины не всегда употребляются в одном и том же смысле.

Отметим также законы двойственности.

Определение 6.2. Операции $\wedge$ и $\vee$ будем называть двойственными друг от друга.

Определение 6.3. формулы m и m^* , будем называть двойственными, если одна получается из другой заменой каждой операции на двойственную.

§2. Характеристическая функция характеристик нечеткого множества и ее полиномиальные формы

Определение 6.4. Функцию $f(\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots)$, зависящую от характеристик нечеткого множества, будем называть характеристической функцией характеристических переменных, если областью значений является отрезок [0;1], т.е., если

$$0 \leq f(\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots) \leq 1 \qquad (6.34)$$

Теорема 6.1. Если $f(\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots)$ зависит от характеристик нечеткого множества, связанных между собой операциями «$\wedge, \vee$ или $^-$», то она удовлетворяет условию (6.34).

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно, так как в силу справедливости соотношений (6.6)-(5.20) применение к $\tilde{a},\tilde{b},\ldots \in [0,1]$ операций «$\wedge,\vee$ или $\bar{\ }$» не может дать результат, выходящий из [0,1].

В отличии от булевых функций, для систематического анализа характеристических функций от характеристик нечеткого множества нельзя воспользоваться методом сопоставления таблиц истинности. Они не поддаются упрощению так легко, как булевы функции, поскольку не обладают свойствами (6.33). По этой же причине эти функции нельзя представить в нормальной дизъюнктивной форме (с помощью минитермов) или в нормальной конъюнктивной форме (с помощью минитермов). Но иногда с помощью свойств (6.6)-(6.20) можно провести определенное число упрощений характеристической функции характеристик нечеткого множества.

Рассмотрим несколько примеров таких упрощений:

1) $f(\tilde{a},\tilde{b}) = \tilde{a} \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{b}) = \tilde{a} \wedge (1,\tilde{b}) = \tilde{a} \wedge 1 = \tilde{a}$ (6.35)

согласно (6.12) и (6.16). Итак $\tilde{a} \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{b}) = \tilde{a}$ - это так называемое свойство поглощения.

Аналогично можно показать, что $\tilde{a} \wedge (\tilde{a} \vee \tilde{b}) = \tilde{a}$ -это двойственная форма свойства поглощения.

2) $f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = (\tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \tilde{c}) \vee [\bar{\tilde{a}} \wedge (\bar{\bar{\tilde{b}}} \vee \tilde{c})] \vee \bar{\tilde{a}} \vee (\tilde{b} \wedge \bar{\tilde{c}}) =$

$=(\tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \bar{\tilde{c}}) \vee (\bar{\tilde{a}} \wedge \bar{\bar{\tilde{b}}}) \vee (\bar{\tilde{a}} \wedge \tilde{c}) \vee \bar{\tilde{a}} \vee (\tilde{b} \wedge \bar{\tilde{c}}) =$

$=(\tilde{b} \wedge \bar{\tilde{c}}) = (\tilde{b} \wedge \bar{\tilde{c}}) \vee \bar{\tilde{a}}$ (6.36)

согласно свойству поглощения для (1) и (5) и для (2) - (4). Заметим, что различных булевых функций при n различных переменных равно $2^{(2n)}$. В случае n-го числа характеристик нечеткого множества, число характеристических функций, составленных произвольным образом из этих n переменных операций «$\wedge,\vee$ и $\bar{\ }$»также конечно.

Замечание 6.2. Операцию $\vee$ можно выразить через операцию $\wedge$ и операцию $\overline{\ \ }$ и наоборот. Действительно:

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \min(\tilde{a}, \tilde{b}) = 1 - \max(\bar{\tilde{a}}\,\bar{\tilde{b}}) = \overline{\bar{\tilde{a}} \vee \bar{\tilde{b}}} \qquad (6.37)$$

Это другой способ представления закона (6.19). То же можно сделать для второго закона де Моргана (6.20).

Таким образом, достаточно использовать операторы «$\wedge$и $\overline{\ \ }$» или операторы «$\vee$ и $\overline{\ \ }$», чтобы представить любую характеристическую функцию характеристик нечеткого множества, содержащую символы «$\wedge,\vee$ и $\overline{\ \ }$», хотя выражения становятся очень громоздкими.

Следует отметить, что в булевой алгебре для того, чтобы представить произвольную булеву функцию, достаточно одного оператора.

Рассмотрим оператор Шеффера:

$$a|b = \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \qquad (6.38)$$

Поскольку

$$a + b = \bar{a}|\bar{b} = (a|a)|b|b \qquad (6.39)$$

$$a \cdot a = \bar{a}|b = (a|b)|(a|b) \qquad (6.40)$$

$$\bar{a} = (a|a) \qquad (6.41)$$

Оператор Пирса:

$$a \downarrow b = \overline{a \dotplus b} = \bar{a} + \bar{b} \qquad (6.42)$$

$$a \dotplus b = \overline{a \downarrow b} = (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) \qquad (6.43)$$

$$a \cdot b = \bar{a} \downarrow \bar{b} = (a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b) \qquad (6.44)$$

$$\bar{a} = a \downarrow a$$

От булевых функций, использующих оператор пирса, можно перейти к выражениям, содержащим оператор Шеффера и наоборот:

$$a \downarrow b = \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{\overline{a} \middle| \overline{b}} = \overline{(a|a) \middle| (b|b)} = \left((a|a) \middle| (b|b)\right) \middle| \left((a|a) \middle| (b|b)\right) \qquad (6.45)$$

$$a|b = \overline{a} \dotplus \overline{b} = \overline{\overline{a} \downarrow \overline{b}} = \overline{(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)} =$$
$$= \left((a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)\right) \downarrow (a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b) \qquad (6.46)$$

Для характеристик нечеткого множества определяем также операторы:

Шеффера: $$\tilde{a} \downarrow \tilde{b} = \overline{\tilde{a} \wedge \tilde{b}} = \overline{\tilde{a}} \vee \overline{\tilde{b}} \qquad (6.47)$$

Пирса: $$\tilde{a} \downarrow \tilde{b} = \overline{\tilde{a} \vee \tilde{b}} = \overline{\tilde{a}} \wedge \overline{\tilde{b}}$$

Любую характеристическую функцию характеристик нечеткого множества можно записать с помощью только одного из этих операторов. Имеем:

1) $$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \overline{\tilde{a}} \middle| \overline{\tilde{b}} = \left(\tilde{a}|\tilde{a}\right) \middle| \left(\tilde{b}|\tilde{b}\right) \qquad (6.48)$$

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \overline{\tilde{a} \middle| \tilde{b}} = \left(\tilde{a}|\tilde{b}\right) \middle| \left(\tilde{a}|\tilde{b}\right) \qquad (6.49)$$

$$\overline{\tilde{a}} = \tilde{a}|\tilde{a} \qquad (6.50)$$

2) $$\tilde{a} \vee \tilde{b} = \overline{\tilde{a} \downarrow \tilde{b}} = \left(\tilde{a} \downarrow \tilde{b}\right) \downarrow \left(\tilde{a} \downarrow \tilde{b}\right) \qquad (6.51)$$

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} = \overline{\tilde{a}} \downarrow \overline{\tilde{b}} = \left(\tilde{a} \downarrow \tilde{a}\right) \downarrow \left(\tilde{b} \downarrow \tilde{b}\right) \qquad (6.52)$$

$$\overline{\tilde{a}} = \tilde{a} \downarrow \tilde{a} \qquad (6.53)$$

Используя формулы (6.45) и (6.46) можно перейти от оператора Пирса к оператору Шеффера и наоборот.

В качестве примера рассмотрим, как записать не слишком сложную характеристическую функцию нечеткого множества, используя, оператор Шеффера:

$$
\begin{aligned}
&f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = \overline{\tilde{a}} \wedge \left(\tilde{b} \vee \tilde{c}\right) = \left(\tilde{a}|\tilde{a}\right) \wedge \left(\left(\tilde{b}|\tilde{b}\right)|\left(\tilde{c}|\tilde{c}\right)\right) = \\
&\left(\tilde{a}|\tilde{a}\right) \wedge \left(\left(\tilde{b}|\tilde{b}\right)|\left(\left(\tilde{c}|\tilde{c}\right)|\left(\tilde{c}|\tilde{c}\right)\right)\right) = \left(\left(\tilde{a}|\tilde{a}\right)|\left(\left(\tilde{b}|\tilde{b}\right)|\left(\tilde{c}|\tilde{c}\right)|\left(\tilde{c}|\tilde{c}\right)\right)\right) = \\
&= \left|\left(\left(\tilde{a}|\tilde{a}\right)|\left(\left(\tilde{b}|\tilde{b}\right)|\left(\left(\tilde{c}|\tilde{c}\right)|\left(\tilde{c}|\tilde{c}\right)\right)\right)\right)\right.
\end{aligned}
\qquad (6.54)
$$

Это очень сложное выражение для такой простой функции как $\overline{\tilde{a}}\left(\tilde{b} \vee \overline{\tilde{c}}\right)$

Для изучения булевых бинарных функций можно использовать так называемую таблицу истинности, в которой бинарным переменным придаются все возможные значения и выписываются соответствующие значения функции.

Чтобы изучить характеристическую функцию, зависящую от одной характеристики нечеткого множества $\tilde{a}$, рассмотрим ее значение в следующих двух случаях:

$$\tilde{a} \le \overline{\tilde{a}}, \ \overline{\tilde{a}} \le \tilde{a} \qquad (6.55)$$

Для изучения характеристической функции двух переменных $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ рассмотрим ее значение в следующих восьми случаях:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{a} \le \tilde{b} \le \overline{\tilde{b}} \le \overline{\tilde{a}}; \ \tilde{a} \le \overline{\tilde{b}} \le \tilde{b} \le \overline{\tilde{a}}; \overline{\tilde{a}} \le \tilde{b} \le \overline{\tilde{b}} \le \tilde{a}; \\
&\overline{\tilde{a}} \le \overline{\tilde{b}} \le \tilde{b} \le \tilde{a}; \tilde{b} \le \tilde{a} \le \overline{\tilde{a}} \le \overline{\tilde{b}}; \tilde{b} \le \overline{\tilde{a}} \le \tilde{a} \le \overline{\tilde{b}}; \\
&\overline{\tilde{b}} \le \tilde{a} \le \overline{\tilde{a}} \le \tilde{b}; \overline{\tilde{b}} \le \overline{\tilde{a}} \le \tilde{a} \le \tilde{b}
\end{aligned}
\qquad (6.56)
$$

Для изучения характеристической функции, зависящей от трех характеристик $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ рассматривается 48 случаев, выписанных для экономии места без знака $\le$ и символа ~.

Наконец, для изучения функции n переменных рассматривается $P_n \cdot 2^n$ случаев, где $P_n = n!$

Рассматривая соотношения (6.55), (6.56) можно установить эффект аксимметриии, возникающей из-за того, что, если $\tilde{x} \le \tilde{y}$, то $\bar{\tilde{y}} \le \bar{\tilde{x}}$

Пример 6.1. Перечислим значения функции

$$f(\tilde{a},\tilde{b}) = (\tilde{a} \vee \bar{\tilde{a}}) \wedge (\bar{\tilde{a}} \vee \tilde{b} \vee \bar{\tilde{b}})$$

Представим результаты в таблице 6.1

$\le$				$\tilde{a} \vee \bar{\tilde{a}}$	$\tilde{a} \vee \tilde{b} \vee \bar{\tilde{b}}$	$(\tilde{a} \vee \bar{\tilde{a}}) \wedge (\bar{\tilde{a}} \vee \tilde{b} \vee \bar{\tilde{b}})$
$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\bar{\tilde{b}}$	$\bar{\tilde{a}}$	$\bar{\tilde{a}}$	$\bar{\tilde{a}}$	$\bar{\tilde{a}}$
$\tilde{a}$	$\bar{\tilde{b}}$	$\tilde{b}$	$\bar{\tilde{a}}$	$\bar{\tilde{a}}$	$\bar{\tilde{a}}$	$\bar{\tilde{a}}$
$\bar{\tilde{a}}$	$\tilde{b}$	$\bar{\tilde{b}}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$
$\bar{\tilde{a}}$	$\bar{\tilde{b}}$	$\tilde{b}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$	$\tilde{a}$
$\tilde{b}$	$\tilde{a}$	$\bar{\tilde{a}}$	$\bar{\tilde{b}}$	$\bar{\tilde{b}}$	$\bar{\tilde{b}}$	$\bar{\tilde{b}}$
$\tilde{b}$	$\bar{\tilde{a}}$	$\tilde{a}$	$\bar{\tilde{b}}$	$\bar{\tilde{b}}$	$\bar{\tilde{b}}$	$\bar{\tilde{b}}$
$\bar{\tilde{b}}$	$\tilde{a}$	$\bar{\tilde{a}}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$
$\bar{\tilde{b}}$	$\bar{\tilde{a}}$	$\tilde{a}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$

Определение 6.5. Функции f_1 и f_2 от характеристик нечеткого множества будем называть равносильными (тождественными), если они имеют одну и ту же таблицу значений, включающие всевозможные случаи.

Определение 6.6. Операции, проводимые над характеристиками нечеткого множества от «$\wedge, \vee$ и $\bar{\ }$» будем называть смешанными операциями. В число таких операций входят:

Умножение:

$$a \cdot b\,, \qquad (6.57)$$

для которого легко проверить, справедливость свойства:

если

$$\tilde{a} \in [0,1],\ \tilde{b} \in [0,1]\text{, то } a \cdot b \in [0,1] \qquad (6.58)$$

и суммирование

$$\tilde{a} \,\text{€}\, \tilde{b} = \tilde{a} + \tilde{b} - \tilde{a} \cdot \tilde{b} \qquad (6.59)$$

Здесь тоже сохранятся свойства (5.60).

Определение 6.7. Характеристическую функцию от характеристик нечеткого множества, полученную в результате подтверждения характеристик нечеткого множества смешанным операциям будем называть смешанной функцией характеристик нечеткого множества.

Например:

$$f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right) = \left(\tilde{a} \,\text{€}\, \tilde{b}\right) \wedge \left(\tilde{a} \,\text{€}\, \tilde{c}\right) \wedge \left(\tilde{b} \,\text{€}\, \tilde{c}\right) \qquad (6.60)$$

есть смешанная характеристическая функция характеристик нечеткого множества.

Замечание 6.3. С помощью таблицы перечисления для n переменных можно определить

$$N = (2n)\left(n! \cdot 2^n\right) \qquad (6.61)$$

различных характеристических функций от характеристик нечеткого множества. Таким образом, при

$$n = 1;\quad N = (2 \cdot 1)^2 = 2^2 = 4$$

$$n = 2;\ N = (2 \cdot 2)^{\left(2! \cdot 2^2\right)} = 4^8 = 65536$$

$$n = 3;\ N = (2 \cdot 3)^{\left(3! \cdot 2^3\right)} = 6^{48}$$

$$n = 4;\ N = (2 \cdot 4)^{\left(4! \cdot 2^4\right)} = 8^{384}$$

Только незначительную часть всех этих функций составляют характеристические функции характеристик нечеткого множества, представленные с помощью операций $\wedge$ и $\vee$ на переменных $\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots, \overline{\tilde{a}}, \overline{\tilde{b}}, \ldots$

Определение 6.8. Характеристическую функцию характеристик нечеткого множества будем называть аналитической, если ее можно выразить, используя лишь операции $\wedge$ и $\vee$, а переменные $\left(\overline{\tilde{a}}, \overline{\tilde{b}}, \ldots\right)$ и обозначим $f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots\right)$.

С помощью двойственных законов дистрибутивности (6.12), (6.13) любую характеристическую функцию характеристик нечеткого множества $f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots\right)$ можно представить в полиномиальной форме относительно операций $\wedge$ и $\vee$.

Пример 6.2. Пусть

$$f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right) = \left(\overline{\tilde{a}} \wedge \overline{\tilde{b}}\right) \vee \left(\tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \overline{\tilde{c}}\right) \qquad (6.62)$$

Эта функция записана в полиномиальной форме относительно $\vee$.

Используя закон (6.13), функцию (6.62) можно преобразовать в полиномиальную форму относительно $\wedge$.

$$f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right) = \left(\overline{\tilde{a}} \vee \tilde{a}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{a}} \vee \tilde{b}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{a}} \vee \overline{\tilde{c}}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{b}} \vee \tilde{a}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{b}} \vee \tilde{b}\right) \wedge \left(\overline{\tilde{b}} \vee \overline{\tilde{c}}\right) \quad (6.63)$$

Пример 6.3.

$$f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right) = \left(\tilde{a} \vee \tilde{b}\right) \wedge \tilde{c} \wedge \left(\overline{\tilde{a}} \vee \tilde{b} \vee \tilde{c}\right) = \left(\tilde{a} \vee \tilde{b}\right) \wedge \tilde{c}$$

Поскольку третий член поглощается вторым, используя закон (6.12), получим выражение:

$$f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}\right) = \left(\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c}\right) \vee \left(\overline{\tilde{b}} \wedge \tilde{c}\right),$$

которое дает полиномиальную форму относительно $\vee$.

Определение 6.9. Пусть характеристическая функция от характеристик нечеткого множества $f\left(\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots\right)$ выражается в полиномиальной форме относительно $\wedge$. Одночлен такой полиномиальной формы называют максимальным (собственным), если он не поглощается никаким другим одночленом этой полиномиальной формы. Аналогичное определение дается относительно $\vee$.

Определение 6.10. Всякая полиномиальная форма относительно $\vee$, состоящая только из максимальных одночленов по $\wedge$, называется приведенной полиномиальной формой относительно $\vee$.

Замена в примере (6.2) $\vee$ на $\wedge$ и в примере 6.3. ,наоборот, приводит к определению приведенной полиномиальной формы относительно $\wedge$.

Аналитические функции $f(\tilde{a}, \tilde{b}, \ldots)$ могут соответствовать несколько приведенных полиномиальных форм.

Например, следующие две полиномиальные формы:

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a}, b) = \left(\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{a}}\right) \vee \left(\tilde{a} \wedge \tilde{b}\right) \vee \left(\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}}\right) \quad (6.64)$$

и

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a}, b) = \left(\tilde{a} \wedge \tilde{b}\right) \vee \left(\tilde{a} \vee \tilde{b}\right) \quad (6.65)$$

соответствует одной и той же аналитической функции, что можно проверить как на примере 6.1. Для любой аналитической функции характеристик нечеткого множества существует по крайней мере одна приведенная полиномиальная форма относительно $\wedge$ и по крайней мере одна приведенная форма полиномиальная форма относительно $\vee$.

Пример 6.4.

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})=\left(\tilde{a}\vee\tilde{b}\right)\vee\left(\bar{\tilde{a}}\vee\tilde{c}\right)\wedge\left(\tilde{b}\wedge\bar{\tilde{b}}\right)\wedge\left(\tilde{b}\vee\tilde{c}\right)\wedge\left(\tilde{c}\vee\bar{\tilde{c}}\right)\wedge\left(\bar{\tilde{b}}\vee\bar{\tilde{c}}\right)$$

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})=\left(\bar{\tilde{a}}\vee\tilde{b}\right)\vee\left(\bar{\tilde{b}}\wedge\tilde{c}\right)$$

Характеристические функции характеристик нечеткого множества могут быть тождественны. Достаточное условие тождественности двух характеристических функций является возможность приведения их к приведенной полиномиальной форме относительно $\vee$ или $\wedge$. Необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы у этих функций была одна и та же таблица значений.

Теорема 6.2. Число различных приведенных полиномиальных форм относительно n переменных конечно и равно верхней грани числа различных аналитических характеристических функций n характеристик нечеткого множества.

Эти приведенные полиномиальные формы представлены как элементы свободной дистрибутивной решетки с $2n$ образующими. С этим понятием можно ознакомится по работе [43].

Перечисление всех приведенных форм n –го числа характеристик нечеткого множества – нелегкая проблема. Для одной переменной это тривиально. Имеем:

$$\tilde{a},\bar{\tilde{a}},\tilde{a}\wedge\bar{\tilde{a}};\tilde{a}\vee\bar{\tilde{a}} \tag{6.66}$$

т.е. четыре приведенных форм. Заметим, что $\tilde{a}\wedge\bar{\tilde{a}}$ нужно отметить, например, от $\tilde{a}$, поскольку

$\tilde{a}\wedge\bar{\tilde{a}}=\tilde{a}$, если $\tilde{a}\le\bar{\tilde{a}}$ и $\tilde{a}\wedge\bar{\tilde{a}}=\bar{\tilde{a}}$, если $\bar{\tilde{a}}\le\tilde{a}$.

Для двух переменных сделать это уже очень сложно.

Рассмотрим перечень всех возможных различных приведенных полиномиальных форм $\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b})$ относительно $\vee$: (для удобства обозначим $\tilde{a}=a,\ \tilde{b}=b$ и т.д.).

1.Формы $\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b})$, содержащие один одночлен:

1	a(1) $1\wedge 2$	$a\wedge\bar{a}(5)$ $1\wedge 2\wedge 3$	$a\wedge\bar{a}\wedge b$ (11)
2	$\bar{a}$ (2) $1\wedge 3$	$a\wedge b(6)$ $1\wedge 2\wedge 4$	$a\wedge\bar{a}\wedge\bar{b}$ (12)
3	b(3) $1\wedge 4$	$a\wedge\bar{b}(7)$ $1\wedge 3\wedge 4$	$a\wedge b\wedge\bar{b}$ (13)
4	$\bar{b}$ (4) $2\wedge 3$	$\bar{a}\wedge b(8)$ $2\wedge 3\wedge 4$	$\bar{a}\wedge b\wedge\bar{b}$ (14)
	$2\wedge 4$	$\bar{a}\wedge\bar{b}(9)$	
	$3\wedge 4$	$b\wedge\bar{b}(10)$	
			$a\wedge\bar{a}\wedge b\wedge\bar{b}$ (15)
		$1\wedge 2\wedge 3\wedge 4$	

Здесь имеется 15 приведенных форм, состоящих из одного одночлена.

2. Аналогичным образом легко подсчитать, что число форм $\underset{\sim}{f}(\tilde{a},b)$, содержащих два одночлена (где ни один из этих одночленов не поглощает другой) равно 55; для форм, содержащих по три одночлена и по четыре одночлена эти числа соответственно равны: 64 и 25.

3.Формы $\underset{\sim}{f}(\tilde{a},b)$, содержащих по пять одночленов:

$(1\wedge 2)\vee(1\wedge 3)\vee(1\wedge 4)\vee(2\wedge 3)\vee(2\wedge 4)$	$(a\wedge\bar{a})\vee(a\wedge b)\vee(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)\vee(\bar{a}\wedge b)$
$(1\wedge 2)\vee(1\wedge 3)\vee(1\wedge 4)\vee(2\wedge 3)\vee(3\wedge 4)$	$(a\wedge\bar{a})\vee(a\wedge b)\vee(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge b)\vee(b\wedge\bar{b})$
$(1\wedge 2)\vee(1\wedge 3)\vee(1\wedge 4)\vee(2\wedge 4)$	$(a\wedge\bar{a})\vee(a\wedge b)\vee(a\wedge\bar{b})\vee(\bar{a}\wedge\bar{b})\vee(b\wedge\bar{b})$

$\vee(3\wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$
$(1\wedge 2)\vee(1\wedge 3)$ $\vee(2\wedge 3)$ $\vee(2\wedge 4)$ $\vee(3\wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$
$(1\wedge 2)\vee(1\wedge 4)$ $\vee(2\wedge 3)$ $\vee(2\wedge 4)$ $\vee(3\wedge 4)$	$(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$
$(1\wedge 3)\vee$ $(1\wedge 4)\vee(2\wedge 3)$ $\vee(2\wedge 4)$ $\vee(3\wedge 4)$	

Существует шесть приведенных форм, содержащих пять одночленов.

4.Имеется одна форма, содержащая шесть одночленов.

$(1\wedge 2)\vee(1\wedge 3)$ $\vee(1\wedge 4)\vee(2\wedge 3)$ $\vee(2\wedge 4)\vee(3\wedge 4)$	$(a \wedge \bar{a}) \vee (a \wedge b) \vee$ $\vee (a \wedge \bar{b}) \vee (\bar{a} \wedge b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) \vee (b \wedge \bar{b})$

Всего имеется 166 приведенных форм.

§3. Анализ, логическая структура и синтез характеристических функций характеристик нечеткого множества

Разобьем [0;1] на m попарно граничащих интервалов, замкнутых слева и открытых справа, кроме последнего:

$$[0;1]=[0;d_1)\bigcup[\alpha_1;\alpha_2)\bigcup\ldots\bigcup[\alpha_{m-1}\alpha_m=1] \qquad (6.67)$$

Найдем условия, при которых характеристическая функция от *n* характеристик

$$f(a_1,a_2,\ldots,a_n),\ a_i\in[0,1],\ i=1,2,\ldots,n \qquad (6.68)$$

будет принадлежать интервалу $[\alpha_{\text{k-1}}\alpha_k)(k=\overline{1,n})$.

Для достижения поставленной цели рассмотрим отдельные конкретные формы характеристической функции, зависящей от трех характеристик нечеткого множества (конкретнее характеристик трех нечетких подмножеств универсального множества).

I. Пусть

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})=(\overline{\tilde{a}}\wedge\overline{\overline{\tilde{b}}})\vee(\tilde{a}\wedge\tilde{b}\wedge\tilde{c}) \qquad (6.69)$$

Найдем условия, при которых

$$\alpha_{k-1}\leq\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})<a_k \qquad (6.70)$$

Так как правая часть (6.74) состоит из двух элементов, то следует брать наибольший из них.

Гипотеза 1:

$$(\overline{a}\wedge\overline{\overline{b}})\geq\tilde{a}\wedge\tilde{b}\wedge\overline{\tilde{c}} \qquad (6.71)$$

Из нее следует:

$$\alpha_{k-1} \le \overline{\tilde{a}} \wedge \overline{\tilde{b}} < \alpha_k \tag{6.72}$$

или же

$$\alpha_{k-1} \le \min(\overline{\tilde{a}};\overline{\tilde{b}}) < \alpha_k \tag{6.73}$$

и

$$\alpha_{k-1} \le \min(1-\tilde{a};1-\tilde{b}) < \alpha_k \tag{6.74}$$

Поскольку $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ нельзя располагать произвольно относительно друг друга, то необходимо, чтобы

$$1-\tilde{a} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } 1-b \ge \alpha_{k-1} \tag{6.75}$$

и

$$1-\tilde{a} < \alpha_k \text{ и } 1-b < \alpha_k \tag{6.76}$$

Это можно переписать в виде:

$$\tilde{a} \le 1-\alpha_{k-1} \text{ и } b \le 1-\alpha_{k-1} \tag{6.77}$$

$$\tilde{a} > 1-\alpha_k \text{ или/и } \tilde{b} > 1-\alpha_k \tag{6.78}$$

Гипотеза 2:

$$\overline{\tilde{a}} \wedge \overline{\tilde{b}} < \tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \overline{\tilde{c}} \tag{6.79}$$

Отсюда следует:

$$\alpha_{k-1} \le \tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \overline{\tilde{c}} < \alpha_k$$

или же

$$\alpha_{k-1} \le \min(\tilde{a},\tilde{b},\overline{\tilde{c}}) < \alpha_k \tag{6.80}$$

или

$$\alpha_{k-1} \le \min(\tilde{a},\tilde{b},1)\bar{\tilde{c}} < \alpha_k \qquad (6.81)$$

Поскольку $\tilde{a},\tilde{b}$ и $\tilde{c}$ нельзя рассматривать произвольно относительно друг друга, то прежде всего необходимо, чтобы

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{a} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } \tilde{b} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } 1\text{-}\tilde{c} \ge \alpha_{k-1} \\ \tilde{a} < \alpha_k; \text{ и } \tilde{b} < \alpha_k \text{ и } 1\text{-}\tilde{c} < \alpha_k \end{array}\right\} \qquad (6.82)$$

Это можно переписать в виде:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{a} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } \tilde{b} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } \tilde{c} \le 1-\alpha_{k-1} \\ \tilde{a} < \alpha_k; \text{ или/и } \tilde{b} < \alpha_k \text{ или/и } \tilde{c} > 1-\alpha_k \end{array}\right\} \qquad (6.83)$$

Наконец, эти результаты можно сгруппировать следующим образом:

Условие P_1:

$$\begin{array}{l} \left[(\tilde{a} \le 1-\alpha_{k-1}) \text{ и } (\tilde{b} \le \alpha_{k-1})\right] \text{или/и} \\ \left[(\tilde{a} \ge \alpha_{k-1} \text{ и } (\tilde{b} \ge \alpha_{k-1}) \text{ и } (\tilde{c} \le 1-\alpha_{k-1})\right] \end{array} \qquad (6.84)$$

Условие P_2:

$$\begin{array}{l} \left[(\tilde{a} > 1-\alpha_k) \text{ или/и } (\tilde{b} > \alpha_k)\right] \text{и} \\ \left[(\tilde{a} < \alpha_k \text{ или/и } (\tilde{b} < \alpha_k) \text{ или/и } (\tilde{c} > 1-\alpha_k)\right] \end{array} \qquad (6.85)$$

Таким образом, для выполнения (6.69) необходимо и достаточно выполнение условий P_1 и P_2.

Пример 6.4. Пусть: $\tilde{a}$ =0,55; $\tilde{b}$ =0,65; $\tilde{c}$ =0,83.

Тогда имеем:

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = f(0{,}56;0{,}65;0{,}83) = (\overline{\tilde{a}} \wedge \overline{\tilde{b}}) \vee (\tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \tilde{c}) =$$

$$= (0{,}44 \wedge 0{,}35) \vee (0{,}56 \wedge 0{,}65 \wedge 0{,}17) = 0{,}35 \vee 0{,}17 = 0{,}35$$

II. Пусть

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = (\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}}) \vee (\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c}) \wedge \tilde{c} \qquad (6.86)$$

Предположим, что интервал [0,1] разбит на три интервала [0;0,2), [0,2; 0,4); [0,4;1].

Сначала рассмотрим [0;0,2).

Гипотеза 1.

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} > \overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c}; \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}} > \overline{\tilde{c}}$$

Тогда

$$\left.\begin{array}{c} 0 \le \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}} < 0{,}2, \qquad т.е. \\ 0 \le \tilde{a} \wedge 0 \le \min(\tilde{a}, 1 - \tilde{b}) < 0{,}2 \\ \tilde{a} \ge 0 \text{ и } \tilde{b} > 0{,}8 \end{array}\right\}$$

и

$\tilde{a} < 0{,}2$ или $\tilde{b} > 0{,}8$

Гипотеза 2.

$$\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} > \tilde{a} \wedge \tilde{b}; \overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} > \overline{\tilde{c}}$$

Тогда имеем: $0 \le \overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} < 0{,}2$

Таким образом:

$$\left.\begin{array}{c} 0 \le \min(1 - \tilde{a}, \tilde{c}) < 0{,}2 \\ \tilde{a} \le 1 \text{ и } \tilde{c} > 0 \\ \text{и} \quad \tilde{a} > 0{,}8 \text{ или/и } \tilde{c} < 0{,}2 \end{array}\right\}$$

Гипотеза 3.

$$\overline{\tilde{c}} > \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}}, \overline{\tilde{c}} > \overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c}$$

Тогда имеем: $0 \le \overline{\tilde{c}} < 0{,}2$

Таким образом:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le 1 - \tilde{c} < 0{,}2 \\ 0{,}8 < c \le 1 \end{array}\right\}$$

(Рассмотрим [0,2; 0,4)

Гипотеза 1.

$$\tilde{a} \wedge \tilde{b} > \overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c};\ \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}} > \overline{\tilde{c}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 0{,}2 \le \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}} < 0{,}4 \\ & \tilde{a} \ge 0{,}2 \text{ и } \tilde{b} \le 0{,}8 \\ \text{и} & \tilde{a} < 0{,}4 \quad \text{или/и } \tilde{b} > 0{,}6 \end{array}\right\}$$

Гипотеза 2.

$$\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} > \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}};\quad \overline{\tilde{a}} \wedge c > \overline{\tilde{c}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 0{,}2 \le \overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} < 0{,}3 \\ & \tilde{a} \le 0{,}8 \text{ и } \tilde{c} \ge 0{,}2 \\ \text{и} & \tilde{a} > 0{,}6 \quad \text{и } \tilde{c} < 0{,}4 \end{array}\right\}$$

Гипотеза 3.

$$\overline{\tilde{c}} \wedge \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}};\quad \overline{\tilde{a}} > \overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 0{,}2 \le \overline{\tilde{c}} < 0{,}4 \\ \text{и} & \tilde{c} \le 0{,}8;\quad \text{и } c \ge 0{,}6 \end{array}\right\}$$

Наконец, рассмотрим интервал [0,4;1].

Гипотеза 1.

$$\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}} > \overline{\tilde{a}} \wedge c;\ \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}} > \overline{\tilde{c}}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 0{,}4 \le \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}} \le 1 \\ & \tilde{a} \ge 0{,}4 \quad \text{и} \quad \tilde{b} \le 0{,}6 \\ \text{и} & a \le 1 \ \text{ или/и } \ b \ge 0 \end{array}\right\}$$

Гипотеза 2.

$$\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} > \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}},\ \overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} > \overline{\tilde{c}}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}4 \le \overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{c} < 1 \\ \tilde{a} \le 0{,}6;\ \tilde{c} \ge 0{,}4 \\ \text{и} \qquad \tilde{a} \ge 0 \ \text{ или/и } \quad \tilde{c} \le 1 \end{array}\right\}$$

Гипотеза 3.

$$\overline{\tilde{c}} > \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}};\ c > \overline{\tilde{a}} \wedge c$$

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}4 \le \overline{\tilde{c}} \le 1 \\ \tilde{c} \le 0{,}6 \ \text{ и } \ \tilde{c} \ge 0 \end{array}\right\}$$

Результаты этого примера можно перегруппировать следующим образом:

а) $0 \le f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) < 0{,}2$ выполняется, если

Условие $P_1(a)$

$$\left[(\tilde{a} \ge 0) \text{ и } \tilde{b} \le 1\right] \text{ или/и } \left[(\tilde{a} \le 1) \text{ и } (c \ge 0)\right] \text{или/и} (c \le 1) \quad (6.87)$$

Условие $P_2(a)$

$$\left.\begin{array}{l} \left[(\tilde{a} < 0{,}2) \text{ или/и } (\tilde{b} > 0{,}8)\right] \text{ и} \\ \left[(\tilde{a} > 0{,}8) \text{ или/и } (\tilde{c} < 0{,}2) \text{ и } (\tilde{c} > 0{,}8)\right] \end{array}\right\} \quad (6.88)$$

б) $0{,}2 \le f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) < 0{,}4$ выполняется, если

Условие

$$\left.\begin{array}{l} P_1(\delta)\left[(\tilde{a} \ge 0{,}2) \text{ и} (\tilde{\mathrm{b}} \le 0{,}8)\right] \text{ или/и} \\ \left[(\tilde{a} \le 0{,}8) \text{ и } (\tilde{\mathrm{c}} \ge 2)\right] \text{ или/и } (\tilde{\mathrm{c}} \le 0{,}8) \end{array}\right\} \quad (6.89)$$

Условие

$$\left.\begin{array}{l} P_2(\delta)\left[(\tilde{a} < 0{,}4) \text{или/и} (b > 0{,}6)\right] \text{ и} \\ \left[(\tilde{a} > 0{,}6) \text{ или/и } (\tilde{\mathrm{c}} < 0{,}4)\right] \text{и} (\mathrm{c} > 0{,}6) \end{array}\right\} \quad (6.90)$$

выполнены

в) $0{,}4 \le f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) \le 1$ выполняется, если

Условие $P_1(в)$

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left(\tilde{a} \ge 0{,}4\right) \text{ и } \left(\tilde{b} \le 0{,}6\right)\right] \text{ или/и}\\&\left[\left(\tilde{a} \le 0{,}6\right) \text{ и } \left(\tilde{c} \le 0{,}4\right)\right] \text{ или/и} \left(\tilde{c} \le 0{,}6\right)\end{aligned}\right\} \quad (6.91)$$

Условие $P_2(в)$

$$\left.\begin{aligned}&\left[\left(\tilde{a} \le 1\right) \text{ или/и } \left(\tilde{b} \ge 0\right)\right] \text{ и}\\&\left[\left(\tilde{a} \ge 0\right) \text{ или/и } \left(\tilde{c} \le 1\right)\right] \text{ и } \left(\tilde{c} \ge 0\right)\end{aligned}\right\} \quad (6.92)$$

выполнены.

Замечание 6.4. Можно заметить, что условия P_1 (6.84) и P_2 (6.89) двойственны по отношению друг другу, т.е. одно из них можно получить из другого заменой символов:
(<) на (≥); (≤) на (>); (>) на (≤); (≥) на (<),(и) на (или/и), (или/и) на (и).

Это свойство отнюдь не случайно: это общее свойство для всех приведенных полиномиальных формул относительно ∨ или ∧.

III Пусть $\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = (\tilde{a} \vee \tilde{b}) \wedge (\overline{\overline{\tilde{b}}} \vee \tilde{c})$

Гипотеза 1 $\tilde{a} \vee \tilde{b} < \overline{\overline{\tilde{b}}} \vee \tilde{c}$, отсюда

$$\text{или} \qquad \left.\begin{aligned}&\alpha_{k-1} \le \tilde{a} \vee \tilde{b} < \alpha_k\\&\alpha_{k-1} \le \max(\tilde{a},\tilde{b}) < \alpha_k\end{aligned}\right\} \qquad (6.93)$$

Поскольку $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ нельзя располагать произвольно относительно друг друга, то необходимо, чтобы

$$\text{и} \qquad \left.\begin{array}{l} \tilde{a} \geq \alpha_{k-1} \ \text{ или/и } \ \tilde{b} \geq \alpha_{k-1} \\ \tilde{a} < \alpha_k \ \text{ и } \ \tilde{b} < \alpha_k \end{array}\right\} \tag{6.94}$$

Гипотеза 2

$$\bar{\tilde{b}} \vee \tilde{c} > \tilde{a} \vee \tilde{b} \tag{6.95}$$

Отсюда $\alpha_{k-1} \leq \bar{\tilde{b}} \vee \tilde{c} < \alpha_k$

или

$$\alpha_{k-1} \leq \max(1-\tilde{b}, \tilde{c}) < \alpha_k$$

Таким образом

$$\text{и} \qquad \begin{array}{l} \tilde{b} \leq 1-\alpha_{k-1} \ \text{ или/и } \ \tilde{c} \geq \alpha_{k-1} \\ \tilde{b} > 1-\alpha_k \ \text{ и } \ \tilde{c} < \alpha_k \end{array} \tag{6.96}$$

Перегруппировав полученные результаты, имеем

Условие *P₁(в)*

$$\left.\begin{array}{l} \left[(\tilde{a} \geq \alpha_{k-1}) \ \text{ или/и } \ (\tilde{b} \geq \alpha_{k-1})\right] \ \text{ и} \\ \left[(b \leq 1-\alpha_{k-1}) \ \text{ или/и } \ (c \geq \alpha_{k-1})\right] \end{array}\right\} \tag{6.97}$$

Условие P_2*(в)*

$$\left.\begin{array}{l} \left[(\tilde{a} < \alpha_k) \ \text{ и } (\tilde{b} < \alpha_k)\right] \ \text{ или/и} \\ \left[(\tilde{b} > 1-\alpha_k) \ \text{ и } (\tilde{c} < \alpha_k)\right] \end{array}\right\} \tag{6.98}$$

Чтобы выполнялось (6.75), необходимо и достаточно выполнение (6.119) и (6.120).

Отметим, что здесь опять проявляется свойство двойственности (или/и).

В заключении отметим, что если *x*-элемент универсального множества *E* и A_α, B_α, ... – нечеткие подмножества α-уровня, то величины $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \ldots$ способны принимать одно из двух значений $\{0;1\}$. В этом случае характеристики нечеткого множества α-уровня можно рассматривать как высказывания в четкой математической логике. При этом анализ характеристических функций характеристик нечеткого множества следует проводить по законам математической логики. [44], где

$$\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},... = \begin{cases} 1, & \text{если} \;\; \tilde{a} \geq \alpha; \;\; \tilde{b} \geq \alpha; \tilde{c} \geq \alpha,... \\ 0, & \text{если} \;\; \tilde{a} < \alpha; \;\; \tilde{b} < \alpha; \tilde{c} < \alpha,... \end{cases} \qquad (6.99)$$

Напомним, что в пропозиционной алгебре пропозиционные связки

$$\left.\begin{array}{l} \text{«И» обозначается через } \Delta \\ \text{«ИЛИ/И» обозначается через } \nabla \\ \text{«дополнение» обозначается через } - \end{array}\right\} \qquad (6.100)$$

и утверждения с этими связками строятся в точности по тем же правилам, что и соответствующие им в булевой алгебре. Причем Δ соответствует $\cap$, ∇ соответствует $\cup$, $\sim$ соответствует $^{-}$.Для представления логической структуры отношений (строгих или нестрогих неравенств), которая появляется у функций нечеткой логики, рассматриваемой на интервале $[\alpha_{к-1}$, $[\alpha_к]$, будем использовать следующие символы.

Пусть $f(\tilde{a},\tilde{b},...)$ - характеристическая функция характеристик $(\tilde{a},\tilde{b},...)$.

Будем использовать следующие символы:

$$\left.\begin{aligned} Q_a &= \left(\tilde{a} \middle| \tilde{a} \geq \alpha_{k-1}\right) \\ Q_{\bar{a}} &= \left(\tilde{a} \middle| \tilde{a} \leq 1-\alpha_{k-1}\right) \\ \overline{Q}_a &= \left(\tilde{a} \middle| \tilde{a} < \alpha_k\right) \\ \overline{Q}_{\bar{a}} &= \left(\tilde{a} \middle| \tilde{a} > 1-\alpha_k\right) \end{aligned}\right\} \qquad (6.101)$$

Пусть $\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},...)$ можно представить в приведенной полиномиальной форме относительно V. Для получения логической структуры в интервале $\left[\alpha_{k-1},\alpha_k\right]$ поступим следующим образом:

1) выражение вида: $\tilde{a} \wedge \tilde{b}$ заменим выражением $Q_a \Delta Q_b$. Например:
$\tilde{a} \wedge \tilde{b} \wedge \tilde{\bar{c}}$ заменяется на $Q_{\bar{a}} \Delta Q_b \Delta Q_{\bar{c}}$.

2) Одночлены $\underset{\sim}{f}$ функции , объединенные символом V, заменяются одночленами Q и объединяются символом ∇.
Например: $\left(\tilde{\bar{a}} \wedge \tilde{b} \wedge \tilde{\bar{c}}\right) \vee \left(\tilde{\bar{b}} \wedge \tilde{c}\right)$ заменяют $\left(Q_{\bar{a}} \Delta Q_b \Delta Q_{\bar{c}}\right) \nabla \left(Q_{\bar{b}} \Delta Q_c\right)$;

3) составляем логические выражения, двойственные полученным в 2), заменяя Q_a на $Q_{\bar{a}}$, $Q_{\bar{a}}$ - на $\overline{Q}_{\bar{a}}$, Δ - на ∇, ∇ - на Δ. Например,
$\left(Q_{\bar{a}} \Delta Q_b \Delta Q_{\bar{c}}\right) \nabla \left(Q_{\bar{b}} \Delta Q_c\right)$ принимает вид
$\left(\overline{Q}_{\bar{a}} \nabla \overline{Q}_b \nabla \overline{Q}_{\bar{c}}\right) \Delta \left(\overline{Q}_{\bar{b}} \Delta \overline{Q}_c\right)$;

4)результаты, полученные 2) и 3), объединяют символом Δ.

Это дает логическое выражение $\underset{\sim}{f}$ на интервале $\left[\alpha_{k-1},\alpha_k\right]$.

Так для

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}) = \left(\tilde{\bar{a}} \wedge \tilde{b} \wedge \tilde{\bar{c}}\right) \vee \left(\tilde{\bar{b}} \wedge \tilde{c}\right)$$

логическое выражение имеет вид.

$$Q=\left[\left(Q_{\bar a}\Delta Q_b\Delta Q_{\bar c}\right)\nabla\left(Q_{\bar b}\Delta Q_c\right)\right]\Delta\left[\left(\overline{Q}_{\bar a}\nabla\overline{Q}_b\nabla\overline{Q}_{\bar c}\right)\Delta\left(\overline{Q}_{\bar b}\nabla\overline{Q}_c\right)\right] \quad (6.102)$$

Если функция $\underset{\sim}{f}(\tilde a,\tilde b,...)$ представлена в полиномиальной форме относительно $\wedge$, то правила 1)-4) модифицируются следующим образом:

1) каждое выражение вида $\tilde a\vee\tilde b$ заменяется выражением $Q_a\nabla Q_b$;
2) Одночлены функции $\underset{\sim}{f}$, объединенные символом $\wedge$, заменяется соответственно одночленом в Q, объединенными символом Δ;
3) Составляются выражения, двойственные тем, которые были получены в 2);
4) Объединяются результаты шагов 2) и 3) символом Δ.

Пример 6.5.Пусть

$$\underset{\sim}{f}(\tilde a,\tilde b,\tilde c,\tilde d)=\left(\tilde a\vee\vec{\tilde b}\right)\wedge\left(\tilde b\wedge\bar{\tilde d}\right)\wedge\left(\bar{\tilde c}\vee\tilde d\right) \quad (6.103)$$

Имеем:

$$Q=\left[\left(Q_a\nabla Q_{\bar b}\right)\Delta\left(Q_b\nabla Q_{\bar d}\right)\right]\Delta\left[\left(Q_{\bar c}\nabla Q_d\right)\right]\Delta\left[\left(\overline{Q}_a\Delta\overline{Q}_{\bar b}\right)\nabla\left(\overline{Q}_b\Delta\overline{Q}_{\bar d}\right)\nabla\left(\overline{Q}_{\bar c}\Delta\overline{Q}_d\right)\right] \quad (6.104)$$

Проиллюстрируем это на числах. Пусть

$$\left[\alpha_{k-1},\alpha_k\right]=[0{,}4;0{,}7) \quad (6.105)$$

Тогда (6.105) можно записать так:

$$\left[\left(\text{или/и}\frac{\tilde a\ge 0{,}4}{\tilde b\le 0{,}6}\right)\text{ и }\left(\text{или/и}\frac{\tilde b\ge 0{,}4}{\tilde d\le 0{,}6}\right)\text{ и }\left(\text{или/и}\frac{\tilde c\le 0{,}6}{\tilde d\ge 0{,}4}\right)\right]$$
$$\text{и}\left[\begin{pmatrix}\tilde a<0m7\\ \text{и }\tilde b>0{,}3\end{pmatrix}\text{или/и}\begin{pmatrix}\text{b}<0{,}7\\ \text{и }\tilde d>0{,}3\end{pmatrix}\text{или/и}\begin{pmatrix}\tilde c>0{,}3\\ \text{и }\tilde d<0{,}7\end{pmatrix}\right] \quad (6.106)$$

Интересно рассмотреть логические высказывания, по $Q_a, Q_{\bar a}, \overline{Q}_a$ и $\overline{Q}_{\bar a}$, которые дают достаточные условия для каждого одночлена в разложении относительно ∇. Покажем это на примере.

Пример 6.6. Рассмотрим (6.102). Предположим, что

$$[\alpha_{k-1}; \alpha_k] = [0{,}4; 0{,}9] \qquad (6.107)$$

Уже установлено выражение Q в (6.125)

Продолжим разложение (6.102), чтобы преобразовывать это выражение в полином относительно ∇. Для сокращения примем $Q_a \Delta Q_b = Q_a\, Q_b$

Имеем:

$$\begin{gathered}
Q = \left(Q_{\bar a}\, Q_b Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar b} Q_c\right)\left(\overline{Q}_{\bar a} \nabla \overline{Q}_b \nabla \overline{Q}_{\bar c}\right)\left(\overline{Q}_{\bar b} \nabla Q_c\right) = \\
\left(Q_{\bar a}\, Q_b Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar b} Q_c\right)\left(\overline{Q}_{\bar a}\, \overline{Q}_b \nabla \overline{Q}_{\bar a} \overline{Q}_c \nabla \overline{Q}_b \overline{Q}_{\bar b} \nabla \overline{Q}_b \overline{Q}_c \nabla \overline{Q}_{\bar b} Q_{\bar c} \nabla \overline{Q}_c \overline{Q}_{\bar c}\right) = \\
= Q_{\bar a} \overline{Q}_{\bar a} Q_b \overline{Q}_{\bar b} Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar a} \overline{Q}_{\bar a} Q_b Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar a} \overline{Q}_b \overline{Q}_{\bar b} Q_{\bar c} \nabla Q_{\bar a} Q_b \overline{Q}_b Q_{\bar c} Q_c \nabla \\
\nabla Q_{\bar a} Q_b \overline{Q}_{\bar b} Q_{\bar c} \overline{Q}_{\bar c} \nabla Q_{\bar a} Q_b Q_{\bar c} \overline{Q}_c \overline{Q}_{\bar c} \nabla \overline{Q}_{\bar a} Q_{\bar b} \overline{Q}_{\bar b} Q_c \nabla \overline{Q}_{\bar a} Q_b Q_c \overline{Q}_{\bar c} \nabla \\
\nabla Q_{\bar b} \overline{Q}_b Q_b Q_c \nabla Q_{\bar b} \overline{Q}_b Q_c \overline{Q}_c \nabla Q_{\bar b} \overline{Q}_{\bar b} Q_c \overline{Q}_{\bar c} \nabla Q_{\bar b} Q_c \overline{Q}_c \overline{Q}_{\bar c}
\end{gathered} \qquad (6.108)$$

Каждый из этих членов достаточен. Поэтому имеем:

$$0{,}4 \le \left(\tilde{\bar a} \wedge \tilde b \wedge \tilde{\bar c}\right) \vee \left(\tilde{\bar b} \wedge \tilde c\right) < 0{,}9 \qquad (6.109)$$

Проверим это на примере для

1) $Q_{\bar a} \overline{Q}_{\bar a} Q_b Q_{\bar c} \overline{Q}_c$ (второй одночлен)

Применяя определение (6.123), получим:

$Q_{\bar a}$: $a \le (1 - 0{,}4)$, следовательно, $a \le 0{,}6$

$\overline{Q}_{\bar a}$: $a > 0{,}1$

$Q_b : b \geq 0{,}4$

$\overline{Q_{\bar{c}}} : c \leq 0{,}6$

$\overline{Q_c} : c < 0{,}9$

Таким образом, $0{,}1 < a \leq 0{,}6; b \geq 0{,}4; c \leq 0{,}6$.

2) $Q_{\bar{a}} Q_b \overline{Q_{\bar{c}}}\,\overline{Q_c}\,\overline{Q_{\bar{c}}}$ (шестой одночлен):

$Q_{\bar{a}} : a \leq 0{,}6$	$Q_{\bar{c}} : c \leq 0{,}6$	$\overline{Q_{\bar{c}}} : c < 0{,}1$
$Q_b : b \geq 0{,}4$	$\overline{Q_c} : c < 0{,}9$	

Таким образом: $0{,}1 < a \leq 0{,}6$; $b \geq 0{,}4$; $c \leq 0{,}6$;

Проверяя все одночлены (а число их равно 12), получим достаточные условия для выполнения (6.109).

Так же представляет интерес провести двойственное разложение относительно Δ.

Обратимся к (6.102) и разложим полином относительно ∧. Имеем:

$$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})=\left(\overline{\tilde{a}}\vee\overline{\tilde{b}}\right)\wedge\left(\overline{\tilde{a}}\vee\tilde{c}\right)\wedge\left(\tilde{b}\vee\overline{\tilde{b}}\right)\wedge\left(\tilde{b}\vee\tilde{c}\right)\wedge\left(\tilde{c}\vee\overline{\tilde{c}}\right)\wedge\left(\overline{\tilde{b}}\vee\overline{\tilde{c}}\right) \qquad (6.110)$$

Опуская значок Δ, получим:

$$\begin{gathered} Q=\left(Q_{\bar{a}}\nabla Q_{\bar{b}}\right)\left(Q_{\bar{a}}\nabla Q_c\right)\left(Q_b\nabla Q_{\bar{b}}\right)\left(Q_b\nabla Q_c\right)\left(Q_c\nabla Q_{\bar{c}}\right)\times \\ \times\left(Q_{\bar{b}}\nabla Q_{\bar{c}}\right)\left(\overline{Q_{\bar{a}}}\,\overline{Q_{\bar{b}}}\nabla\overline{Q_{\bar{a}}}\,\overline{Q_c}\nabla\overline{Q_b}\,\overline{Q_{\bar{b}}}\nabla\overline{Q_b}\,\overline{Q_c}\nabla\overline{Q_c}\,\overline{Q_{\bar{c}}}\nabla\overline{Q_{\bar{b}}}\,\overline{Q_{\bar{c}}}\right) \end{gathered} \qquad (6.111)$$

Если теперь произвести разложение по ∇, то снова придем к соотношению (6.108).

Замечание 6.3. Если характеристика нечеткого множества $\tilde{a}$ принимает свое значение из интервала

$$D_{\tilde{a}} = [\alpha_1;\alpha_2) \subset [0;1],$$

то $\overline{\tilde{a}} = 1 - \tilde{a}$ принимает значение на интервале

$$D_{\overline{\tilde{a}}} = [1-\alpha_2; 1-\alpha_1) \subset [0;1)$$

Если $\tilde{a}$ принимает значение из $D_{\tilde{a}} = [0;\alpha_1) \cup [\alpha_2;1]$.

Теперь попытаемся ответить на вопрос, как для заданных характеристик нечеткого множества построить характеристическую функцию, принимающую значения из $[\alpha_{k-1};\alpha_k)$?

Рассмотрим случай двух характеристик нечеткого множества. Как видно из таблицы 6.3, ответ на поставленный вопрос не единственный. Для представления $\underset{\sim}{f}\left(\widetilde{a},\widetilde{b}\right)$, принимающей значения на интервале $[\alpha_{k-1};\alpha_k)$ можно, например, взять функцию вида $\widetilde{a} \wedge \widetilde{b}$

Следует отметить, что какое бы представление мы не выбрали, должна удовлетворяться соответствующая выбранному представлению полиномиальная форма относительно ∇ или Δ и выполняться соответствующее условие типа Q.

Рассмотрим представление характеристической функции относительно Δ (хотя можно рассмотреть и другие).

$$(Q_a)\Delta(Q_b)\Delta\left(\overline{Q}_a\nabla\overline{Q}_b\right) \qquad (6.112)$$

т.е. с учетом обозначений (6.101)

$$\left\{\begin{array}{ll} & \widetilde{a} \geq \alpha_{k-1} \\ \text{и} & \\ & \widetilde{b} \geq \alpha_{k-1} \end{array}\right\} \text{ и } \left\{\begin{array}{ll} & \widetilde{a} < \alpha_{k-1} \\ \text{или/и} & \\ & \widetilde{b} < \alpha_k \end{array}\right\} \qquad (6.113)$$

Решение можно представить с помощью любой другой функции, например, $\overline{\widetilde{a}} \wedge \overline{\widetilde{b}}$

$$(Q_{\overline{a}})\Delta\left(Q_{\overline{b}}\right)\Delta\left(\overline{Q}_{\overline{a}}\nabla\overline{Q}_{\overline{b}}\right)$$

Таблица 6.3

Логическая структура основных характеристических функций двух характеристик нечеткого множества для интервала $[\alpha_{k-1};\alpha_k]$

$\underset{\sim}{f}(\tilde{a},\tilde{b})$	Полиномиальная форма	
	Относительно ∇	Относительно Δ
$\tilde{a}\wedge\tilde{b}$	$(Q_a\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b)\nabla(Q_a\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b)$	$(Q_a)\Delta(Q_b)\Delta(\overline{Q}_a\nabla\overline{Q}_b)$ (6.135)
$\overline{\tilde{a}}\wedge\tilde{b}$	$(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b)\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b)$	$(Q_{\bar{a}})\Delta(Q_b)\Delta(\overline{Q}_{\bar{a}}\nabla\overline{Q}_b)$ (6.136)
$\overline{\tilde{a}}\wedge\overline{\tilde{b}}$	$(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b)\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_b)$	$(Q_{\bar{a}})\Delta(Q_{\bar{b}})\Delta(\overline{Q}_{\bar{a}}\nabla\overline{Q}_{\bar{b}})$ (6.137)
$\tilde{a}\vee\tilde{b}$	$(Q_a\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_b)\nabla(\overline{Q}_a\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b)$	$(\overline{Q}_a)\Delta(Q_b)\Delta(Q_a\nabla Q_b)$ (6.138)
$\overline{\tilde{a}}\vee\tilde{b}$	$(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_b)\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b)$	$(\overline{Q}_{\bar{a}})\Delta(\overline{Q}_b)\Delta(Q_{\bar{a}}\nabla Q_b)$ (6.139)
$\overline{\tilde{a}}\vee\overline{\tilde{b}}$	$(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})$	$(\overline{Q}_{\bar{a}})\Delta(\overline{Q}_{\bar{b}})\Delta(Q_{\bar{a}}\nabla Q_{\bar{b}})$ (6.140)
$(\tilde{a}\wedge\overline{\tilde{b}})\vee(\overline{\tilde{a}}\wedge\tilde{b})$	$(\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_a\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_{\bar{b}})\nabla(Q_a\Delta\overline{Q}_a\Delta\overline{Q}_b\Delta Q_{\bar{b}})$ $\nabla(Q_a\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(Q_a\Delta\overline{Q}_b\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})$ $\nabla(\overline{Q}_a\Delta Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b)\nabla(Q_a\Delta Q_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b)$ $(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_b\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})$	$(Q_a\nabla Q_{\bar{a}})\Delta(Q_a\nabla Q_b)\Delta$ $\Delta(Q_{\bar{a}}\nabla Q_{\bar{b}})\Delta(Q_b\nabla Q_{\bar{b}})\Delta$ (6.141) $\Delta(\overline{Q}_a\nabla\overline{Q}_{\bar{b}})\Delta(\overline{Q}_{\bar{a}}\nabla\overline{Q}_b)$
$(\tilde{a}\vee\overline{\tilde{b}})\wedge(\overline{\tilde{a}}\vee\tilde{b})$	$(Q_a\Delta\overline{Q}_a\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(Q_a\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})$ $\nabla(Q_a\Delta Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_a\Delta\overline{Q}_b)\nabla(Q_a\Delta Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_b)$ $\nabla(\overline{Q}_a\Delta Q_b\Delta Q_b\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_b\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_b)\nabla$ $\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_a\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_{\bar{b}})\nabla(Q_{\bar{a}}\Delta\overline{Q}_{\bar{a}}\Delta Q_{\bar{b}}\Delta\overline{Q}_b)$	$(Q_a\nabla Q_{\bar{b}})\Delta(Q_b\nabla Q_{\bar{a}})\Delta$ $\Delta(\overline{Q}_a\nabla\overline{Q}_b)\Delta(\overline{Q}_a\nabla\overline{Q}_{\bar{a}})\Delta$ (6.142) $\Delta(\overline{Q}_b\nabla\overline{Q}_{\bar{b}})\Delta(\overline{Q}_{\bar{a}}$

и таким образом

$$\left\{\begin{matrix} & \tilde{a} \le 1-\alpha_{k-1} \\ \text{и} & \\ & \tilde{b} \le 1-\alpha_{k-1} \end{matrix}\right\} \text{ и } \left\{\begin{matrix} & \tilde{a} > 1-\alpha_{k} \\ \text{или/и} & \\ & \tilde{b} > 1-\alpha_{k} \end{matrix}\right\}$$

Вернемся к (6.102). Пусть заданы верхнее и нижнее пределы для $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$.

$$\left\{\begin{matrix} & \tilde{a} \ge \beta_1 \\ \text{и} & \\ & \tilde{b} \ge \beta_2 \end{matrix}\right\} \text{ и } \left\{\begin{matrix} & \tilde{a} < \beta_3 \\ \text{или/и} & \\ & \tilde{b} < \beta_4 \end{matrix}\right\} \qquad (6.114)$$

Введем коэффициенты согласования λ_{ij}

$\lambda_{11}\beta_1 = \alpha_{k-1}$; $\lambda_{12}\beta_2 = \alpha_{k-1}$; $\lambda_{21}\beta_3 = \alpha_k$;$\lambda_{22}\beta_4 = \alpha_k$; (6.115)

Чтобы технически реализовать функцию $f(\tilde{a},\tilde{b})$, которая принимает значения из интервала $[\alpha_{k-1},\alpha_k)$, когда $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ изменяются соответственно в интервалах $[\beta_1;\beta_3)$ и $[\beta_2;\beta_4)$, можно построить схему , аналогичную изображенной на рис.6.1. Для элементов этого типа будем использовать следующие символы:

λ_{ij}-устройство параметрического согласования для восстановления α_{k-1} и α_k ;

И – логический элемент реализации *и*;

ИЛИ/И – логический элемент, реализующий *или/и*;

НЕ - логический элемент, реализующий отрицание;

α_{k-1} - устройство, задающее нижний предел;

α_k - устройство, задающее верхний предел.

Блок сравнения $\alpha_{k-1} \le f(\tilde{a},\tilde{b})$

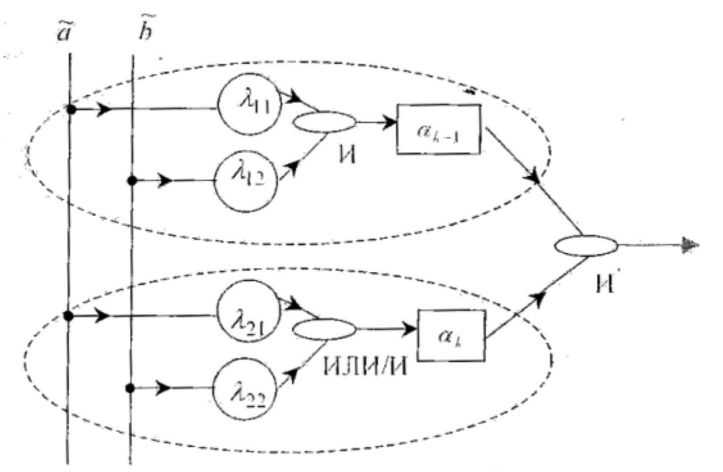


Рис. 6.1. Блок сравнения $f(\widetilde{a},\widetilde{b}) < \alpha_k$

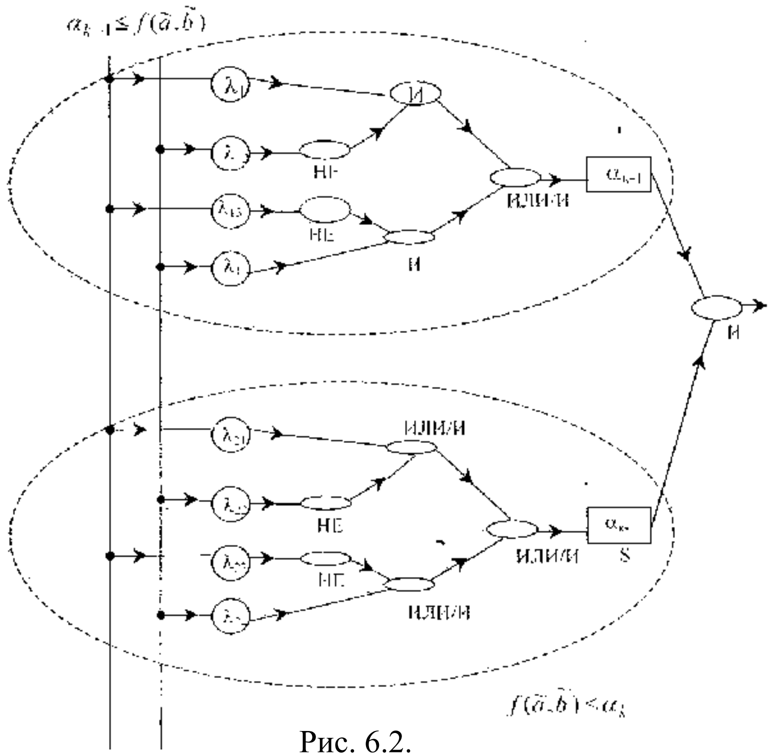


Рис. 6.2.

Пример 6.7. Осуществим синтез схемы при условии

$$\alpha_{k-1} \le f(\tilde{a}, \tilde{b}) < \alpha_k \qquad (6.116)$$

используя для этого представление функции

$$f(\tilde{a}, \tilde{b}) = \left(\tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}}\right) \vee \left(\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{b}\right) \qquad (6.117)$$

$$Q = \left[\left(Q_a \Delta Q_{\bar{b}}\right) \nabla \left(Q_{\bar{a}} \Delta Q_b\right)\right] \Delta \left[\left(\overline{Q}_a \nabla \overline{Q}_{\bar{b}}\right) \Delta \left(\overline{Q}_{\bar{a}} \nabla \overline{Q}_{\bar{b}}\right)\right] \qquad (6.118)$$

Это можно представить в виде:

$$\left(\begin{array}{ll} & \tilde{a} \ge \alpha_{k-1} \\ \text{и} & \tilde{b} \le 1 - \alpha_{k-1} \end{array}\right) \text{ или/и } \left(\begin{array}{ll} & \tilde{a} \le 1 - \alpha_{k-1} \\ \text{и} & \tilde{b} \ge \alpha_{k-1} \end{array}\right)$$

и

$$\left(\begin{array}{ll} & \tilde{a} < \alpha_k \\ \text{или/и} & \tilde{b} > 1 - \alpha_k \end{array}\right) \text{ и } \left(\begin{array}{ll} & \tilde{a} > 1 - \alpha_k \\ \text{или/и} & \tilde{b} < \alpha_k \end{array}\right)$$

Если пределы таковы, что

$$\left(\begin{array}{ll} & \tilde{a} \ge \beta_1 \\ \text{и} & \tilde{b} \le \beta_2 \end{array}\right) \text{ или/и } \left(\begin{array}{ll} & \tilde{a} \le \beta_3 \\ \text{и} & \tilde{b} \ge \beta_4 \end{array}\right)$$

и

$$\left(\begin{array}{ll} & \tilde{a} < \beta_5 \\ \text{или} & \tilde{b} > \beta_6 \end{array}\right) \text{ и } \left(\begin{array}{ll} & \tilde{a} > \beta_7 \\ \text{или/и} & \tilde{b} < \beta_8 \end{array}\right), \text{ то}$$

можно видеть, что

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_{11}=\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_1}; \quad \lambda_{12}=\frac{1-\alpha_{k-1}}{\beta_2}; \lambda_{13}=\frac{1-\alpha_{k-1}}{\beta_3}; \lambda_{14}=\frac{\alpha_{k-1}}{\beta_4};\\ &\lambda_{31}=\frac{\alpha_k}{\beta_5}; \quad \lambda_{22}=\frac{1-\alpha_k}{\beta_6}; \quad \lambda_{23}=\frac{1-\alpha_k}{\beta_7}; \lambda_{24}=\frac{\alpha_k}{\beta_8}; \end{aligned}\right\} \tag{6.119}$$

Следовательно, получим схему на рис. 6.2.

Аналогичным способом можно осуществить синтез схемы при выполнении условия (6.116) для характеристической функции, зависящей от трех и более (конечного) числа характеристик нечеткого множества.

Замечание 6.4. Если любую функцию $f(\widetilde{a},\widetilde{b},...)$ можно взять за основу разложения Q в полиномиальную форму относительно ∇ , в которой каждый одночлен содержит только элементы Q_x *или/и* $Q_{\bar{x}}$, *или/и* $\overline{Q}_x$ *или/и* $\overline{Q}_{\bar{x}}$, связанные Δ, то реализацию функции можно обеспечить технологической схемой, которая содержит только *И* и *НЕ*. Но по теореме де Моргана можно написать:

$$\overline{Q\Delta\overline{Q}}=Q\nabla\overline{\overline{Q}} \tag{6.120}$$

$$\overline{Q\nabla\overline{Q}}=\overline{Q}\nabla\overline{\overline{Q}} \tag{6.121}$$

Поэтому, используя условия типа $\overline{Q}$, можно провести разложение, идентичное тому, которое дает полиномиальную форму по ∇, при этом Q заменяется на $\overline{Q}$, ∇ на Δ и Δ на ∇. Следовательно, можно получить *ИЛИ/И* и *НЕ.* В действительности можно использовать чрезвычайно разнообразные комбинации операторов, как это принято у разработчиков ЭВМ.

Точно так же можно использовать только один оператор, например, Шеффера или Пирса, т.е.

$$Q_1 | Q_1 = \overline{Q} \nabla \overline{Q}_2 \qquad (6.122)$$

или

$$Q_1 \downarrow Q_2 = \overline{Q}_1 \Delta \overline{Q} \qquad (6.123)$$

Так как в техническом отношении это часто оказывается неудобным, поэтому представляет интерес в техническом отношении анализ смешанных схем.
Называемая примарными условиями типа:

$$\alpha_{k-1} \leq f(\widetilde{a}, \widetilde{b}, ...) \qquad (6.124)$$

и дуальными условия типа:

$$f(\widetilde{a}, \widetilde{b}, ...) < \alpha_k \qquad (6.125)$$

можно оперировать сразу смешанными схемами, для которых

$$\alpha_{k-1} \leq f_1(\widetilde{a}, \widetilde{b}, ...) \text{ и } f_2(\widetilde{a}, \widetilde{b}, ...) < \alpha_k \qquad (6.126)$$

Для сборки такой схемы достаточно использовать оператор *И*.
Пример 6.8. Реализуем

$$\alpha_{k-1} \leq f_1(\widetilde{a}, \widetilde{b}, ...) = \widetilde{a} \wedge \widetilde{b} \qquad (6.127)$$

и

$$f_2(\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c}) = (\widetilde{a} \wedge \widetilde{b}) \vee (\overline{\widetilde{b}} \wedge \widetilde{c}) < \alpha_k \qquad (6.128)$$

Для f_1 примарные условия имеют вид:

$$Q_{\overline{a}} \Delta Q_b \qquad (6.129)$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} & \widetilde{a} \le 1-\alpha_{k-1} \\ \text{и} & \widetilde{b} \ge \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$

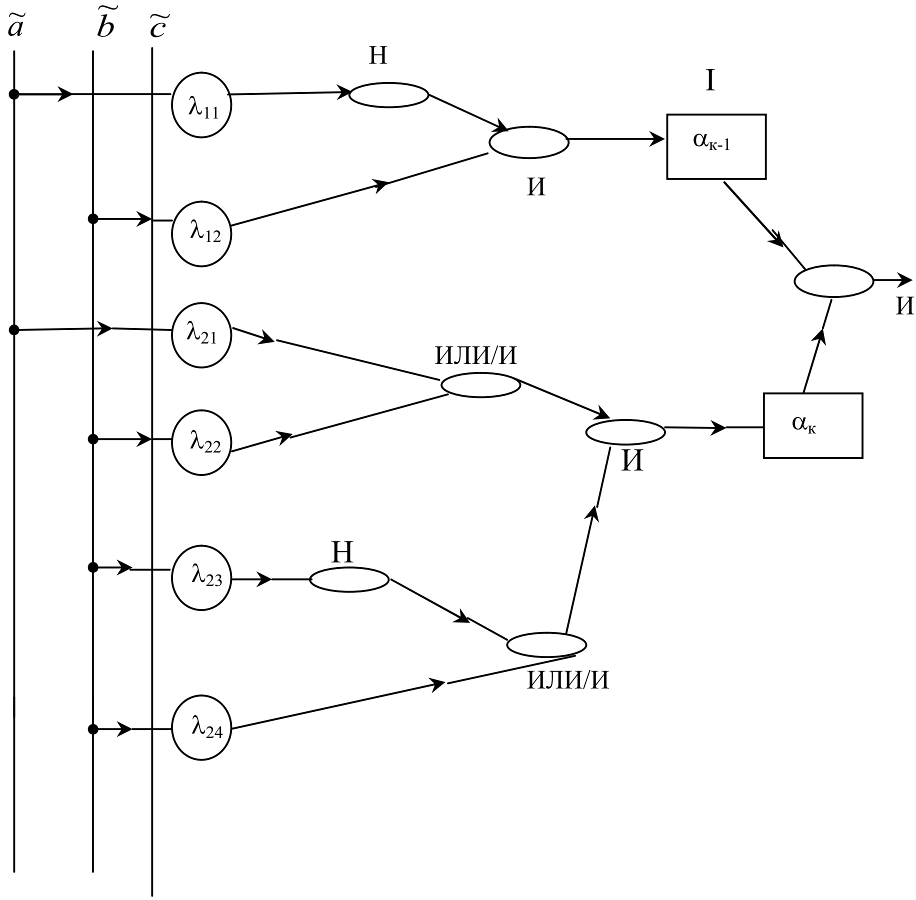


Рис.6.3.

Для f_2 дуальные условия имеют вид:

$$\left(\overline{Q}_a \nabla \overline{Q}_b\right) \Delta \left(\overline{Q}_{\overline{b}} \nabla \overline{Q}_c\right)$$

$$\text{т.е.}\begin{pmatrix} & \tilde{a} < \alpha_k \\ \text{или/и} & \tilde{b} < \alpha_k \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} & b > 1 - \alpha_k \\ \text{или/и} & \tilde{c} > \alpha_k \end{pmatrix} \qquad (6.130)$$

Соединяя (6.129) и (6.130) конъюктивной связкой И, окончательно приходим к синтезированной схеме, изображенной на рис.6.3. Таким образом, схема на рис.5.3 обеспечивает одновременно выполнение условий

$$\alpha_{k-1} \le \overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{b} \text{ и} \left(\tilde{a} \wedge \tilde{b}\right) \vee \left(\overline{\tilde{b}} \wedge \tilde{c}\right) < \alpha_k \qquad (5.131)$$

при подходящем выборе коэффициентов λ_{ij}. Эти результаты допускают различные обобщения.

§4 Композиция интервалов

Пусть

$$\tilde{a} \in D_a = [a_1, a_2] \text{ и } \tilde{b} \in D_b = [b_1, b_2) \qquad (6.132)$$

Тогда легко видеть, что $\tilde{a} \wedge \tilde{b} \in D_{a \wedge b} = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2]$
и

$$\tilde{a} \vee \tilde{b} \in D_{a \vee b} = [a_1 \vee b_1; a_2 \vee b_2) \qquad (6.133)$$

Пример 6.9. Пусть $D_a = [0{,}5; 0{,}8)$ и $D_b = [0{,}3;0{,}7)$

Очевидно, что $D_{a \wedge b} = [0{,}5 \wedge 0{,}3;\ 0{,}8 \wedge 0{,}7) = [0{,}3;0{,}7)$

$D_{a \vee b} = [0{,}5 \vee 0{,}3; 0{,}8 \vee 0{,}7) = [0{,}5 \vee 0{,}8)$.

В случае свойств (6.8) и (6.9) аналогично можно показать, что если:

$$\tilde{a} \in D_a = [a_1; a_2);\ \tilde{b} \in D_b = [b_1; b_2) \text{ и } \tilde{c} \in D_c = [c_1; c_2), \qquad (6.134)$$

то

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{a}\wedge\tilde{b}\wedge\tilde{c}\in D_{a\wedge b\wedge c}=[a_1\wedge b_1\wedge c_1;\ a_2\wedge b_2\wedge c_2)\\ \text{и}\\ \tilde{a}\vee\tilde{b}\vee\tilde{c}\in D_{a\vee b\vee c}=[a_1\vee b_1\vee c_1;\ a_2\vee b_2\vee c_2)\end{array}\right\}\quad(6.135)$$

Интересно рассмотреть случай, когда нечёткие переменные принимают свои значения в дополнении к интервалу.

Если

$$\overline{D}_a=[0;a_1)\bigcup[a_2;1]\text{ и }\overline{D}_b=[0;b_1)\bigcup[b_2;1]\qquad(6.136)$$

то получим следующие результаты:

для $f(\tilde{a};\tilde{b})=\tilde{a}\wedge\tilde{b};\tilde{a}\in\overline{D}_a;\tilde{b}\in\overline{D}_b$

имеем:

$D_{a\wedge b}=[0,a_1\wedge b_2)\bigcup[a_2\wedge b_1;b_2)$

для

$f(\tilde{a},\tilde{b})=\tilde{a}\wedge\tilde{b};\tilde{a}\in\tilde{D}_a;\tilde{b}\in\overline{D}_b$

имеем: $D_{a\wedge b}=[0;a_1\wedge b_2)\bigcup[a_2\wedge b_1;b_2)$

В таблице 6.2 приведены основные случаи, когда

$D_a=[a_1;a_2)$ и $D_b=[b_1;b_2)$

Конечно, нет основания путать $\overline{D}_a$ с $\overline{D}_{\bar{a}}$, где

$$\overline{D}_a=[0;a_1)\bigcup[a_1;1]\text{, а }D_{\bar{a}}=(1-a_2;1-a_1]\qquad(6.137)$$

и, наконец,

$$\overline{D}_{\bar{a}}=[0,1-a_2]\bigcup[1-a_1;1].$$

Пример 6.10. Найти область определения

$f(\tilde{a},\tilde{b})=\overline{\tilde{a}}\wedge\tilde{b}$, зная, что $D_a=[a_1;a_2)$ и $D_b=[b_1;b_2)$.

Из (6.135) и (6.136), используя (6.137), имеем:

Таблица 6.3

Восемь основных случаев $D_a = [a_1; a_2)$ и $D_b = [b_1; b_2)$

$f(\tilde{a}, \tilde{b})$	Область определения $\tilde{a}$	Область определения $\tilde{b}$	Область определения $f(\tilde{a}, \tilde{b})$
$\tilde{a} \wedge \tilde{b}$	D_a	D_b	$[a_1 \wedge b_1; a_2 \wedge b_2)$ (6.169)
	$\overline{D}_a$	D_b	$[0; a_1 \wedge b_2) \bigcup [a_2 \wedge b_1; b_2)$ (6.170)
	D_a	$\overline{D}_b$	$[0; b_1 \wedge b_2) \bigcup [b_2 \wedge a_1; a_2)$ (6.171)
	$\overline{D}_a$	$\overline{D}_b$	$[0; a_1 \vee b_1) \bigcup [a_2 \wedge b_1; 1]$ (6.172)
$\tilde{a} \vee \tilde{b}$	D_a	D_b	$[a_1 \vee b_1; a_2 \vee b_2)$ (6.173)
	$\overline{D}_a$	D_b	$[b_1, a_1 \vee b_2) \bigcup [a_2 \vee b_1; 1]$ (6.174)
	D_a	$\overline{D}_b$	$[a_1, b_1 \vee a_2) \bigcup [b_2 \vee a_1; 1]$ (6.175)
	$\overline{D}_a$	$\overline{D}_b$	$[0; a_1 \vee b_1) \bigcup [a_2 \wedge b_2; 1]$ (6.176)

$$D_{\bar{a} \wedge b} = \begin{cases} ((1-a_2) \wedge b_1; (1-a_1) \wedge b_2] & 1-a_2 \le b_1 \text{ и } 1-a_1 \le b_2 \\ [(1-a_2) \wedge b_1;\ (1-a_1) \wedge b_2] & 1-a_2 > b_1 \text{ и } 1-a_1 \le b_2 \\ ((1-a_2) \wedge b_1;\ (1-a_1) \wedge b_2) & 1-a_2 \le b_1 \text{ и } 1-a_1 > b_2 \\ [(1-a_2 \wedge b_1; (1-a_1) \wedge b_2) & 1-a_2 > b_1 \text{ и } 1-a_1 > b_1 \end{cases}$$

Таким образом,

$$D_{\bar{a} \wedge b} = \begin{cases} ((1-a_2); (1-a_1)), \text{ если } 1-a_2 \le b_1 \text{ и } 1-a_1 \le b_2 \\ [b_1; 1-a_1),\ \text{ если } (1-a_2) > b_1 \text{ и } 1-a_1 \le b_2 \\ ((1-a_2; b_2),\ \text{ если } 1-a_1 \le b_1 \text{ и } 1-a_1 > b_2 \\ [b_1; b_2), \text{ если } 1-a_2 > b_1 \text{ и } 1-a_1 > b_2 \end{cases}$$

Наконец, рассмотрим случай дискретной функции принадлежности. Предположим, что [0;1] разбит на 10 равных частей, определяющих 11 дискретных значений.

$M = \{0;0,1;0,2;0,3;0,4;0,5;0,6;0,7;0,8;0,9;1\}$

В этом случае для функций, подлежащих рассмотрению, удобно составить таблицы, которые в теории нечёткой логики для характеристических функций характеристик нечёткого множества играют роль, аналогичную роли таблиц истинности при изучении функций булевых переменных. Но теперь вместо двух значений переменной из булевой алгебры приходится иметь дело с большим числом значений – от 0 до 1 и с законами (5.6)-(5.20).

Посмотрим, как применяются эти таблицы.

Пример 5.11. Пусть $f(\tilde{a},\tilde{b}) = \overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{b}$, где

$\tilde{a} \in \{0,3;0,4;0,5;0,6\}; \tilde{b} \in \{0,1;0,2\} \cup \{0,7;0,8;0,9\}$

Изучение заштрихованной части таблицы 6.4 показывает, что $\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{b} \in \{0,1;0,2\} \cup \{0,7;0,8;0,9\}$

Таблица 6.4

$\overline{\tilde{a}} \wedge \tilde{b}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8
3	0	1	2	3	4	5	6	7	7	7	7
4	0	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6
5	0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
6	0	1	2	3	4	5	5	4	4	4	4
7	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
8	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Изучение заштрихованной части таблицы 6.4 показывает, что

$\tilde{a} \wedge \tilde{b} \in \{0,1;0,2\} \cup \{0,4;0,5;0,6;0,7\}$

Пример 6.12. Пусть $f(\widetilde{a},\widetilde{b},\widetilde{c}) = (\widetilde{a} \wedge \overline{\widetilde{b}} \wedge \widetilde{c}) \vee \overline{\widetilde{c}}$,
где
$\widetilde{a} \in \{0{,}3;0{,}4;0{,}5\}$ $\widetilde{b} \in \{0{,}1;0{,}2\} \cup \{0{,}6\}$ и
$\widetilde{c} \in \{0;0{,}1\} \cup \{0{,}7;0{,}8;0{,}9;1\}$

Сначала предположим $\widetilde{d} = \widetilde{a} \wedge \overline{\widetilde{b}}$ и рассчитаем область определения $\widetilde{d}$ с помощью таблицы на рис.6.5 (которая представляет собой транспортированную таблицу на рис.5.4)
Найдем
$\widetilde{d} = \widetilde{a} \wedge \overline{\widetilde{b}} \in \{0{,}3;0{,}4;0{,}5\}$
Затем найдем область определения
$\widetilde{\ell} = \widetilde{d} \wedge \widetilde{c} = \widetilde{a} \wedge \overline{\widetilde{b}} \wedge \widetilde{c}$

Таблица 6.5

$\widetilde{d} = \widetilde{a} \wedge \overline{\widetilde{b}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
0	0	0		0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	0
3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1	0
4	4	1	2	4	4	4	4	3	2	1	0
5	5	5	5	5	5	5	4	3	2	1	0
6	6	6	6	6	6	5	4	3	2	1	0
7	7	7	7	7	6	5	4	3	2	1	0
8	8	8	8	7	6	5	4	3	2	1	0
9	9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

С помощью таблицы на рис.6.6 находим
$\widetilde{\ell} = \widetilde{d} \wedge \widetilde{c} = \widetilde{a} \wedge \overline{\widetilde{b}} \wedge \widetilde{c} \in \{0;0{,}1\} \cup \{0{,}3;0{,}4;0{,}5\}$

Наконец, с помощью таблицы на рис.6.7 найдем область определения $f\{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\}$

$$f\{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\} \in \{0;0{,}1;0{,}2;0{,}3;0{,}4;0{,}5\} \cup \{0{,}9;1\}$$

$$\tilde{d} = \tilde{a} \wedge \overline{\tilde{b}}$$

Таблица 6.6

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	0	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
4	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4
5	0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
6	0	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7	7	7	7
8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	8	8
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1

Таблица 6.7

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4
5	0	1	2	3	4	5	5	5	5	5	5
6	1	1	2	3	4	5	6	6	6	6	6
7	1	1	2	3	4	5	6	7	7	7	7
8	1	1	2	3	4	5	6	7	8	8	8
9	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1

§5. Нечёткие утверждения и их функциональное представление

В отличии от формальной логики нечёткая логика опирается не на таблицы истинности, а на операции, производимые на нечётких подмножествах.

Высказывания нечёткой логики, как и высказывания формальной логики, явно или неявно связаны с теорией нечётких и соответственно формальных множеств.

Операциям $\cap$,$\cup$ и $^{-}$ (пересечение, объединение и дополнение) в формальной логике соответствуют связки Δ, ∇ и $\rceil$(коньюнкция «И», дизьюнкция (или/и), отрицание «не»).

Период к нечётким связкам Δ, ∇ и $\rceil$ соответствующей нечёткой олгики не представляет каких-либо трудностей, поскольку мы определили соответствующее множество операций в §2, III гл.

Однако необходимо уделить внимание другим связкам: импликации, метаимпликации, логической эквивалентности.

Перейдем к обзору этих понятий, сначала в формальной,а затем в нечёткой логике.

Рассмотрим два формальных утверждения, Q и $\Im$. Составному утверждению Q ведёт $\Im''$ (соответствует $Q > \Im$) соответствует таблица 6.8.

Таблица 6.8

Q	$\Im$	$Q > \Im$
ложно	ложно	истинно
ложно	истинно	истинно
истинно	ложно	ложно
истинно	истинно	истинно

Если утверждению Q поставить в соответствие множество A, а утверждению $\Im$ - множество B, то составному утверждение, Q влечет $\Im''$ ставится в соответствие множество $\overline{A} \cup B$.

Теперь рассмотрим составное утверждение «Q» метаимплицирует $\Im''$ обозначается $Q => \Im$.

Этой метаимпликации придаётся следующий смысл: когда Q истинно, $\Im$ всегда истинно (к счастью здесь сохраняется правило силлогизма), но ничего нельзя утверждать, когда Q ложно; в этом случае $\Im$ может быть как истинно, так и ложно. Таким образом, высказывание вроде «если море станет сладким сиропом, я превращусь в сиропу» - корректно, поскольку море, увы, непригодно для питья и, конечно, не станет сладким сиропом. Поэтому связка => сводится к следующему: если $Q => \Im$ и утверждение Q истинно, то $\Im$ есть необходимо истинное утверждение.

Поэтому следует остерегаться смещения $Q > \Im$ и $Q => \Im$.

Первое есть операция логики:

$$Q > \Im = \overline{Q} \nabla \Im \text{ (в одних обозначениях)}$$
$$Q > \Im = (\neg Q) \nabla (\Im) \text{ (в других обозначениях)} \qquad (6.138)$$

Второе – маталогическая операция, которая может не сводиться к (6.138). Однако привычно метаимпликацию называть импликацией путает обе термина. Составное утверждение $Q > \Im$ не является отношением причины и следствия и не доказывает справедливость $\Im$ по отношению Q, но именно так трактуется метаимпликация $Q => \Im$.

Можно привести ложный парадокс, связанный с введённым нами понятием импликации, который мы сформируем следующим образом:

поскольку проанализировать утверждения Q и $\mathfrak{I}$ можно лишь тогда, когда известно их содержание, о котором у нас не имеется никаких сведений, и единственно доступные нам данные – это логические значения этих высказываний, то импликация $Q{>}\mathfrak{I}$ не может быть отношением причины и следствия.

Однако, если аппириории известно, что $Q > \mathfrak{I}$ истинно, то можно заключить, что $\mathfrak{I}$ - истинно.

Приведем пример, взятый из [43]. Пусть Q и $\mathfrak{I}$ есть следующие утверждения, которые будем рассматривать, используя таблицу 6.4.

Q – Наполеон умер на острове Святая Елена (истино);

$\mathfrak{I}$ - Версингеторикс носил усы (никто не уверен);

$Q > \mathfrak{I}$ - истино, если $\mathfrak{I}$ истино;

Q - два плюс два равно пять (ложно);

$\mathfrak{I}$ - 12-простое число (ложно);

$Q > \mathfrak{I}$ - истино;

$Q > \mathfrak{I}$ - Луна сделана из швейцарского сыра (ложно);

$Z - 17$ - простое число (истино);

$Q > \mathfrak{I}$ - истино;

$Q - 17$ - простое число (истино);

$\mathfrak{I}$ -16 – простое число (ложно)

$Q > \mathfrak{I}$ - истино

Таблица 6.9

Q	$\mathfrak{I}$	$Q > \mathfrak{I}$
ложно	ложно	истино
ложно	истино	истино
истино	ложно	ложно
истино	истино	истино

Логическая эквивалентность менее двухсмысленна. Определим её, используя таблицу истинности 6.10.

Подобно импликации, логическая эквивалентность не учитывает содержания двух утверждений в причинном отношении.

Составленному высказыванию для подмножества A, связанного с Q и подмножества B, связанного с $\Im$ соответствует множественная операция $(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$

Таблица 6.10

Q	$\Im$	$Q = \Im$
ложно	ложно	истино
ложно	истино	ложно
истино	ложно	ложно
истино	истино	истино

Вместо метаэквивалентности обычно просто об эквиваletности – это значит, что Q метаимплицирует $\Im$ имплицирет Q. Такая симметрия определения приводит к таблице истинности, идентичной таблицы истинности для логической связи «эквивалентно». $Q = \Im$. Поэтому можно отождествлять эти понятия, не опасаясь возникновения двухсмысленности.

Нечёткие утверждения типа нечёткой импликации и нечёткой эквивалентности определяют относительно операций

$\overline{\tilde{A}} \cup \tilde{B}$ и $(\tilde{A} \cup \overline{\tilde{B}}) \cap (\overline{\tilde{A}} \cup \tilde{B})$ соответственно.

Для определения метаимпликации в нечёткой логике используем понятие бинарного отношения. На рис. 6.4:

Если $x = x_1$, то $y = y_3$ и т.д.

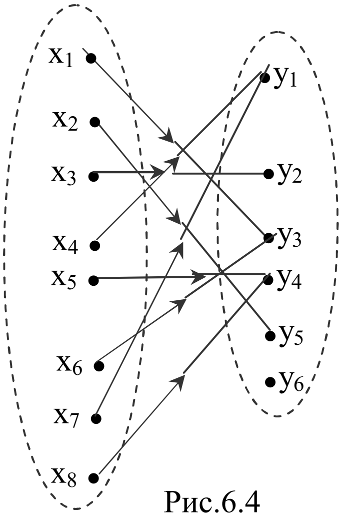


Рис.6.4

Таблица 6.11

E_2 \ E_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
x_2	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*
x_3	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*
x_4	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
x_5	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
x_6	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*	*0*
x_7	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
x_8	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*

В таблице 6.12 элементу множества E_1 соответствует нечёткое подмножество E_2.

если $x=x_1$, то

$$\widetilde{B} = \{y_1/0{,}7; y_2/0{,}4; y_3/1; y_4/0{,}3; y_5/1; y_6/0{,}8\}$$

если $x=x_5$, то

$$\widetilde{B} = \{y_1/0{,}1; y_2/0{,}4; y_3/0{,}7; y_4/0{,}9; y_5/0{,}3; y_6/0{,}6\}$$

Таблица 6.12

E_2 \ E_1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	*0,7*	*0,4*	*1*	*0,3*	*0,9*	*0,8*
x_2	*0,3*	*0,8*	*0,6*	*0,5*	*1*	*0,9*
x_3	*0,4*	*0,9*	*0,3*	*1*	*0,1*	*0,3*
x_4	*0,9*	*1*	*0,8*	*0,2*	*0,6*	*1*
x_5	*0,1*	*0,4*	*0,7*	*0,9*	*0,3*	*0,6*
x_6	*1*	*0,2*	*0,4*	*1*	*0,7*	*0,8*

Рассмотрим теперь пример построения нечёткого подмножества $\widetilde{B}$, соответствующее нечёткому подмножеству $\overline{A}$, определённого как:

$$\mu_{\widetilde{\beta}} = \max\min(\mu_{\widetilde{\beta}}(y // x),\ \mu_A(x)) \qquad (6.139)$$

Пример 6.13. Пусть

$$A = \{x_1 / 0{,}4, x_2 / 0{,}3;\ x_3 / 0{,}6; x_4 / 0{,}8;\ x_5 / 0{,}8; x_6 / 0{,}1\},$$

используя нечёткое отношение 5.9 найдем нечеткое подмножество $\widetilde{B} \subset E_2$. Последовательно имеем:

$$\mu_{\widetilde{\beta}}(y_1) = \max\big[\min(0{,}7;0{,}4), \min(0{,}3;0{,}3), \min(0{,}4;0{,}6),$$
$$\min(0{,}9;0{,}8), \min(0{,}1;0{,}8), \min(1;0{,}1)\big] = \max(0{,}4;0{,}3;0{,}4;0{,}8;0{,}1;0{,}1) = 0{,}8$$
$$\mu_{\beta}(y_2) = \max\big[\min(0{,}4;0{,}4), \min(0{,}8;0{,}3), \min(0{,}9;0{,}6),$$
$$\min(1;0{,}8); \min(0{,}4;0{,}8); \min(0{,}2;0{,}1)\big] = \max\big[0{,}4;0{,}3;0{,}6;0{,}8;0{,}4;0{,}1) = 0{,}8$$
$$\max\big[0{,}4;0{,}3;0{,}3;0{,}8;0{,}7;0{,}1\big] = 0{,}8 = \mu_{\widetilde{\beta}}(y_3)$$
$$\max\big[0{,}3;0{,}3;0{,}6;0{,}2;0{,}8;0{,}1\big] = 0{,}8 = \mu_{\widetilde{\beta}}(y_4)$$
$$\max\big[0{,}4;0{,}3;0{,}1;0{,}6;0{,}3;0{,}1\big] = 0{,}6 = \mu_{\widetilde{\beta}}(y_5)$$
$$\mu_{\widetilde{\beta}}(y_6) = \max\big[0{,}4;0{,}3;0{,}3;0{,}8;0{,}6;0{,}6\big] = 0{,}8$$

Таким образом, имеем:

$$\widetilde{B} = \{y_1 / 0{,}8; y_2 / 0{,}8; y_3 / 0{,}8; y_4 / 0{,}8; y_5 / 0{,}6; y_6 / 0{,}8\}$$

Если (∗) соответствует (max-min), то имеем:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0,4	0,3	0,6	0,8	0,8	0,1

∗

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
x_1	0,7	0,4	1	0,3	0,9	0,8
x_2	0,3	0,8	0.6	0,5	1	0,9
x_3	0,4	0,9	0,3	1	0,1	0,3
x_4	0,9	1	0,8	0,2	0,6	1
x_5	0,1	0,4	0,7	0,9	0,3	0,6
x_6	1	0,2	0,4	1	0,7	0,8

=

=	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	0,4	0,3	0,6	0,8	0,8	0,1

Итак, мы показали, что рассматриваемое утверждение «если-то» хорошо соответствует тому, что используется при формальных отношениях.
Обращаясь к рис.5.8, имеем: если

$$\widetilde{A} = \{x_1/0; x_2/0; x_3/1; x_4/0; x_5/0; x_6/0; x_7/0; x_8/0\}$$

т.е.

$A = \{x_3\}$, то

$\widetilde{B} = \{y_1/0; y_2/1; y_3/0; y_4/0; y_5/0; y_6/0\}$, т.е. $\widetilde{B} = \{y_2\}$.

Это можно записать в виде: если $\widetilde{A} = \{x_3\}$, то $\widetilde{B} = \{y_2\}$, или же, если $x = x_3$, то $y = y_2$.

Сделаем сводку всех утверждений, установленных до сих пор: нечёткая коньюнкция (нечёткое *и*) определяется как $\widetilde{A} \bigcup \widetilde{B}$, нечёткая дизьюнкция (нечёткое *или*) определяется как $\widetilde{A} \bigcup \widetilde{B}$, нечёткое отрицание (нечёткое *не*) определяется как $\overline{\widetilde{A}}$, нечёткая импликация определяется как $\overline{\widetilde{A}} \bigcup \widetilde{B}$, нечёткая эквивалентность определяется как:

$\left(\widetilde{A} \bigcup \overline{\widetilde{B}}\right) \bigcap \left(\overline{\widetilde{A}} \bigcup \widetilde{B}\right)$, нечёткая, если, то определяется как:

$\mu_{\widetilde{B}}(y) = \max\limits_{x} \min\left(\mu_{\widetilde{B}}(y // x), \mu_{\widetilde{A}}(x)\right)$ (нечёткая импликация).

Это последнее утверждение, скорее всего, относится не к нечёткой логике, а к нечёткой металогике.

§6. Многозначная и нечёткозначная логики

В зависимости от способов введения операций

Таблица 6.13

Название связки	Обозначение связки	Нечёткая логика с максимальными операциями	Нечёткая логика с ограниченными операциями	Вероятностная нечёткая логика
тавтология	$\tilde{A}$	*max (a, 1-a)*	*1*	*1-a(1-a)*
противоречие	$\bar{A}$	*min(a,1-a)*	*0*	*a(1-a)*
отрицание	$\rceil \tilde{A}$	*1-a*	*1-a*	*1-a*
дизьюнкция	$\tilde{A} \vee \tilde{B}$	*max (a, b)*	*min(1,a+b)*	*a+b-ab*
коньюнкция	$\tilde{A} \wedge \tilde{B}$	*min(a, b)*	*max(0,a+b-1)*	*a,b*
импликация	$\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$	*max(1-a;b)*	*min(1,1-(a+b))*	*(1-a+ab)*
эквивалентность	$\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{B}$	*min[max(1-a,b); max(a,1-b)]*	$1\text{-}\lvert a-b\rvert$	*(1-a+ab)(1-b+ab)*
Штрих Шеффера	$\tilde{A} \mid \tilde{B}$	*max(1-a;1-b)*	*min(1,1-a+1-b)*	*1-ab*
Исключающее «ИЛИ»	$\tilde{A} ex \tilde{B}$	*max[min(1-a-b), min(a,1-b)]*	$\lvert a-b\rvert$	*1-(1-a+ab)(1-b+ab)*
Стрелка Пирса	$\tilde{A} \downarrow \tilde{B}$	*min[(1-a,(1-b)]*	*max(01-a-b)*	*(1-a)(1-b)*

объединения и пересечения нечёткого множества существуют три основных теории нечётких множеств. Если $\Im(E)$ - множество нечётких подмножеств E с обычными максимальными операциями объединения ($\bigcup$) и пересечения ($\bigcap$), то множество $\Im(A)$, как множество отображений из E в [0,1], является дистрибутивной решёткой с псевдодополнением $\left(\Im(E), \cup, \cap, ^{-}\right)$. В качестве объединения и пересечения можно взять вероятностные операторы (алгебраические операции в таблице 6.12).

Наконец, используя операторы ограниченной суммы ($\dot{\bigcup}$) и произведения $\underset{\cdot}{\bigcap}$ и обычное псевдодополнение, получаем недистрибутивную решётку с дополнением $\left(\Im, \dot{\cup}, \underset{\cdot}{\cap}, ^{-}\right)$.

Отметим, что $\forall \widetilde{A}, \widetilde{B} \subset \Im(E)$; $\widetilde{A} \underset{\cdot}{\bigcap} \widetilde{B} \subset \widetilde{A} \cdot \widetilde{B} \subset \widetilde{A} \bigcap \widetilde{B}$; и $\widetilde{A} \bigcup \widetilde{B} \subset \widetilde{A} € \widetilde{B} \subset \widetilde{A} \dot{\bigcup} \widetilde{B}$.

Каждой из этих теорий соответствует многозначная логика, связки для которой приведены в таблице 6.6, где $\mu_A(x) = a$; $\mu_B(x) = b$.

Следует отметить, что результаты, приведённые в таблице 6.13. Кроме так называемой вероятностной нечёткой логики полностью освещены в предыдущем §5 главы 6.

В логике, связанной с $\left(\Im(E), €, \cdot, ^{-}\right)$, которую часто называют вероятностной нечёткой логикой операции

$$\begin{aligned} &\mu_{\widetilde{A} \vee \widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{B}(x)} - \mu_{\widetilde{A}}(x)\mu_{\widetilde{B}}(x), \\ &\mu_{\widetilde{A} \wedge \widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \cdot \mu_{\widetilde{B}}(x) \end{aligned}, \qquad (6.140)$$

являются коммутативным, ассоциативными, но не идемпотентными и не дистрибутивными относительно друг друга, т.е., учитывая (6.1), имеем:

$$\left.\begin{aligned} a\cdot b &= ba \\ a \text{ €} b &= b \text{ €} a \end{aligned}\right\} \quad \text{коммутативность}$$

$$\left.\begin{aligned} a\cdot(b\cdot c) &= (a\cdot b)c \\ a \text{ €}(b \text{ €} a) &= (a \text{ €} b) \text{ €} c \end{aligned}\right\} \quad \text{ассоциативность}$$

$$\left.\begin{aligned} a\cdot a &\neq a \\ a \text{ €} a &= a \end{aligned}\right\} \quad \text{не импотентность}$$

$$\left.\begin{aligned} a(b \text{ €} c) &= ab + ac \\ a + b\cdot c &\neq (a+b)(a+c) \end{aligned}\right\} \quad \text{не дистрибутивно}$$

Следует также отметить, что связки «*ex,*|, ↓» всегда выражаются как отрицания ↔, ∧ и ∨ соответственно; тафталогия и противоречие определены как

$\dot{\widetilde{A}} = \widetilde{A} \vee \overline{\overline{\widetilde{A}}}; \dot{\widetilde{A}} = \widetilde{A} \wedge \overline{\overline{\widetilde{A}}}$. В более общем виде

$$\widetilde{A}\widetilde{B} = (\widetilde{A} \vee \overline{\overline{\widetilde{A}}}) \vee (\widetilde{B} \vee \overline{\overline{\widetilde{B}}})$$

$$\overrightarrow{\overline{\widetilde{A}\widetilde{B}}} = (\widetilde{A} \vee \overline{\overline{\widetilde{A}}}) \vee (\widetilde{B} \wedge \overline{\overline{\widetilde{B}}})$$

Альтернативный подход к описанию нечётких логик предложен в [45,46,47,48]

В [5] введено понятие лингвистической переменной, которая характеризуется набором $X, T(X), \bigcup, G, M$, в котором X – название переменной, *T(X)* – терм-множество переменной *X*, т.е. множество лингвистических значений переменной, причём каждое из таких значений является нечёткой переменной *X* со значениями из универсального множества $\bigcup$ с базовой переменной и, G- синтаксическое правило (имеющее обычно форму грамматики), порождающее названия *X* значений переменной *X*, а *M* – семантическое правило, которое ставит в соответствие каждой нечёткой переменной её смысл *M(X)*, т.е. нечёткое подмножество универсального множества $\bigcup$. Конкретнее название X, порожденное синтаксическим правилом G называется термом.

Трактовка истинности, как лингвистической переменной, приводит к нечёткой логике со значениями «истинный», «очень истинный», «совершенно истинный», «более или менее истинный», «не очень истинный», «ложный» и т.д., т.е. к нечёткозначной логике, на которой основана теория приближённых рассуждений [48]. В таблице 6.12 приведён пример лингвистических значений истинности: «истино» с функцией приандлежности

$\mu_{и} = S(\alpha, \alpha + 1) / 2{,}1$,

$\alpha \in [0{,}1]$, «ложно»=*ant,*

(«истинно») и «сомнительно» с $\mu_c = S\big(\beta, (\beta - 0{,}5) / 2{,}0{,}5\big)$

на [0;0,5] и $\mu_c = aut(S(\beta, (\beta + 0{,}5) / 2; 0{,}5))$ на[0,5;1],

$\beta \in [0;0{,}5]$. Определение S- функции содержится в гл. 4 [50].

Вообще говоря, можно рассмотреть логическую систему

$Z = \{P, L, T)$, где P – множество высказываний, L- решётка и T – отображение

$$T : P \to L,$$

которое присваивает каждому $P \in P$ его значение истинности $T(P) \in L$. Истинностное отображение должно удовлетворять следующим свойствам:

$$\left.\begin{aligned} &а)\ T(p \vee q) = T(p) \vee T(q) \\ &б)\ T(p \wedge q) = T(p) \wedge T(q), \\ &\text{а также} \\ &в)\ T(\overline{P}) = \overline{T}(P) \end{aligned}\right\} \qquad (6.141)$$

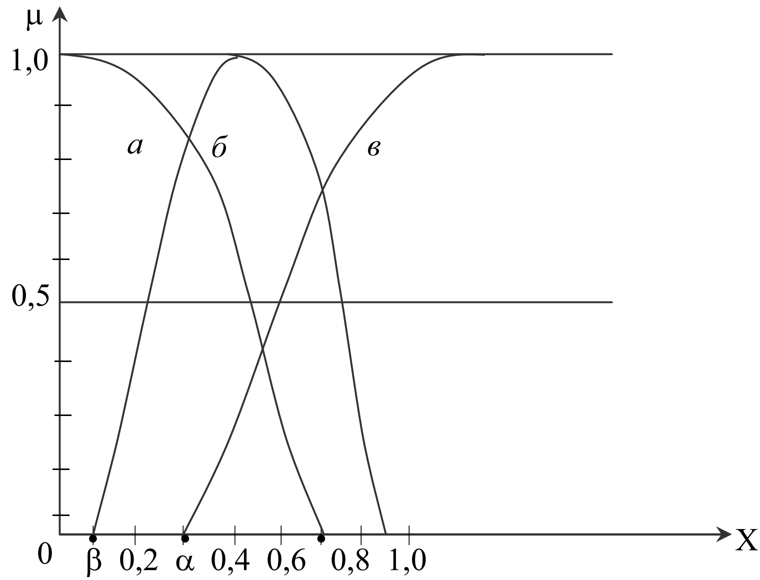


Рис. 6.10

Функция принадлежности лингвистических значений истинности: α- «ложно»; δ - «сомнительно»; *в*- «истинно».

Для лингвистической переменной использована $L = \Im([0,1]) = \{f : [0,1] \to [0,1]\}$ в качестве множества истинности. Поэтому, истинозначное отображение записывается в виде:

$T : P \to \Im([0,1])$ и аксиомы *а), б)* и *в)* будут выполнены.

Нечёткозначная логика описывается теорией нечётких множеств типа 2, значения функций принадлежности которых являются нечёткие числа (см.гл.III). Семантические правила для вычисления функций истинности для отрицания, коньюнкции и дизьюнкции записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} T_2(\overline{P}) &= 1 \ominus T_2(P) = ant\ (T_2(P)) \\ T_2(P \wedge Q) &= \widetilde{\min}(T_2(P), T_2(Q)) \\ T_2(P \vee Q) &= \widetilde{\max}(T_2(P), T_2(Q)) \end{aligned}\right\} \qquad (6.142)$$

где $T_2(P)$- нечёткое число на- [0;1], $\ominus$, $\widetilde{\max}, \widetilde{\min}$ - расширенные операции отрицания, максимума и минимума соответственно.

Через функции принадлежности определения для $\widetilde{\max}, \widetilde{\min}$, имеем:

$$\begin{aligned} \mu_{\substack{\max \\ PQ}}(z) &= \underset{z=\max(x,y)}{sur} \min\big(\mu_P(x), \mu_Q(y)\big) \\ \mu_{\substack{\min \\ (P,Q)}}(z) &= \underset{z=\min(x,y)}{sur} \min\big(\mu_P(x), \mu_Q(y)\big) \end{aligned} \qquad (6.143)$$

Аналогично с помощью принципа обобщения получаются семантические правила для других логических связок (см. табл.6.13). Так для связок логики ($\Im(x), \bigcup, \bigcap, ^{-}$) имеет место следующие формулы:

а) для импликации $T_2(P \to Q) = \widetilde{\max}(1 \ominus T_2(P), T_2(Q))$

б) для эквивалентности

$$T_2(P \to Q) = \widetilde{\min}[\widetilde{\max}(1 \ominus T_2(P), T_2(Q)), \widetilde{\max}(1 \ominus T_2(Q), T_2(P))$$

в) для исключающего «ИЛИ»

$$T_2(PexQ) = \widetilde{\max}(\widetilde{\min}(1 \ominus T_2(P), T_2(Q)), \min(1 \ominus T_2(Q), T_2(P))]$$

2) для тафтологии:

$$T_2(\dot{P}) = \widetilde{\max}(T_2(P), 1 \ominus T_2(P));$$

д)для противоречия:

$$T_2(\overline{P}) = \widetilde{\min}(T_2(P), 1 \ominus T_2(P));$$

Пример 5.14. Если P «сомнительно», а Q «истинно», то $T_2(P \to Q) = \max(aut$ («сомнительно»), «(истинно) $\tilde{\underline{\ }}$ «истинно»;

$T_2(P \to Q) = \tilde{\max}(aut$ «истинно», «сомнительно» $\tilde{\underline{\ }}$ «сомнительно», $T_2(P \leftrightarrow Q)$= «сомнительно».

Для расширенных операций $\tilde{\max}$ и $\tilde{\min}$ выполняются свойства коммутативности, ассоциативности, иденпотентности, взаимной дистрибутивности, а также законы поглощения и Де Моргана.

§7 Теория нечётких подмножеств и теория вероятностей

При первичном знакомстве с понятием нечётких множеств, многие спрашивают: «Что интересного в теории нечётких подмножеств? Ведь всему этому хорошо служит теория вероятностей.» У этих теорий действительно есть несколько общих аспектов, но существуют доводы, что эти теории следует различать. Поэтому выясним, чем отличаются эти теории друг от друга.

Приведём сначала теоретическое определение вероятности.

Пусть X – конечное универсальное множество $\Im(X)$ - множество всех его подмножеств. D – подмножество $\Im(X)$ обязательно содержащее X.

Определение 6.11. Подмножество (или семейство) D будем называть вероятностным семейством подмножеств множества X, если выполняются следующие два условия:

$$\left.\begin{array}{l} а)\ \forall A \in D : \overline{A} \in D \\ б)\ \forall A \in D \text{ и } \forall B \in D;\ A \bigcup B \in D; \end{array}\right\} \qquad (6.144)$$

Например, пусть

$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и

$$D = \{\varnothing, x_2, x_3, (x_2,x_3), (x_1,x_4), (x_1x_2x_4), (x_1x_3x_4), X\} \qquad (6.145)$$

Легко доказать, что для всех элементов семейства (6.145) удовлетворяют условиям (6.144).

Свойства (6.144) влекут за собой выполнение следующих свойств:

$$\left.\begin{array}{l} в)\ \varnothing \in D \\ г)\ \forall A \text{ и } \forall B : A\text{-}B = A \bigcap \overline{B} \in D \end{array}\right\} \qquad (6.146)$$

Отметим, что вероятностное семейство «*D*» образует кольцо относительно (дизьюнктивности суммы) $\oplus$ взятия симметрической разности от двух множеств, которая рассматривается как адитивная операция кольца и мультипликативной операции $\bigcap$ - пересечения двух множеств.

$(A \oplus B)C = A \oplus (B \oplus C)$

$A \oplus \varnothing = \varnothing + A$

$A \oplus A = \varnothing$ существование противоположного элемента

$A \oplus B = B \oplus A$ - коммутативность

$(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$

$(A \oplus B) \bigcap C = (A \bigcap C) \oplus (B \bigcap C)$

$C \bigcap (A \oplus B) = (C \bigcap A) \oplus (C \bigcap B)$

Следовательно, $(D, \oplus, \bigcap)$-кольцо.

Определение 6.12. Подмножество $\Im \subset \Im(X)$ называется вероятностно-базисным семейством множества *X*, если используя операции дополнения и объединения (6.144), из него можно получить любое подмножество вероятностного семейства $D \subset \Im(X)$.

При этом говорят, что *F* порождает *D* или *F* – генератор *D*.

Легко видеть, что $F = \{x_1, x_4\}, x_2, x_3\}$ – есть генератор (6.145).

Отметим также, что для бесконечного универсального множества (счётного или несчётного) условия (6.144) заменяется условием:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ \forall A \in D : \overline{A} \in D \\ e)\ \forall \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\} \in D => A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n \bigcup \ldots D \end{array}\right\} \quad (6.147)$$

Определение 6.13. Пусть дано вероятностное семейство $D \subset \Im(X)$. Вероятностью называется однозначное отображение D в R^+, обладающее следующими свойствами:

ж) $\forall A \in D : \Pr(A) \geq 0$

з) $\forall A \in D : \forall B \in D : A \bigcap B = \varnothing =>$

$=> Pr(\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}) = Pr(A) + Pr(B)$

и) $Pr\ (X)=1$

где $Pr(Z)$- образ элемента $Z \in D$ в R^+

Аксиомы (6.144) и (6.146) или (6.145) и (6.146) каждому элементу из семейства $D \subset \Im(X)$ ставят в соответствие неотрицательное число меньше или равно 1.

Исходя из аксиом (6.144) и (6.146) легко доказать следующие свойства вероятностей:

$$\left.\begin{array}{l} Pr\ (\varnothing)=0 \\ Pr(\overline{A})=1-Pr(A) \\ Pr(A)+Pr(B)=Pr(A \bigcup B)+Pr(A \bigcap B) \\ B \subset A => pr(B) \leq Pr(A) \end{array}\right\} \quad (6.148)$$

Обращаясь к понятию нечёткого подмножества следует подчеркнуть следующий важный момент: «недостаточно с каждым подмножеством связать число $P \in [0;1]$ и называть P – вероятностью, необходимо, чтобы подмножество и P удовлетворяли аксиомам (6.144) и (6.146)».

Установим теперь различие между вероятностной концепцией для нечётких и для чётких подмножеств.

Рассмотрим простой пример.

Пример 6.15. Пусть $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Определим нечёткое подмножество, приписывая каждому элементу значение функции принадлежности:

$\widetilde{A} = \{(x_1 / 0{,}3); (x_2 / 0{,}7); (x_3 / 1)\}$

В теории вероятности число $P \in [0;1]$ приписываются обычным подмножествам, составляющим вероятностное свойство. Если в качестве «*D*» выбрать (6.145), то можно, например, записать

$Pr(\varnothing)=0$; $pr(x_2)=0{,}2$; $pr(x_3)=0{,}3$;
$pr(x_1,x_4)=0{,}5$; $pr(x_1x_2x_4)=0{,}7$;
$pr(x_1x_3x_4)=0{,}8$, $pr(x_4x_3)=0{,}5$; $pr(X)=1$

Очевидно, что все эти вероятности удовлетворяют (6.188).

Как видно, эти два подхода совершенно различны.

Можно представить себе, что вероятности приписаны нечётким подмножествам некоторого универсального множества, элементы которого, в свою очередь, есть нечёткие подмножества другого универсального множества.

Можно представить себе и теорию вероятностей нечётких событий.

Очевидно, что надо проводить различие между двумя теориями: теорией нечётких подмножеств и теорией вероятностей обычных подмножеств.

Наряду с этим следует отметить, что

а) сходство теории вероятностей и теории нечётких множеств заключается в том, что и значения вероятностей принадлежности элемента x некоторому множеству A и значения функции принадлежности элемента x нечёткому множеству $\widetilde{A}$ изменяются на [0;1].

Кроме того, все аксиомы вероятностей множества случайных событий (случайных величин) справедливы и для функции принадлежности нечётких множеств, если противоположному случайному событию в теории вероятностей в теории нечёткого множества соответствует дополнение нечёткого множества;

б) различие этих теорий заключается в основном том, что функция принадлежности $\mu_A(x)$ определяет степень принадлежности элемента x множеству A и если $0 < \mu_A(x) < 1$, то при любом таком значении $\mu_A(x)$ элемент x принадлежит множеству A (т.е. говоря в терминах случайных событий оно есть достоверное событие), если же вероятность того, что x принадлежит множеству A принимает значение $0 < P_A(x) < 1$, то событие, что $x \in A$ есть случайное событие и поэтому несмотря на то, что $0 < P_A(x) < 1$ возможно, что x и не примет значение из A, т.е. $x \notin A$.

Кроме того, следует отметить, что с точки зрения теории меры вероятностная трактовка нечеткого множества является несправедливым, поскольку понятие вероятностной меры является сужением понятия нечёткой меры.

С точки зрения теории отображений $P : \beta \to [0,1]$ и $\mu(x) : X \to [0,1]$ - совершенно разные объекты. Вероятность P определяется в σ-алгебре β и является функцией множества, а $\mu(x)$ - есть обычная функция, областью определения которой является множество X. Поэтому понятия вероятности нечёткого множества не имеет смысла сравнивать на одном уровне абстрагирования.

Если X – конечное множество, очевидно, можно сравнивать $P(\{x\})$ с $\mu_A(x)$:

$$\sum_{x \in X} P(\{x\}) = 1 \text{ и } \sum_{x \in X} \mu_A(x) \neq 1$$

В случае, когда $X \subset R$, приходится сталкиваться со следующими трудностями.

Для $(a,b] \subset R$, $P((a,b]) = \int_a^b P(x)dx$

где $P(x)$ - плотность вероятности. При этом очевидно, что $\forall x \in R : P(\{x\}) \neq 0$, когда $P(x) \neq 0$.

Нетрудно увидеть, что понятие плотности вероятности и функция принадлежности сравнимы. В то время, как вероятностная мера является шкалой для измерения неопределённости типа случайности, а нечёткой множество [58-63] являются субъективными шкалами для нечёткости.

§8. Законы нечёткой композиции

Пусть E – универсальное множество. Также как и в §7, обозначим через $\Im(E)$ множество нечётких подмножеств множества E. В [23] кстановдено, что если $n=cardE$ и $m=cardM$-конечны, то $\Im(E)$ - конечно, где $M=[0,1]$ерь можно определить законы композиции.

Определение 6.14. Отображение из £$(E)\times\Im(E)$ в $\Im(E)$, т.е. каждой упорядоченной паре $(\widetilde{A},\widetilde{B}),(\widetilde{A}\subset E,\widetilde{B}\subset E)$ поставить в соответствие единственное нечёткое подмножество $\widetilde{C}\subset E$, будем называть законом нечёткой внутренней композиции на $\Im(E)$.

Определение 6.15. Пусть E_1,E_2 и E_3 – три универсальных множества. Если каждой упорядоченной паре (A_1,A_2), $A_1\subset E_1$, $A_2\subset E_2$ можно поставить в соответствие одно и только одно подмножество $A_3\subset E_3$, то это соответствие называется законом внешней нечёткой композиции при условии, что $E_3\neq E_1$ или (и) $E_3\neq E_2$.

Если же $E_1=E_2=E_3$, то имеем закон внутренней композиции.

Если m и n конечные, то посредством этих условий описывают конечную групоид (и бесконечный) групоид, если m или(и) n – не конечно.

Пример 5.16. Пусть $E=\{A,B\}$ и $M=\{0,\frac{1}{2},1\}$

$$\Im(E)=\{(A/0;B/0)\},\left\{(A/0),\left(B/\frac{1}{2}\right)\right\},\left\{\left(A/\frac{1}{2}\right),(B/0)\right\},$$

$$\left\{\left(A/\frac{1}{2}\right),\left(B/\frac{1}{2}\right)\right\},\ldots\{(A/1),(B/1)\}$$

Для упрощения записи для $\widetilde{X}\subset E$ вместо $\{(A/\mu_{\widetilde{x}}(A)),(B/\mu_{\widetilde{x}}(B))\}$ будем писать $\{\mu_{\widetilde{x}}(A),\mu_{\widetilde{x}}(B)\}$. Таким образом, получим следующий группоид:

Таблица 6.14

$\mathfrak{I}(E)$ \ $\mathfrak{I}(E)$	$0;0$	$0;\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$	$\frac{1}{2};1$	$\frac{1}{2};1$	$1;\frac{1}{2}$	$1;1$
$(0;0)$	$0;1$	$\frac{1}{2};0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$1;\frac{1}{2}$	$0;1$	$0;1$	$1;\frac{1}{2}$	$1;1$	$1;\frac{1}{2}$
$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$1,0$	$0;\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};0$	$\frac{1}{2};1$	$0;0$	$1;0$	$0;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};1$
$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$0;0$	$1;\frac{1}{2}$	$0;\frac{1}{2}$	$0;1$	$1;\frac{1}{2}$	$1;1$	$1;1$	$1;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$1;1$	$0;0$	$1;1$	$\frac{1}{2};1$	$1;0$	$1;0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;\frac{1}{2}$	$0;0$
$0;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;\frac{1}{2}$	$0;\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};0$	$\frac{1}{2};0$	$1;0$	$\frac{1}{2};0$	$1;\frac{1}{2}$	$1;\frac{1}{2}$
$1;0$	$\frac{1}{2};0$	$0;0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$	$1;0$	$0;1$	$1;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2};1$	$0;0$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$	$0;\frac{1}{2}$	$1;0$	$1;0$	$\frac{1}{2};1$	$1;\frac{1}{2}$	$1:1$
$1;\frac{1}{2}$	$0:0$	$\frac{1}{2};1$	$0;\frac{1}{2}$	$0;0$	$1;\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};1$	$0:0$	$0;\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2};0$
$1;1$	$\frac{1}{2};\frac{1}{2}$	$0;1$	$0;1$	$1;1$	$1;0$	$1;0$	$\frac{1}{2};1$	$0;\frac{1}{2}$	$1;\frac{1}{2}$

Для построения нечёткого группоида достаточно задать универсальное множество E. Конечное или нет, образовать $\Im(E)$ явно или нет и определить закон, который каждой упорядоченной паре нечётких подмножеств ($\widetilde{A}\widetilde{B}$) ставит в соответствие одно и только одно нечёткое подмножество $\widetilde{c}(\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}\subset E)$.

Пример 6.17.

$\widetilde{A} * \widetilde{B} = \widetilde{A} \bigcap \widetilde{B}$, т.е.

$$\mu_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}} \min\left(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{\beta}}(x)\right) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(x) \qquad (6.149)$$

Рассмотрим пример нечёткой внешней композиции.

Пример 6.18 Пусть $E_1\{A;B;C\}$; $cordE_1 = 3$

$M_1 = \left\{0;\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{3}{4};1\right\}$ $cardM_1 = 5$

$E_2 = \{a;b;c;d\}$ $cardE_2 = 4$

$M_2 = \left\{0;\frac{1}{2};1\right\}$ $cardM_2 = 3$

$E_3 = \{\alpha;\beta\}$ $cardE_3 = 2$

$M_3 = \left\{0;\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right\}$ $cardM_3 = 4$

Пусть $\widetilde{A}_1 \subset E_1$ и $\widetilde{A}_2 \subset E_2$ каждой упорядоченной паре $(\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2)$ поставим в соответствие одно и только одно подмножество $A_3 \subset E_3$ с помощью таблицы. А именно, пусть

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{A}_1 = \left\{\left(A/\frac{1}{4}\right),\left(B/\frac{1}{2}\right),(c/1)\right\} \text{, обозначается } \left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};1\right) \\ \widetilde{A}_2 = \left\{(a/0),\left(B/\frac{1}{2}\right),(c/0),(d/1)\right\} \text{ обозначается } \left(0;\frac{1}{2};0;1\right) \end{array}\right\} (6.150)$$

Предположим, что таблица этим двум подмножествам ставит в соответствие третье подмножество

$$\widetilde{A}_3 = \left\{ \left(\alpha / \frac{1}{3} \right); (\beta / 1) \right\} \text{ обозначается } (1/3;1)$$

таблица будет содержать $5^3 \times 3^4 = 125 \times 81$ случаев. На рис. 6.12 приведён небольшой фрагмент этой таблицы.

Пример 6.19. рассмотрим предыдущий пример для закона

$$\left.\begin{aligned} \mu_{\widetilde{A}_3}(\alpha) &= \underset{x}{\wedge} \underset{y}{\wedge} \left[\mu_{\widetilde{A}_1}(x) \vee \mu_{\widetilde{A}_2}(y) \right] \\ \mu_{\widetilde{A}_3}(\beta) &= \underset{x}{\vee} \underset{y}{\vee} \left[\mu_{\widetilde{A}_1}(x) \wedge \mu_{\widetilde{A}_2}(y) \right] \end{aligned}\right\} \qquad (6.151)$$

Получим другую композиционную таблицу, на основе которой вычислим элемент $\widetilde{\Im}(E_1) \times \widetilde{\Im}(E_2)$. Пусть $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ заданы (6.150)

$\Im(E_2)$ / $\Im(E_1)$	…….	$\left(0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2};0;1\right)$	$\left(0;\frac{1}{2};1;0\right)$	……..
$\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};0\right)$	…..	$\left(0;\frac{1}{3};\right)$	$\left(1;\frac{1}{3};\right)$	$\left(1;\frac{1}{3};\right)$	……
$\left(\frac{1}{4};1;\frac{1}{2};\right)$	….	$\left(\frac{2}{3};1\right)$	$\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3};1\right)$	…..
$\left(\frac{1}{4};1;1\right)$	….	$\left(0;\frac{2}{3}\right)$	$(0;0)$	$\left(1;\frac{1}{3}\right)$	……
………	….	………	………	……….	…….

Рис. 6.15

Имеем:

$$\mu_{\widetilde{A}_3}(\alpha) = \underset{x}{\wedge}\left[\underset{y}{\wedge}\left(\frac{1}{4}\vee 0\right);\left(\frac{1}{4}\vee\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{4}\vee 0\right);\left(\frac{1}{4}\vee 1\right)\right],\wedge$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\vee 0\right),\left(\frac{1}{2}\vee\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2}\vee 0\right),\left(\frac{1}{2}\vee 1\right)\right],\wedge\left[(1\vee 0);\left(1\vee\frac{1}{2}\right);(1\vee 0);(1\vee 1)\right]=$$

$$=\underset{x}{\wedge}\left[\underset{y}{\wedge}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4};1\right)\underset{y}{\wedge}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)\underset{y}{\wedge}(1;1;1;1)\right]=\underset{x}{\wedge}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};1\right)=\frac{1}{4}$$

$$\mu_{\widetilde{A}_3}(\beta) = \underset{x}{\vee}\underset{y}{\vee}\left[\left(\frac{1}{4}\wedge 0\right);\left(\frac{1}{4}\wedge\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{4}\wedge 0\right);\left(\frac{1}{4}\wedge 1\right)\right]\underset{y}{\vee}$$

$$\underset{y}{\vee}\left[\left(\frac{1}{2}\wedge 0\right);\left(\frac{1}{2}\wedge\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2}\wedge 0\right);\left(\frac{1}{2}\wedge 1\right)\right]\underset{y}{\vee}\left[(1\wedge 0),\left(1\wedge\frac{1}{2}\right),(1\wedge 0);(1\wedge 1)\right]=$$

$$=\underset{x}{\vee}\left[\underset{y}{\vee}\left(0;\frac{1}{4};0;\frac{1}{4}\right)\underset{y}{\vee}\left(0;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)\right]\underset{y}{\vee}\left(0;\frac{1}{2};0;1\right)=\underset{x}{\vee}\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};1\right)=1$$

Таким образом, $\mu_{A_3}(\alpha)=\frac{1}{4};\mu_{A_3}(\beta)=1$

Подмножеством $\widetilde{A}_1=\left\{\left(A/\frac{1}{4}\right),\left(B/\frac{1}{2}\right),(C/1)\right\}$ и

$\widetilde{A}_2=\left\{(a/0),\left(b/\frac{1}{2}\right),(C/0),(d/1)\right\}$

соответствует $\widetilde{A}_3=\left\{\left(\alpha/\frac{1}{4}\right),(\beta/1)\right\}$

Замечание. Пусть в общем случае M_1 связано с E_1; M_2 связано с E_3.

Если $\tilde{\Im}(E_3)$ формируется из $\tilde{\Im}(E_1)$ и $\tilde{\Im}(E_2)$ посредством формулы композиции (6.152). Так для примера (6.19) очевидно, что

$$\mu_{\tilde{A}_3}(x,y) = \mu_{\tilde{A}_1}(x) \odot \mu_{\tilde{A}_2}(y) \qquad (6.152)$$

то M_3 будет выведено из M_1 и M_2 посредством формулы композиции (6.152). Так для примера (5.19) очевидно, что

$$M_3 = M_1 \cup M_2 = M_1 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$$

Разумеется (6.152) не может рассматриваться как общая формула.

В §6 показано, как компонуются интервалы для операций $\wedge$ и $\vee$. Аналогичные процедуры можно применить для других случаев.

Пример 6.20. Построим нечёткий граф, вершины которого – нечёткие подмножества, этим будет определён закон внешней композиции.

Пусть $\tilde{A} \subset E$, $\tilde{B} \subset E$

Каждой упорядоченной паре $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \tilde{\Im}(E) \times \tilde{\Im}(E)$ будет поставлен в соответствие элемент, обозначенный

$$\tilde{A} * \tilde{B} = (\tilde{A}, \tilde{B})$$

Элемент *C* принимает свои значения во множестве *F*, определенной операцией $*$.

Предположим, например, что *E={a,b}* и $M = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

и, что

$$C(\tilde{A}, \tilde{B}) = [\mu_{\tilde{A}}(a) \wedge \mu_{\tilde{B}}(a)] \vee [\mu_{\tilde{A}}(b) \wedge \mu_{\tilde{B}}(b)] \quad (6.153)$$

Эта функция определяет значение «С» в

$$F = M = \left[0; \frac{1}{2}; 1\right]$$

Полученный нечёткий граф представлен на рис.6.13. таким способом можно строить нечёткие графы, которые обладают специфическими свойствами, обусловленными их построением.

Таблица 6.16

	$(0;0)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$(0;1)$	$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$(1;0);$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$	$(1;1)$
$(0;0)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$(0;1)$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	1
$\left(\frac{1}{2};0\right)$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2};1\right)$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$(1,0)$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1
$\left(1;\frac{1}{2}\right)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1
$(1;1)$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1

Достоинство представления внешнего закона нечёткой композиции в виде нечёткого графа состоит в том, что элементы (вершины графа) – нечёткие подмножества одного и того же универсального множества.

Возвращаясь к группоидам, рассмотрим основные свойства нечётких группоидов.

Пусть $*$ есть закон внутренней композиции нечёткого группоида, обозначим группоид через $(\Im(E),*)$.

1) Если для всех упорядоченных пар $(\widetilde{A},\widetilde{B}) \in \Im(E) \times \widetilde{\Im}(E)$ выполняется условие

$$\widetilde{A} * \widetilde{B} = \widetilde{B} * \widetilde{A} \ , \tag{6.154}$$

то говорят, что закон внутренней нечёткой композиции коммутативен, а также говорят, что группоид коммутативен. Например, группоид на рис.5.13 коммутативен, в то же время на рис. 6.11 – не коммутативен.

Исходя из понятия коммутативности закона $*$ для нечётких подмножеств, можно заключить, что если

$$\mu_{\widetilde{A}*\widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \odot \mu_{\widetilde{B}}(x)$$

то из коммутативности $\odot$ следует коммутативность для $*$ и наоборот.

2) Если $\forall \widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C} \subset E : (\widetilde{A} * \widetilde{B}) * \widetilde{C} = \widetilde{A} * (\widetilde{B} * \widetilde{C})$, то говорят, что закон ассоциативный, а также группоид ассоциативен.

3) Нечёткий группоид имеет единичный элемент.

Определение 6.16. будем говорить, что нечёткий группоид с законом коммутации $*$ обладает левой единицей $\widetilde{1}$, если $\forall \widetilde{A} \subset E : \widetilde{1} * \widetilde{A} = \widetilde{A}$,

правой единицей, если

$$\forall \widetilde{A} \subset E : \widetilde{A} * \widetilde{1} = \widetilde{A} \tag{6.155}$$

и имеет единицу, если

$$\forall \widetilde{A} \subset E : \widetilde{1} * \widetilde{A} = \widetilde{A} * \widetilde{1} = \widetilde{A}$$

Например.

Для $\forall x \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$ и $\forall y \in \left\{0; \frac{1}{2}; 1\right\}$ (1;1)$\wedge$(1;1)=(x,y)

Поэтому (1:1) одновременно является левой и правой единицей, т.е. просто единицей группоида примера (5.16).

4) Рассмотрим закон, для которого существует единичный элемент l и пусть $\tilde{a}$ и $\tilde{\bar{a}} \in E$.

Если $\bar{a} * a = l$, то говорят, что элемент $\bar{a}$ есть левый обратный элемент для «a», если $a * \bar{a}' = l$, то говорят, что $\bar{a}'$ есть правый обратный элемент для a. Наконец, если $\bar{a}' = \bar{a}$, то $\bar{a} * a * \bar{a}' = l$ и говорят, что $\bar{a}$ есть обратный элемент для a. Очевидно, что имеется только один элемент, который в композиции с самим собой даёт (1,1). Это элемент (1,1). Для всех остальных элементов, таких, что $(a,b) \prec (1;1)$ и $(a',b') \prec (1;1)$ имеем

$(a,b) \wedge (a',b') \prec (1;1)$

Следовательно, в группоиде не каждый элемент имеет обратного.

В более общем случае, когда в качестве закона $*$ используется $\bigcup$ или $\bigcap$, обратный элемент не существует.

5) Пусть $*$ и $*'$ представляет собой два закона внутренней композиций, определённых на одном и том же множестве E. Если

$\forall \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C} \subset E : A * \left(\widetilde{B} *' \widetilde{C}\right) = \left(\widetilde{A} * \widetilde{B}\right) * \left(\widetilde{A} * \widetilde{C}\right),$

то говорят, что закон $*$ дистрибутивен слева относительно закона $*'$.

Аналогично, вводится понятие дистрибутивности справа. Если закон $*$ дистрибутивен относительно другого закона $*'$ и слева и справа, то говорят, что он дистрибутивен относительно $*$. Тогда

$$\left(\tilde{A} *' \tilde{B}\right) * \left(\tilde{C} *' \tilde{D}\right) = \left(\tilde{A} * \tilde{C}\right) *' \left(\tilde{A} * \tilde{D}\right) * \left(\tilde{B} * \tilde{C}\right) * \left(\tilde{B} * \tilde{D}\right)$$

Например, закон $\cap$ дистрибутивен относительно $\cup$ и наоборот, закон $\cup$ дистрибутивен относительно $\cap$. Для закона $\oplus$

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \left(\tilde{A} \cap \overline{\tilde{B}}\right) \cup \left(\overline{\tilde{A}} \cap \tilde{B}\right)$$

относительно $\cap$ или $\cup$ свойство дистрибутивности не имеет место.

6) Пусть $D \subset \Im(E)$, причем $\Im(E)$ наделено законом $*$. Если для каждой упорядоченной пары $\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right) \in D \times D$, $\tilde{A} * \tilde{B} \in D$, то говорят, что D относительно $*$.

Например, подмножество $D_1 = \left\{(0,0), \left(0; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,0)\right\}$, замкнуто относительно $\cap$. Это можно видеть на рис.6.11. С другой стороны, подмножество

$D_2 = \left\{\left(0; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; 0\right), \left(\frac{1}{2}; 1\right), \left(1; \frac{1}{2}\right)\right\}$

не замкнуто относительно $\cap$. Такое же правило применимо и для операции $\cup$, но только следует рассмотреть верхние границы. Например, подмножество D_1 не замкнуто относительно $\cup$, а подмножество D_2 - замкнуто.

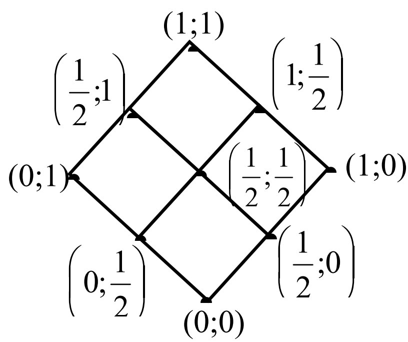


Рис.6.11

Определение 6.17. Любое подмножество $D \subset \widetilde{\Im}(E)$, замкнутое относительно закона $*$ будем называть *подгруппоидом* группоида ($E, *$) и обозначим ($D \subset E, *$). Например, D_1 – подгруппоид группоида (рис.5.17) относительно закона $\bigcap$, а D_2 – подгруппоид относительно закона $\bigcup$.

Определение 6.18. Ассоциативный нечёткий группоид, имеющий единицу, будем называть *нечётким моноидом.*

Если моноид обладает свойством коммутативности, то его будем называть *коммутативным мономидом*.

Все следующие нечёткие группоиды, определённые с помощью их функцией принадлежности, являются моноидами.

1. $\left(\widetilde{\Im}(E), \bigcap\right)$, где $\mu_{\widetilde{A} \cap \widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{B}}(x) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(x),\ \widetilde{A}, \widetilde{B} \subset E$

Ассоциативность группоида очевидно. Единицей служит множество E.

2. $\left(\widetilde{\Im}(E) \bigcup\right)$, где $\mu_{\widetilde{A} \cup \widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \vee \mu_{\widetilde{B}}(x),\ \widetilde{A}, \widetilde{B} \subset E$

Ассоциативность группоида $\left(\widetilde{\Im}(E) \bigcup\right)$ очевидно. Единицей служит множество $\varnothing$.

3. $\left(\widetilde{\Im}(E), \bullet\right)$, где $\mu_{\widetilde{A} \bullet \widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \bullet \mu_{\widetilde{B}}(x),\ \widetilde{A}, \widetilde{B} \subset E$, ассоциативен с единицей E.

4. $\left(\widetilde{\Im}(E), €\right)$, где

$\mu_{\widetilde{A} € \widetilde{B}}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) + \mu_{\widetilde{A}}(x) - \mu_{\widetilde{A}}(x) \bullet \mu_{\widetilde{B}}(x),\ \widetilde{A}, \widetilde{B} \subset E$

5. $\left(\widetilde{\Im}(E), \oplus\right)$, где $\mu_{\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}}(x) = \left[\mu_{\widetilde{A}}(x) \wedge \left(1 - \mu_{\widetilde{B}}(x)\right)\right]$

$\vee \left[\mu_{\widetilde{B}}(x) \wedge \left(1 - \mu_{\widetilde{A}}(x)\right)\right]$, $\widetilde{A}, \widetilde{B} \subset E$ ассоциативно с единицей $\varnothing$.

Рассмотрим пример нечёткого группоида, который не является моноидом.

Пример 6.21. Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ определяется соотношением

$\mu_{\widetilde{A} * \widetilde{B}}(x) = \left|\mu_{\widetilde{A}}(x) - \mu_{\widetilde{B}}(x)\right|$

Положим $a = \mu_{\tilde{A}}(x)$, $b = \mu_{\tilde{B}}(x)$ и $c = \mu_{\tilde{C}}(x)$ и обозначим

$a \cdot b = |a - b|$. Легко показать, что $(a \odot b) \odot c \neq a \odot (b \odot c)$,

т.е. $||a - b| - c| \neq |a - |b - c||$

В частности, если *a=0,4*, *b=0,7*, *c=0,8*, то

$$||a - b| - c| \neq ||0{,}4 - 0{,}7| - 0{,}8| = |0{,}3 - 0{,}8| = 0{,}5$$

$$|0{,}4 - |0{,}7 - 0{,}8|| = |0{,}4 - 0{,}1| = 0{,}3$$

Этот коммутативный группоид не моноид, поскольку не обладает свойством ассоциативности.

Определение 6.19. Пусть $\left(\tilde{\mathfrak{I}}(E), *\right)$ - нечёткий моноид и $D \subset \tilde{\mathfrak{I}}(E)$ - замкнуто относительно закона $*$, тогда D будем называть *нечётким подмоноидом* моноида и обозначим $(D, *)$.

Пример 6.22. Рассмотрим моноид $\left(\tilde{\mathfrak{I}}(E), \cup\right)$ на рис. 6.12 (*a*)

Таблица 6.17

$\cup$	$(0;0)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$(0;0)$	$(0;0)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\frac{1}{2};0$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};0\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$

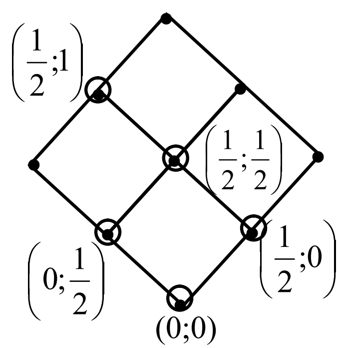


Рис. 6.12

Подмоноиды этого моноида представлены на рис.6.13 и 6.14. Причем

$$D_1 = \left\{(0,0), \left(\frac{1}{2};1\right)\right\};\ D_2 = \left\{(0;0), \left(0;\frac{1}{2}\right), \left(1;\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$\cup$	$(0;0)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$(0;0)$	$(0;0)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$
$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$

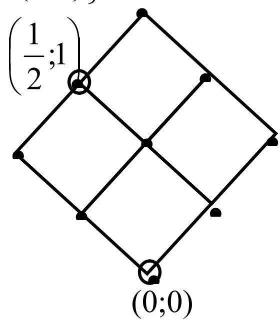


Рис.6.13

$\cup$	$(0;0)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$
$(0;0)$	$(0;0)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$
$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$
$\left(1;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$	$\left(1;\frac{1}{2}\right)$

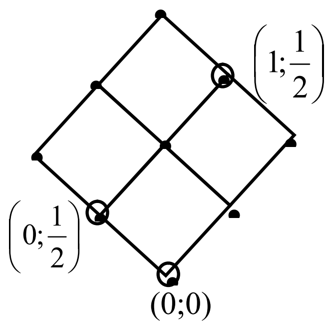


Рис.6.14

Известно, что группа представляет собой моноид, в котором для каждого элемента существует и притом единственный обратный элемент.

Можно задать следующий вопрос: существуют ли реально группы, которые являются нечёткими, если рассматривать операции $\cap, \cup, \bullet$, €, $\oplus$?

Рассмотрим операции $\wedge$ (минимум), $\vee$ (максимум), $\bullet$ (произведение), € (алгебраическая сумма), $\oplus$ (дизьюктивная сумма). Каждая из этих операций ассоциативна и для каждого существует единица, роль которой в зависимости от случая играет 0 и 1; однако почти одинаково для каждой из этих операций не существует обратный элемент.

Рассмотрим операцию $\wedge$. Пусть *(a,b)*$\in M \times M$, где $M = [0;1], 0 < a < b < 1$. Единицей для операции $\wedge$ служит 1.

Существует ли такое *a* или *b*, что $a \wedge b = 1$? Нет, не существует, поскольку, $a \wedge b = a < 1$.

С другой стороны, если взять $M=\{0;1\}$, то групповая структура возможна.

$\wedge$

	0	1
0	0	0
1	0	1

Это не группа. Единичный элемент 1, но 0 не имеет обратного элемента.

$\vee$

	0	1
0	0	1
1	1	1

Это не группа. Единичный элемент 0, но 1 не имеет обратного.

$\oplus$

	0	1
0	0	1
1	1	0

Это группа. Единичный элемент 0. 0 есть обратный элемент 0, 1-обратный элемент для 1.

$\overline{\oplus}$

	0	1
0	1	0
1	0	1

Это группа. Единичный элемент 1, 0 – обратный элемент 0, 1 имеет обратный элемент 1.

ГЛАВА VII. НЕЧЕТКИЙ АНАЛИЗ

§1. Нечеткая функция

Всвязи с тем, что в классической математике функцию следует рассматривать как зависимую переменную. Прежде чем, чтобы введем понятие нечеткой переменной.
Следуя Л.Заде [5] имеем следующее.

Определение 7.1. Нечеткой переменной будем называть переменную, которая характеризуется тройкой (X,E, R(x, χ)), где X - название переменной, E – универсальное множество (конечное или бесконечное, χ-общее название элементов множества E, R(x, χ)- нечеткое ограничение на значения переменной χ , обусловленное x.

Как и в случае обычных нечетких переменных вместо R(x,χ) будем, как правило, писать сокращенно R(x), где x-общее название значений переменной X.

Уравнение назначения для x имеет вид:

$$X=x:R(x) \tag{7.1}$$

или, что эквивалентно $x=\chi$, $\chi \in R(x)$ и отражает то, что элементу x назначается значение χ с учетом ограничения $R(x)$.
Определение 7.2. Степень, с которой удовлетворяется равенство (7.1) будем называть совместимостью значения χ с $R(x)$ и обозначать

$$C(\chi)=\mu_{R(x)}(x), \quad \chi \in E \tag{7.2}$$

Замечание. Важно отметить, что совместимость значения χ не есть вероятность значения χ. Совместимость χ с *R(x)* – это лишь мера того, насколько значение χ удовлетворяет ограничению *R(x)*. Она не имеет никакого отношения к тому, насколько вероятно или не вероятно это значение.
Пример 7.1. Рассмотрим нечеткую переменную, именуемую бюджет.

Пусть $E=[0,\infty)$, $R(x)$ определяется следующим образом:

$$R(\text{бюджет})=\bigcup_{0}^{1000} 1/x+\bigcup_{1000}^{\infty}\left(1+\left(\frac{\chi-1000}{200}\right)^{2}\right)^{-1}\Big/\chi$$

Тогда в уравнении назначения бюджет=1100: *R* (бюджет).
Совместимость значения 1100 с ограничением *R* (бюджет) равна

$$C(1100)=\mu_{R(\text{бюджет})}(1100)=0{,}8$$

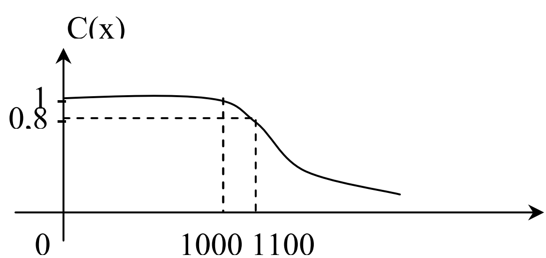


Рис.7.1

Функция совместимости нечеткой переменной (бюджет).

С другой стороны, исходя из понятия области изменения обычной (четкой) переменной можно ввести (и придерживаться) следующее понятие нечеткой переменной.

Определение 7.3. Независимую переменную, область изменения которой есть нечеткое множество, будем называть <u>нечеткой переменной</u>.

При этом, если учесть определение нечеткого множества (4.3), то легко установить эквивалентность определений (7.1) и (7.3).

Действительно: если $\widetilde{x}$ -нечеткое множество и в то же время является областью изменения нечеткой переменной *x*, то это означает, что *x* принимает нечеткое значение $\widetilde{x} = \{x, \mu_{\widetilde{x}}(x) > 0, x \in X\}$. Теперь, если в качестве нечеткого ограничения на значение переменной *x* взять $, \mu_{\widetilde{x}}(x) > 0,$ то из определения 7.3 получаем определение (7.1). Проведя обратное рассуждение, из определения (7.1) получим определение (7.3).

Перейдем теперь к введению понятия нечеткой функции.

Следует отметить, что различными авторами монографий по нечетким множествам [6,7] приводится понятие нечеткой функции. Но при ознакомлении с этими понятиями убеждаемся, что во всех случаях приведенные определения нечеткой функции расплывчатые, т.е. эти определения либо неоднозначно характеризуют сущность нечеткой функции, либо почти совпадают с понятием четкой функции. Это связано с тем, что при введении понятия нечеткой функции следует придерживаться сущности термина функции и не путать его с понятием области определения функции.

Как известно, функция – это соответствие $f:X\to Y$, которое каждому элементу $x\in X$ сопоставляет единственный элемент $y\in Y$. При этом X- область определения функции $y=f(x)$, Y-область значений этой функции.

Приведенное определение функции одной переменной не характеризует степень ее четкости. Поэтому возникает необходимость привести четкие определения как четкой, так и не четкой функции.

Определение 7.4. Функцию $y=f(x)$ будем называть <u>четкой</u>, если каждому четкому элементу $x\in X$ сопоставляет единственный четкий элемент $y\in Y$.

Определение 7.5. Функцию $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$, будем называть <u>нечеткой функцией</u>, если каждому четкому $x\in X$ сопоставляет <u>нечеткий</u> элемент $\tilde{y}\in\tilde{Y}$. Где $\tilde{Y}$ -нечеткое подмножество некоторого универсального множества Y.

Из этого определения следует, что нечеткая функция отличается от четкой тем, что при действии четкой функции на элемент заданного множества, он отображается на элемент той же четкости другого множества, а при действии нечеткой функции четкость отображения изменяется, т.е. если f и $\tilde{f}$ соответственно четкая и нечеткая функции, отображающие $A\subset X$ в $B\subset Y$ и $\tilde{B}\subset Y$ соответственно, то $\mu_{\tilde{B}}(y)<\mu_{B}(y)$. Подмножества B и $\tilde{B}$ состоят из элементов $y\subset Y$, которые входят в B с разными значениями функции принадлежности.

Следует различать два вида нечетких функций:

1) нечеткая функция с четким аргументом $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$
2) нечеткая функция с нечетким аргументом $\tilde{y}=\tilde{f}(x)$,области определения которых есть соответственно четкое и нечеткое множества.

Следует отметить, что каждая из указанных типов нечетких функций (также как и четкое функция) может быть действительной функцией действительной переменной, комплексной функцией с действительной и комплексной переменной, а также однозначной и многозначной.

Также как и четкая функция, нечеткая функция может быть задана тремя способами: аналитический, табличным и графическим способами.

I. Аналитическим называется способ, когда функция задается в виде аналитического выражения. [56]

Определение 7.6. Аналитическим выражением называется символическое обозначение совокупности известных математических операций, которые производятся в определенной последовательности над числами и буквами, обозначающими постоянные и переменные величины.

Из определения аналитического выражения следует, что если функция $\tilde{y} = \tilde{f}(x)$ - нечеткая функция, то известные математические операции (в определенной последовательности) производятся над нечеткими постоянными и переменными величинами. При этом каждое число и каждая буквенная величина может иметь различные значения функции принадлежности (могут входить в выражение функции с различной степенью четкости), что может соответствовать выполнению нечетких математических действий. Поэтому, если нечеткая функция f (как действие на ее аргумент) есть сложная функция, т.е. состоит из элементарных функций (элементарных действий) $\{\varphi_n\}$ с функциями принадлежности $\mu(\varphi_n)$, то

$$\alpha = \mu(f) = \min_{n \in N} \mu(\varphi_n) \tag{7.3}$$

где α- степень четкости f; N – количество элементарных математических действий, из которых состоит действие функции f на ее аргумент. Наряду с этим, следует иметь ввиду, что если нечеткая функция действительной переменной является сложной нечеткой функцией, промежуточный аргумент которой есть нечеткая функция, то промежуточный аргумент рассматривается как нечеткая функция четкого аргумента, а основная функция – как нечеткая функция нечеткого аргумента.

II Табличный способ задания нечеткой функции заключается в том, что двустрочная (двухстолбцовая) таблица. На первой из которых задаются значения аргумента вместе со значениями их степени четкости (т.е. со значениями функций принадлежности значений функций принадлежности значений аргумента их области определения нечеткой функции), а на второй – соответствующие значения нечеткой функции вместе с их степенями четкости (т.е. со значениями функции принадлежности этих значений области изменения нечеткой функции).

III.Графический способ задания нечеткой функции одной переменной заключается в том, что на координатной плоскости задаются два однопараметрических семейства линий, зависящих от одного и того же параметра α (где α-уровень или степень четкости нечеткой функции).

Причем линии обеих семейств, соответствующих одному и тому значению α расположены относительно линии (описываемой четкой функцией той же структуры, что и нечеткая функция) соответствующей значению параметра $\alpha=1$.

Наряду с этим из представления нечеткого числа следует, что при каждом значении аргумента нечеткой функции, значение, принимаемое ею, принадлежит интервалу, центр которого соответствует значению четкой функции той же структуры, что и данная нечеткая функция при том же значении аргумента, а радиус интервала равен длине левого (правого) растяжения нечеткого числа. Поэтому график нечеткой функции одной переменной представляет собой линию, целиком лежащую внутри полосы, осью симметрии которой есть линия, описываемая четкой функцией той же структуры, что и сама нечеткая функция. Но так как функция, описывающая на плоскости некоторую плоскую полосу есть ничто иное как интервальная функция, зависящая от непрерывного параметра, то нечеткую функцию L-R-типа можно рассматривать как интервальную функцию непрерывного параметра при его фиксированном значении. При этом фиксированное значение параметра равно значению степени четкости нечеткой функции: $\alpha = \underset{y}{\mu}(f)$.

Как известно из интервального анализа [57] интервальнозначная функция представляется тремя способами:

1) с помощью математических операций над нечеткими числами и переменными (аналогично классическим представлением четких функций);
2) с помощью двух функций, зависящих от параметра «α» и четкого аргумента, образующую левый и правый пределы интервала изменения значений нечеткой функции при фиксированном значении «α».

$$\begin{gathered}\left[f_L(\alpha,x); f_R(\alpha,x); \quad x\in X,\ \alpha\in(0,1)\right]\\ \left[f_L(\alpha,x); f_R(\alpha,x)\right]\subset\left[f_L(0;x); f_R(0,x)\right]\\ f_L(1,x)=f_R(1,x)=f(x)\end{gathered} \tag{7.4}$$

где *f(x)* – четкая функция той же структуры, что и представляемая нечеткая функция;

3) с помощью четкой функции той же структуры, что и представляемая нечеткая функция и функций отклонения от нечеткой функции, т.е.

$$\widetilde{f}(\alpha,x)=\{f(x),m_L(\alpha,x),m_R(\alpha,x)\} \qquad (7.5)$$

где

$$m_L(\alpha,x)=f(x)-f_L(\alpha,x);\ m_R(\alpha,x)=f_R(\alpha,x)-f(x) \quad (7.6)$$

Отметим, что задача о представлении нечеткой функции с двумя граничными вещественными (четкими) функциями состоит в нахождении представления

$$\widetilde{f}(\alpha,x)=\{f_L(\alpha,x);\ f_R(\alpha,x)\} \qquad (7.7)$$

В [57] доказывается, что всякую однозначную интервальную функцию $\widetilde{f}(\alpha,x)$ единственным образом можно представить через граничные вещественные функции $f_L(\alpha,x)$ и $f_R(\alpha,x)$.

Поэтому из интервальнозначности нечетких функций следует, что всякую нечеткую функцию можно представить через граничные вещественные функции, которыми являются функции $f_L(\alpha,x)$ и $f_R(\alpha,x)$.

Проиллюстрируем представление нечеткой функции четкого аргумента на рациональной функции в виде квадратного трехчлена.

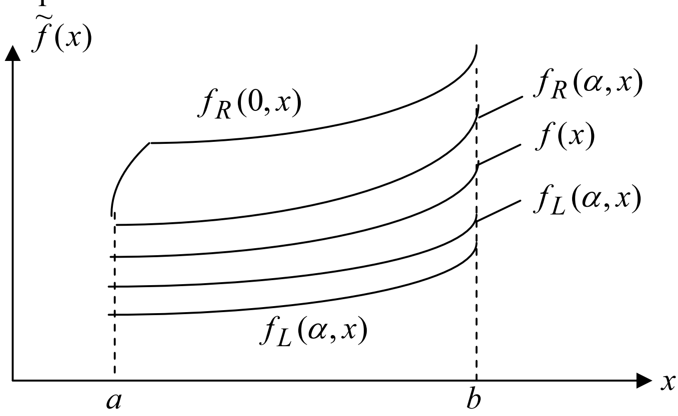


Рис.7.2 Интервальная нечеткая функция

$$\widetilde{f}(x) = X^2 + \widetilde{a}_1 x + \widetilde{a}_2; \quad \widetilde{a}_1 = (a_{L_1}; a_{R_1}); \ \widetilde{a}_2 = \{a_{L_2}; a_{R_2}\}$$

на отрезке $[\widetilde{a}; \widetilde{b}\,]$, где $\quad \widetilde{a} = \{a_L; a_R\}; \widetilde{b} = \{b_L; b_R\}$.
Тогда, учитывая, что для любого из чисел $\widetilde{a}$

$a_L(\alpha) = \alpha a - (1-\alpha)a_L; \ a_R(\alpha) = \alpha a + (1-\alpha)a_R$ имеем:

$$\widetilde{f}(\alpha, x) = x^2 + \widetilde{a}_1(\alpha)x + \widetilde{a}_2(\alpha) = \{x^2 + a_{L_1}(\alpha)x + a_{L_2}(\alpha)\};$$

$$x^2 + a_{R_1}^{(\alpha)} + a_{R_2}^{(\alpha)} =$$

$$= \{x^2 + (a_1 - (1-\alpha)a_{L_1})x + (a_2 - (1+\alpha)a_{L_2});$$

$$x^2 + (xa_1 + (1-\alpha)a_{R_1})x + (a_2 + (1-\alpha)a_{R_2})\}$$

т.е.

$$\left.\begin{aligned} f_L(\alpha, x) &= X^2 + (a_1 + (1-\alpha)a_{L_1})x + (a_2 + (1-\alpha)a_{L_2}) \\ f_R(\alpha, x) &= X^2 + (\alpha a_1 + (1-\alpha)a_{R_1})x + (\alpha a_2 + (1-\alpha)a_{R_2}) \end{aligned}\right\} \quad (7.8)$$

Отметим, что так как любое значение из левого расширения нечеткого числа меньше любого значения из его правого расширения, то в зависимости от знака коэффициентов в $\widetilde{a}_1(\alpha)$ и $\widetilde{a}_2(\alpha)$ выражения (7.8) должны быть таковы для любого $x \in [\widetilde{a}, \widetilde{b}\,]$ и любых $\alpha \in [0,1]$

$$f_L(\alpha, x) \le f_R(\alpha, x) \qquad (7.9)$$

Следует отметить, что если степень четкости функции $\widetilde{f}$ есть $\alpha = \underset{\widetilde{B}}{\mu}(f)$, а $\underset{A}{\mu}(x_1) = \beta$, то степень четкости элемента $y_1 = f(x_1)$ есть

$$\underset{\widetilde{B}}{\mu}(y_1) = \alpha \cdot \beta \qquad (7.10)$$

где $\widetilde{B}$-нечеткое подмножество универсального множества Y. Поэтому, для любых $\alpha,\beta\in[0,1]$ и $x\in\widetilde{A}\subset X$ для монотонно возрастающей нечеткой функции

$$f_L(\alpha,x_L(\beta))<f_L(\alpha,x)<f(x)<f(x)<f_R(\alpha,x)<f_R(\alpha,x_R(\beta))$$

Из соотношения (7.9) следует, что график функции $f_L(\alpha,x)$ лежит ниже графика функции $f_R(\alpha,x)$ для $\forall\alpha\in(0,1)$, а при $\alpha=1$ графики этих функций совпадают и образуют график четкой функции той же структуры, т.е. график функции *y=f(x)*.

Представим теперь нечеткую функцию $\widetilde{f}(\alpha,x)$ третьим способом.

Из (7.8) имеем:

$$f_L=(1,x)=f_R(1,x)=f(x)=x^2+a_1x+a_2 \qquad (7.11)$$

$$m_L(\alpha,x)=f(x)-f_L(\alpha,x)=(1-\alpha)(a_Lx+a_{L_2}) \qquad (7.12)$$

$$m_R(\alpha,x)=f_R(\alpha,x)-f(x)=(1-\alpha)(a_{R_1}x+a_{R_2}) \qquad (7.13)$$

При этом

$$\widetilde{f}(\alpha,x)=\{f(x);\ m_L(\alpha,x),\ m_R(\alpha,x)\} \qquad (7.14)$$

Следует отметить, что

1) если $m_L(x)=m_R(x)$, то

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[f_L(x)+f_R(x)\right] \qquad (7.15)$$

2) если $m_L(x)\neq m_R(x)$, то следует взять

$$f(x)=\frac{f_L(x)\cdot m_R(x)+f_R(x)m_L(x)}{m_L(x)+m_R(x)} \qquad (7.16)$$

Пример 7.2. Рассмотрим нечеткую функцию четкого аргумента.

$\widetilde{f}(x)=X^3-[1;4]X^2+[3;5]x-[6;9]$ на $[a,b]=[0;5]$

Представим $\widetilde{f}(x)$ вторым и третьим способами и построим ее схематический график.

Имеем, пусть коэффициент заданной нечеткой функции есть нечеткие числа, которые имеют одинаковые левые и правые растяжения. Тогда, на основании (7.15)

$$f(x)=x^3-2{,}5x^2+4x-7{,}5$$

$$f_L(x)=x^3-4x^2+3x-9$$

$$f_R(x)=x^3-x^2+5x-6$$

Тогда

$$\widetilde{f}(x)=\{x^3-4x^2+3x-9;\ x^3-x^2+5x-6\}$$

$$m_L(x)=1{,}5x^2+x+1{,}5$$

$$m_R(x)=1{,}5x^2+x+1{,}5$$

Поэтому,

$$\widetilde{f}(x)=\{x^3-2{,}5x^2+4x-7{,}5;\ 1{,}5x^2+x+1{,}5\}$$

Для любых $\alpha\in[0,1]$

$$f_L(\alpha,x)=x^3-(2{,}5+(1-\alpha)1{,}5)x^2+(4-(1-\alpha))x-(7{,}5+(1-\alpha)1{,}5)$$

$$f_R(\alpha,x)=x^3-(2{,}5-(1-\alpha)1{,}5)x^2+(4+(1-\alpha))x-(7{,}5-(1-\alpha)1{,}5)$$

$$m_L(\alpha,x)=f(x)-f_L(\alpha,x)=(1-\alpha)1{,}5x^2+(1-\alpha)x+(1-\alpha)1{,}5$$

$$m_R(\alpha,x) = (1-\alpha)1{,}5x^2 + (1-\alpha)x + (1-\alpha)1{,}5$$
$$m_L(\alpha,x) = m_R(\alpha,x)$$

Приведем геометрическую интерпретацию $\tilde{f}(x)$ на $[0;5]$.

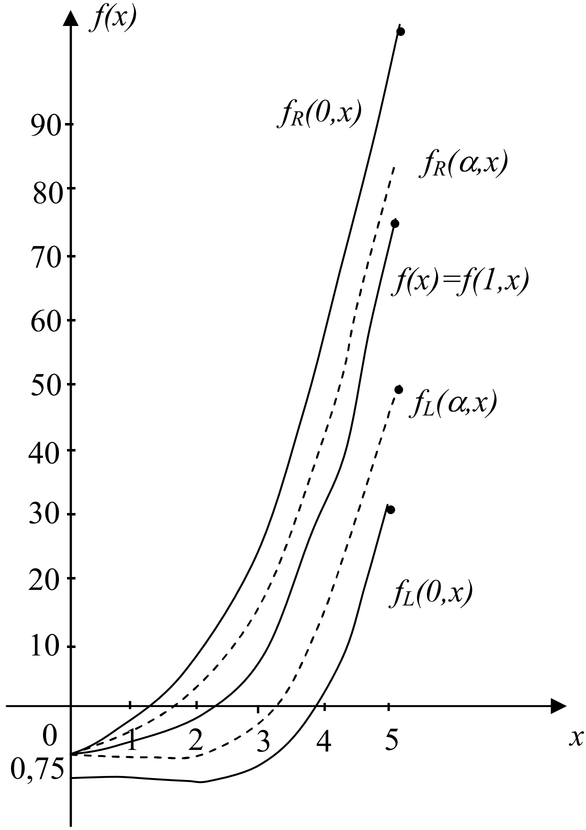


Рис.7.3

Из рис. 7.3 очевидно, что значение $\alpha=\mu(f)$ монотонно уменьшается с увеличением расстояния от графика четкой функции 9являющейся ядром нечеткой функции).

В [57] введены понятия интервального расширения четкой функции и сужения интервальной функции.

Для нечеткой функции аналогичным образом можно ввести понятия сужения и расширения нечеткой функции, т.е.

1) Сужение нечеткой функции

$$\underset{\substack{\tilde{\alpha}\to\alpha \\ \tilde{x}\to x}}{Rs}\ \tilde{f}(\alpha,\tilde{x}) = f(\alpha,x) \tag{7.17}$$

2) интервальное расширение нечеткой функции

$$\underset{\substack{\alpha\to\tilde{\alpha} \\ x\to\tilde{x}}}{Dif}\ (\alpha,x) = \tilde{f}(\tilde{\alpha},\tilde{x}) \tag{7.18}$$

где $f(\alpha,x)$ – наиболее четкое значение нечеткой функции.

Пример 7.3. Найдем сужение нечеткой функции (приведенной в примере 6.2) до уровня α=0,1

Имеем:

$$\underset{\alpha\to 0,9}{Rs}\ f_L(\alpha,x) = \underset{\alpha\to 0,9}{Rs}\{x^3-(2,5+(1-\alpha)1,5)x^2+$$

$$+(4-(1-\alpha))x-(7,5+(1-\alpha)1,5)\}=$$

$$=x^3-2,65x^2+3,9x-7,65$$

$$\underset{\alpha\to 0,9}{Rs}\ f_R(\alpha,x) = \underset{\alpha\to 0,9}{Rs}\{x^3-(2,5+(1-\alpha)1,5)x^2+$$

$$+(4+(1-\alpha))x-(7,5-(1-\alpha)1,5)\}=$$

$$=x^3-2,35x^2+4,1x-7,35$$

Следовательно,

$$\tilde{f}(0,9;x)=\{x^3-2,65x^2+3,9x-7,65;x^3-2,35x^2+4,1x-7,35\}$$

$$\underset{\alpha\to 0,1}{Di}\, f_L(\alpha,x) = \underset{\alpha\to 0,1}{Di}\{x^3 - (2{,}5 + (1-\alpha)1{,}5)x^2 +$$

$$+ (4 - (1-\alpha))x - (7{,}5 + (1-\alpha)1{,}5)\} = x^3 - 3{,}85x^2 + 3{,}1x - 8{,}85$$

$$\underset{\alpha\to 0,1}{Di}\, f_R(\alpha,x) = \underset{\alpha\to 0,1}{Di}\{x^2 - (2{,}5 - (1-\alpha)1{,}5)x^2 +$$

$$+ (4 + (1-\alpha))x - (7{,}5 - (1-\alpha)1{,}5)\} = x^3 - 1{,}15x^2 + 4{,}9x - 6{,}15$$

Следовательно,

$$\widetilde{f}(0{,}1;x) = \{x^3 - 3{,}85x^2 + 3{,}1x - 8{,}85;\ x^3 - 1{,}15x^3 + 4{,}9x - 6{,}15\}$$

Аналогично рассматриваются примеры сужения и расширения нечеткой функции нечеткого аргумента.

§2 Предел и непрерывность нечеткой функции.

Рассмотрим изменение нечеткой функции при стремлении ее аргумента к конечному значению, либо к бесконечности.

Так как на множестве нечетких функций, определяемых на одном и том же множестве (в одном и том же интервале), каждая из нечетких функций отличается от других нечетких функций значением степени нечеткости α (уровень нечеткости), то говоря о понятиях предела и непрерывности нечеткой функции, следует конкретизировать для каких нечетких функций вводятся эти понятия.

Определение 7.7 Пусть нечеткая функция $\widetilde{f}(\alpha,x)$ определена в некоторой окрестности точки a или в некоторых точках этой окрестности. Нечеткую величину $\widetilde{A}(\alpha)$ будем называть пределом функции $\widetilde{f}(\alpha,x)$ четкости α в точке $=a$, если для любого ε>0, как бы оно мало ни было, можно указать такое положительное число δ, что для всех x, отличных от a и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ имеет место неравенство

$$|f(\alpha,x)-A(\alpha)|<\varepsilon \tag{7.19}$$

и обозначим $\underset{x-a}{l\ im}\ \tilde{f}(\alpha,x)=\tilde{A}(\alpha)$

Учитывая, что для любого нечеткого числа (нечеткой величины) его любое значение из левого расширения меньше любого значения из его правого расширения, говоря о пределе нечеткой функции, следует иметь ввиду, что речь конкретно идет о выполнении соотношений

$$\lim_{x\to a}\tilde{f}_L(\alpha,x)=\tilde{A}_L(\alpha) \tag{7.20}$$

или

$$\lim_{x\to a}\tilde{f}_R(\alpha,x)=\tilde{A}_R(\alpha) \tag{7.21}$$

Замечание. Также как и для четких функций для нечетких функций $\tilde{f}_L(\alpha,x)$ и $\tilde{f}_R(\alpha,x)$ и любого $\alpha\in[0,1]$ справедлива теорема существования пределов нечетких. Т.е. справедлива

Теорема 7.1. Если существует равные друг другу пределы слева и справа для нечеткой функции $\tilde{f}_L(\alpha,x)$ $\tilde{f}_R(\alpha,x)$ при *x→a,* то существует предел (7.20) (7.21) и обратно (7.20) (7.21), то существуют равные друг другу пределы слева и справа для нечетких функций $\tilde{f}_L(\alpha,x)$ $\tilde{f}_R(\alpha,x)$.

Определение 7.8. Если $\tilde{f}\ (\alpha,x)$ стремится к пределу $\tilde{A}_1(\alpha)$ при $x\to a$ и $x<a$, то $\tilde{A}_1(\alpha)$ называется пределом нечеткой функции $\tilde{f}(\alpha,x)$ слева в точке a.

Если же $\widetilde{f}(\alpha,x)$ стремится к пределу $\widetilde{A}_2(\alpha)$ при $x \to a$ и $x<a$, то $\widetilde{A}_2(\alpha)$ называется пределом $\widetilde{f}(\alpha,x)$ в точке $x=a$ справа.

Эти пределы обозначаются соответственно:

$$\lim_{x \to a-0} \widetilde{f}(\alpha,x) = \widetilde{A}_1(\alpha)$$

и

$$\lim_{x \to a+0} \widetilde{f}(\alpha,x) = \widetilde{A}_2(\alpha) \qquad (7.22)$$

Эти понятия вводятся для любых $\alpha \in [0,1]$.

Следует отметить, что все приведенные понятия можно ввести и для случая, когда $x \to \infty$, т.е.

Определение 7.9. Нечеткая функция $\widetilde{f}(\alpha,x)$, $\alpha \in [0,1]$ стремится к пределу $\widetilde{A}(\alpha)$ при $x \to \infty$, если для каждого произвольно малого ε>0 и любого достаточно большого положительного N существуют значения x, такие, что при

$\left|x\right| > N, \left|\widetilde{f}(\alpha,x) - \widetilde{A}(\alpha) < \varepsilon\right|$ и обозначается:

$$\lim_{x \to \infty} \widetilde{f}(\alpha,x) = \widetilde{A}(\alpha).$$

Кроме того, так как результат предельного значения не зависит от способа перехода к пределу, то независимо от того, является ли область определения нечеткой функции четким или нечетким множеством (что соответствует тому, что взятая нечеткая функция четкого или нечеткого аргумента) приведенные выше понятия пределов нечеткой функции сохраняются без изменения.

Отметим, что 1) если нечеткая функция (также, как и нечеткое число) является нечеткой функцией L-R – типа, т.е.

$$\tilde{f}(\alpha,x)=\{f_L(\alpha,x);\ f_R(\alpha,x)\} \tag{7.23}$$

причем выполняются (7.22), то

$$\lim_{x\to a}\tilde{f}(\alpha,x)=\left\{\lim_{x\to a} f_L(\alpha,x);\lim_{x\to a} f_R(\alpha,x)\right\}= \\ =\{A_L(\alpha);\ A_R(\alpha)\}=\tilde{A}(\alpha) \tag{7.24}$$

$\tilde{f}(\alpha,x)=\{f(x);\ m_L(\alpha,x);\ m_R(\alpha,x)\}$

2) если

$$\tilde{f}(\alpha,x)=\{f(x);\ m_L(\alpha,x);\ m_R(\alpha,x)\} \tag{7.25}$$

где f*(x)*- четкая функция той же структуры, что и $\tilde{f}(\alpha,x)$; $m_L(\alpha,x)$ и $m_R(\alpha,x)$ - функции отклонения $\tilde{f}(\alpha,x)$ от *f(x)*, то

$$\lim_{x\to a}\tilde{f}(\alpha,x)=\{\lim_{x\to a}f(x);\lim_{x\to a}m_L(\alpha,x);\ \lim_{x\to a}m_R(\alpha,x)\}=\{A;m_L\ m_R\} \tag{7.26}$$

Отсюда следует утверждение. Для того, чтобы нечеткая функция имела ограниченный предел необходимо, чтобы четкая функция той же структуры имела конечеый предел.

Следует также отметить, что все основные теоремы о пределах четких функций справедливы и для пределов нечетких функций, т.е.

1. $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{f}_i(\alpha,x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lim\limits_{x\to a}\tilde{f}_i(\alpha,x)$

2. $\lim\limits_{x\to a}\tilde{f}_1(\alpha,x)\cdot\tilde{f}_2(\alpha,x)=\lim\limits_{x\to a}\tilde{f}_1(\alpha,x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\tilde{f}_2(\alpha,x)$

Следствие 7.1. $\lim\limits_{x\to a}$ с $\tilde{f}(\alpha,x) = C\,l\lim\limits_{x\to a}\tilde{f}(\alpha,x)$

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\tilde{f}(\alpha,x)}{\tilde{g}(\alpha,x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a}\tilde{f}(\alpha,x)}{\lim\limits_{x\to a}\tilde{g}(\alpha,x)}$ если всюду $\tilde{g}(\alpha,x)$

4. Если на множестве, содержащей точку $x=a$

$\tilde{f}(\alpha,x) > \tilde{g}(\alpha,x)$, то $\lim\limits_{x\to a}\tilde{f}(\alpha,x) \geq \lim\limits_{x\to a}\tilde{g}(\alpha,x)$ для любых $\alpha\in[0;1]$.

Следствие 7.2. Для любых $\alpha\in[0;1]$

$$\lim_{x\to a}\tilde{f}_L(\alpha,x) < \lim_{x\to a}\tilde{f}_R(\alpha,x)$$

Следствие 7.3. Для любых $\alpha_1<\alpha_2$; α_1, $\alpha_2\in[0;1]$

$$\lim_{x\to a}\tilde{f}_L(\alpha_1,x) < \lim_{x\to a}\tilde{f}_L(\alpha_2,x)$$

и

$$\lim_{x\to a}\tilde{f}_R(\alpha_1,x) > \lim_{x\to a}\tilde{f}_R(\alpha_2,x)$$

Пример 7.4.

$$\lim_{x\to -1}\{x^3-[1;4]x^2+[3;5]x-[6;9]\} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\{x^3 = (2{,}5+(1-\alpha)1{,}5)x + [4-(1-\alpha)]x -$$

$$-[7{,}5+(1-\alpha)1{,}5]; x^3 - [2{,}5-(1-\alpha)1{,}5]x^2 +$$

$$+ \_[4+(1-\alpha)]x - [7{,}5-(1-\alpha)1{,}5] =$$

$$\{-17+2\alpha; -13-2\alpha\} = \tilde{A}(\alpha)$$

$$\lim_{x\to -1}\tilde{f}(\alpha;x) = \lim_{\alpha\to 0{,}6}\tilde{A}(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0{,}6}\{-17+2\alpha;\ -13-2\alpha\} =$$

$$= \{-15{,}8; -14{,}2\} = \tilde{A}(0;6);$$

Кроме того

$$\lim_{x \to -1} \tilde{f}(\alpha; x) = \lim_{\alpha \to 1} \{-17 + 2\alpha; -13 - 2\alpha\} = \{-15;\ -15;\} = A(1) = -15;$$

$\tilde{A}(0,6)$ $\tilde{A}(0,2)$

Если представить в виде, то $\tilde{A}(0,6) = \{-15;\ 0,8; 0,8\}$

.

$\tilde{A} = \{A; m_L;\ m_R\}$

Найдем теперь . Имеем:

$$\lim_{x \to 0,2} \tilde{A}(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0,2} \{-17 + 2\alpha;\ -13 - 2\alpha\} = \{-16,6; -13,4\};$$

Таким образом:

$A_L(0,2) < A_L(0,6) < A_R(0,6) < A_R(0,2)$

Пусть нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x)$ (четкости $\alpha \in [0;1]$) определена при некотором значении x_0 и в некоторой ее окрестности и $\tilde{y}_0 = \tilde{f}(\alpha, x_0)$.

Если аргументу x (x - четкая, либо нечеткая переменная) дать приращение (положительное или отрицательное) Δx, то и функция $\tilde{y}$ получит приращение $\Delta\tilde{y}$, которое выражается формулой:

$\Delta\tilde{y} = \tilde{f}(\alpha, x_0 + \Delta x) - \tilde{f}(x, x_0)$

Определение 6.10. Нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x_0)$ называется непрерывной в точке $x = x_0$, если она определена в точке $x = x_0$ и некоторой ее окрестности.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta\tilde{y} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\tilde{f}(\alpha, x_0 + \Delta x) - \tilde{f}(\alpha, x_0)\right] = 0 \qquad (7.27)$$

для любых $\alpha \in [0;1]$.
Или же

$$\lim_{x \to x_0} \tilde{f}(\alpha, x) = \tilde{f}(\alpha, x_0) \qquad (7.28)$$

Учитывая представление нечеткой функции в виде (7.4) и (7.5), имеем:

Определение 7.11. Нечеткую функцию $\{f_L(\alpha, x); f_R(\alpha, x)\}$ будем называть непрерывной в точке $x = x_0$ для любого $\alpha \in [0;1]$, если

$$\lim_{x \to x_0} \{f_L(\alpha, x); f_R(\alpha, x)\} = \{f_L(\alpha, x_0); f_R(\alpha, x_0)\} \qquad (7.29)$$

Определение 7.12. Нечеткую функцию $\{f(x), m_L(\alpha, x), m_R(\alpha, x)\}$ будем называть непрерывной в точке $x = x_0$ для любого $\alpha \in [0;1]$, если

$$\lim_{x \to x_0} \{f(x); m_L(\alpha, x), m_R(\alpha, x)\} = \{f(x_0), m_L(\alpha, x_0); m_R(\alpha, x_0)\} \quad (7.30)$$

Из (7.30) следует. Для того, чтобы нечеткая функция была непрерывной в точке $x = x_0$, необходимо, чтобы четкая функция той же структуры была непрерывна в этой точке. С точки зрения левого и правого пределов функции имеем.

Утверждение 6.1 Нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x)$ непрерывна в некоторой точке (взятой из области определения нечеткой функции) x_0, если в этой точке ее левый и правый пределы совпадают.

Также как и четкая функция, нечеткая функция $\widetilde{f}(\alpha, x)$ называется непрерывной на некотором множестве, если она непрерывна во всех точках этого множества. Кроме того, все свойства четких непрерывных функций справедливы для непрерывных нечетких функций.

Пример 7.5. Доказать непрерывность нечеткой функции $\widetilde{f}(0{,}4; x) = [1;3]x^2 - [2;5]x + [3;7]$ в точке *x=1*

Имеем:

$$f_L(0{,}4, x) = x^2 - 5x + 3$$
$$f_R(0{,}4; x) = 3x^2 - 2x + 7$$

Если $m_L(\alpha, x) = m_R(\alpha, x)$ для любых $\alpha \in [0;1]$, то

$$f(x) = 2x^2 - 3{,}5x + 5$$

При этом $m_L(0{,}4; x) = x^2 + 15x + 2 = m_R(0{,}4; x)$

Для точки *x=1* имеем:

$$\lim_{\substack{x \to 1-\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} (2x^2 - 3{,}5x + 5) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(2(1-\varepsilon)^2 - 3{,}5(1-\varepsilon) + 5\right) = 3{,}5$$

$$\lim_{\substack{x \to 1+\varepsilon \\ \varepsilon \to 0}} (2x^2 - 3{,}5x + 5) = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(2(1+\varepsilon)^2 - 3{,}5(1+\varepsilon) + 5\right) = 3{,}5$$

Аналогично легко доказать, что

$$\lim_{x \to 1-0} m_L(0{,}4; x) = \lim_{x \to 1+0} m_L(0{,}4; x) = 4{,}5$$

т.е. $\widetilde{f}(0{,}4; x)$ непрерывна в точке *x=1*.

Так же, как и четкие функции, нечеткие функции могут иметь точки разрыва первого и второго рода, которые определяют аналогично, что и точки разрыва первого и второго рода, которые определяют аналогично, что и точки разрыва для нечетких непрерывных функций справедливы следующие теоремы:

1) Если $\widetilde{f}_1(\alpha, x)$ и $\widetilde{f}_2(\alpha, x)$ есть непрерывные в точке $x = x_0$ нечеткие функции четкости $\alpha \in [0;1]$, то $\varphi(\alpha, x) = f_1(\alpha, x) + f_2(\alpha, x)$ есть непрерывная функция в точке

2) Произведение непрерывных двух нечетких функций есть непрерывная нечеткая функция.

3) Частное двух непрерывных нечетких функций непрерывная, если знаменатели в рассматриваемой точке не обращается в нуль.

4) Если $\widetilde{u} = \widetilde{\varphi}(\alpha, x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $\widetilde{f}(\alpha, u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi_0(\alpha, x)$, то функция $\widetilde{f}[\widetilde{\varphi}(x)]$ непрерывна в точке $x = x_0$.

При этом:

1) если

$\widetilde{f}_1 : A \to \widetilde{B}_1; f_2 \div A \to \widetilde{B}_2,\ \widetilde{B}_1; \widetilde{B}_2 \subset Y,\ \mu(\widetilde{f}_1) = \mu(f_2) = \alpha,$ то

$\mu(\widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2) = \alpha;\ \mu(\widetilde{f}_1 \widetilde{f}_2) = \alpha,\ \mu\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right) = \alpha;\ \mu\big(f(\varphi)\big) = \alpha^2,$ если $\mu(\varphi) = \alpha$ (6.31)

2) если $\mu(f_1) = \alpha$; $\mu(f_2) = \beta$; $\mu(\varphi) = \gamma$, то

$$\left.\begin{aligned}
&\mu(f_1 + f_2) = \max[\mu(f_1); \mu(f_2)] = \alpha \vee \beta \\
&\mu(f_1 \cdot f_2) = \min[\mu(f_1); \mu(f_2)] = \alpha \wedge \beta \\
&\mu(f_1 / f_2) = \min[\mu(f_1); \mu(f_2)] = \alpha \wedge \beta \\
&\mu[f(\varphi)] = \mu(f) \cdot \mu(\varphi) = \alpha \cdot \beta
\end{aligned}\right\} \qquad (7.32)$$

§3.Дифференцирование нечеткой функции

Из физического смысла производной обычной (четкой) функции следует, что если некоторый физический процесс описывается некоторой четкой функцией, то скорость изменения этого физического процесса так же описывается четкой функцией, являющейся производной от исходной четкой функции. Это означает, что степень четкости производной от нечеткой функции с любой степенью четкости совпадает со степенью четкости самой функции. Справедливость этого утверждения устанавливается так же тем, что сама операция дифференцирования является четкой операцией, т.е. если операцию дифференцирования рассматривать как функцию $\varphi(x)$, то $\mu(\varphi)=1$.

Учитывая, что для нечеткой функции $\widetilde{f}(\alpha,x)$, $\mu(\widetilde{f})=\alpha\in[0;1]$ и $\mu(\widetilde{f}_*)=\min\left[\mu(\varphi)\cdot\mu(\widetilde{f})\right]$, то получим, что

$$\mu(\widetilde{f}_*)=\min(1;\alpha)=\alpha=\mu(\widetilde{f}) \qquad (7.33)$$

Поэтому, при введении понятия производной нечеткой функции следует учесть лишь значение степени четкости самой функции.

Определение 7.13. Предел отношения приращения нечеткой функции (четкости $\alpha\in[0;1]$ $\Delta\widetilde{f}(\alpha,x)$) к приращению аргумента Δx при стремлении последней к нулю, будем называть производной нечеткой функции $\Delta\widetilde{f}(\alpha,x)$ и обозначим:

$$f'(\alpha,x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\widetilde{f}(\alpha,x+\Delta x)-f(\alpha,x)}{\Delta x} \qquad (7.34)$$

Учитывая представления (7.4) и (7.5) нечеткой функции, имеем:

Определение 7.14. Если нечеткая функция четкого аргумента задана в виде (6.4), тогда для $\forall\alpha\in[0;1]$

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(\alpha,x)=\{f_L'(\alpha,x);\quad f_R'(\alpha,x)\}=\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\alpha,x+\Delta x)-\tilde{f}(\varepsilon,x)}{\Delta x}=\\
&=\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_L(\alpha,x+\Delta x)-f_L(\alpha,x)}{\Delta x};\right.\\
&\left.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_R(\alpha,x+\Delta x)-f_R(\alpha,x)}{\Delta x};\right\}
\end{aligned}\tag{7.35}$$

Определение 7.15. Если нечеткая функция четкого аргумента задана в виде (6.5), тогда для

$\forall\alpha\in(0;1)$

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(\alpha,x)=\left\{f'(x);\ m_L'(\alpha,x);\ m_R'(\alpha,x)\right\}=\\
&=\left\{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x};\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{m_L(\alpha,x+\Delta x)-m_L(\alpha,x)}{\Delta x};\right.\\
&\left.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m_R(\alpha,x+\Delta x)-m_R(\alpha,x)}{\Delta x}\right\}
\end{aligned}\tag{7.36}$$

С геометрической точки зрения производная нечеткой функции $\Delta\tilde{f}(\alpha,x)$ в любой точке (четкой, либо нечеткой) $x=x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к линии, описываемой этой функцией в данной точке.

Пример 7.6. $\tilde{f}(x)=x^{\tilde{a}}$; $\tilde{a}=\{2;4\}$.

Найдем $\tilde{f}(0{,}8;\ 3)$. Имеем: $\tilde{y}'=\tilde{f}'(x)=\tilde{a}x^{\tilde{a}-1}$, т.е.

$\tilde{y}'=\{2;\ 4\}x^{\{1;3\}}$

Для $x>1$; $y_L(0;\ x)=x^2$; $y_R(0;x)=x^4$

$y_L'(0;x)=2x;\ y_R'(0;x)=4x^3$

Для простоты предположим, что левое и правое растяжения числа [2;4]- одинаковы, тогда $\tilde{a}=\{a_L;a_R\}=\{2;4\}$, $\tilde{a}=\{a;m_L;m_R\}=\{3;1;1\}$ /

Следовательно, $y=f_L(1;x)=f_R(1;x)=x^3$

$$y' = f(x) = 3x^2$$

$$y'_L(\alpha; x) = [3 - (1-\alpha)]x^{[2-(1-\alpha)]}$$

$$y'_R(\alpha; x) = [3 + (1-\alpha)]x^{[2+(1-\alpha)]}$$

$$m_L(\alpha, x) = 3x^2 - [3 - (1-\alpha)]x^{[2-(1-\alpha)]}$$

$$m_R(\alpha, x) = [3 + (1-\alpha)]x^{[2+(1-\alpha)]} - 3x^2$$

$$f'_L(0{,}8x) = 2{,}8x^{1{,}8};\ f'_R(0{,}8; x) = 3{,}2x^{2{,}2}$$

$$m_L(0{,}8x) = 3x^2 - 2{,}8x^{1{,}8};\ m_R(0{,}8; x) = 3{,}2x^{2{,}2} - 3x^2$$

$$f'(0{,}8;3) = \{20{,}7; 34{,}4\};\ f'_L(1;3) = f'_R(1;3) = f(3) = 27$$

или

$$\tilde{f}(0{,}8;3) = \{27; 6{,}3; 7{,}4\}$$

Схематический график $\tilde{f}(\alpha, x)$ на [1,5; 4] построен на рис.7.4

Отметим, что все действия над производными четких функций справедливы и для производных от нечетких функций.

1) $\left(\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)\right)'_x = \tilde{f}'(x) + \tilde{g}(x)$

2) $\left(\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)\right)' = \tilde{f}'(x)\tilde{g}(x) + \tilde{f}'(x)\tilde{g}'(x)$

3) $\left(\dfrac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}\right)' = \dfrac{\tilde{f}'(x)\tilde{g}(x) - \tilde{g}'(x)\tilde{f}(x)}{[\tilde{g}(x)]^2}$

если всюду $\tilde{g}(x) \neq 0$

4) Если $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{u}), \tilde{u} = \tilde{\varphi}(x)$, то $\tilde{f}'_x = \tilde{f}'_{\tilde{u}} \cdot \tilde{U}_x$ соотношение 1)-4) справедливы для любых $\alpha \in (0;1)$. При этом следует учесть, что четкость производной (от алгебраической суммы, частного и произведения) совпадает с четкостью результатов, соответствующих операций над самими нечеткими функциями, а четкость производной сложной функции равна четкости самой нечеткой сложной функции.

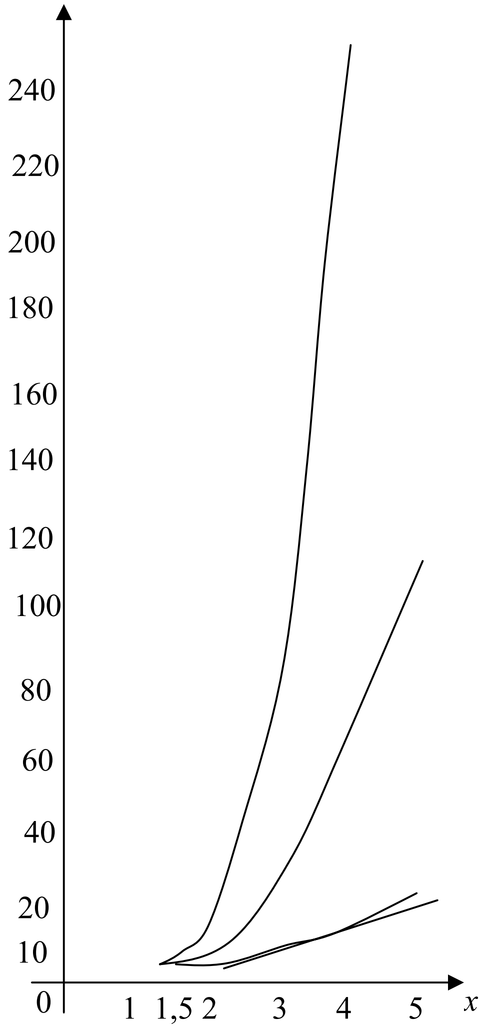
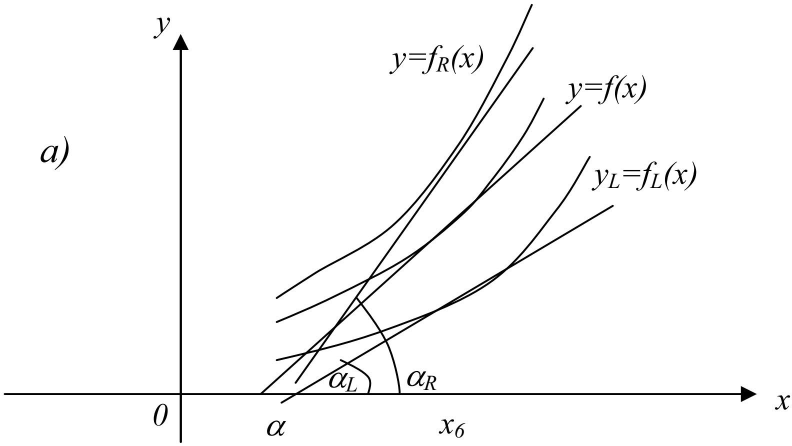


Рис. 7.4

На рис. 7.5. приведена геометрическая интерпретация производной нечеткой функции. Наряду с этим, легко доказать, что как понятия дифференцируемости также и все теоремы о дифференцируемых четких функциях справедливы и для нечетких функций, как с четким так же и с нечетким аргументом.



Производная нечеткой функции с нечетким аргументом

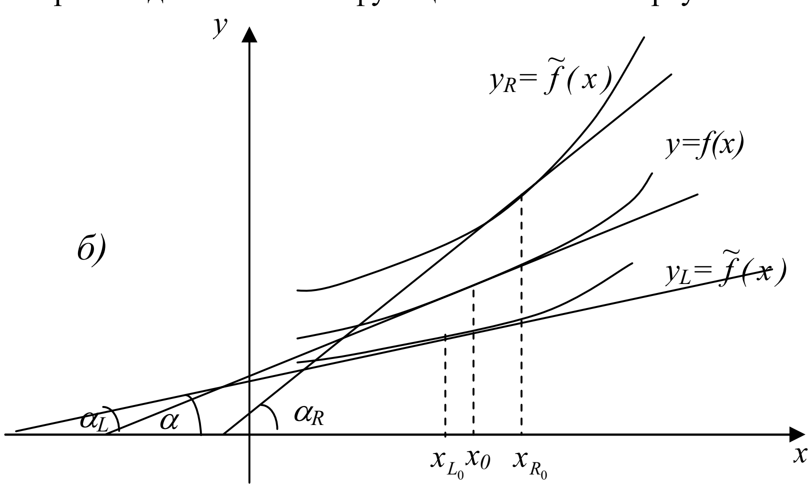


Рис.7.5.Производная нечеткой функции с четким аргументом

Аналогично понятию дифференциала четкой функции можно ввести понятие дифференциала нечеткой функции как четкого, так же и нечеткого аргумента.

Определение 7.15. Рассмотрим приращение нечеткой функции $\tilde{f}(\alpha, x)$, $\alpha \in [0;1]$, соответствующее приращению аргумента Δx.

При этом: 1) если $\tilde{f}(\alpha, x) = \{f_L(\alpha, x); f_R(\alpha, x)\}$, то

$$\begin{aligned} &\Delta f(\alpha, \Delta x) = \\ &= \{\Delta f_L(\alpha, x);\ \Delta f_R(\alpha, x)\} = \\ &= \{f(\alpha, x + \Delta x) - f_L(\alpha, x), f_R(\alpha, x + \Delta x) - f_R(\alpha, x)\} \end{aligned} \tag{7.37}$$

2) если $\tilde{f}(\alpha, x) = \{f(x), m_L(\alpha, x), m_R(\alpha, x)\}$, то

$$\begin{aligned} &\Delta f(\alpha, \Delta x) = \\ &= \{\Delta f(x); \Delta m_L(\alpha, x);\ \Delta m_R(\alpha, x)\} = \\ &= \{f(x + \Delta x) - f(x), m_L(\alpha, x + \Delta x) - \\ &m_L(\alpha, x);\ m_R(\alpha, x + \Delta x) - m_R(\alpha, x)\} \end{aligned} \tag{7.38}$$

В силу определения производной нечеткой функции представления переменной величины в виде суммы ее предельного значения и бесконечно малой величины из (7.37) и (7.38) имеем:

$$\Delta\tilde{f}(\alpha, x) = \{\Delta f_L'(\alpha, x);\ \Delta x + \gamma_L \Delta x;\ \ f_R'(\alpha, x)\Delta x + \gamma_R \Delta x\} \tag{7.39}$$

$$\begin{aligned} &\Delta\tilde{f}(\alpha, x) = \{f'(x)\Delta x + \gamma_{\Delta x};\ m_L'(\alpha, x)\Delta x + \gamma_L \Delta x; \\ &m_R'(\alpha, x)\Delta x + \gamma_R \Delta x\} \end{aligned} \tag{7.40}$$

При этом линейную часть приращения нечеткой функции относительно приращения ее аргумента (четкого,

либо нечеткого) будем называть главной частью приращения, либо дифференциалом нечеткой функции.
Для вычисления дифференциала нечеткой функции имеем:

$$d\tilde{f}(\alpha, x) = f'_x(\alpha, x)dx = \{f'_L(\alpha, x)dx;\ f'_R(\alpha, x)dx\} \quad (7.41)$$

либо

$$d\tilde{f}(\alpha, x) = f'_x(\alpha, x)dx = \{f'_L(\alpha, x)dx;\ f'_R(\alpha, x)dx\} \quad (7.42)$$

Так же как и для четких функций с геометрической точки зрения, дифференциал нечеткой функции $\tilde{f}(\alpha, x)$ для любых $\alpha \in [0;1]$, соответствующее приращению аргумента (Δx) равен приращению по касательной к кривой (описываемой этой функцией) в точке касания, соответствующее приращению аргумента.

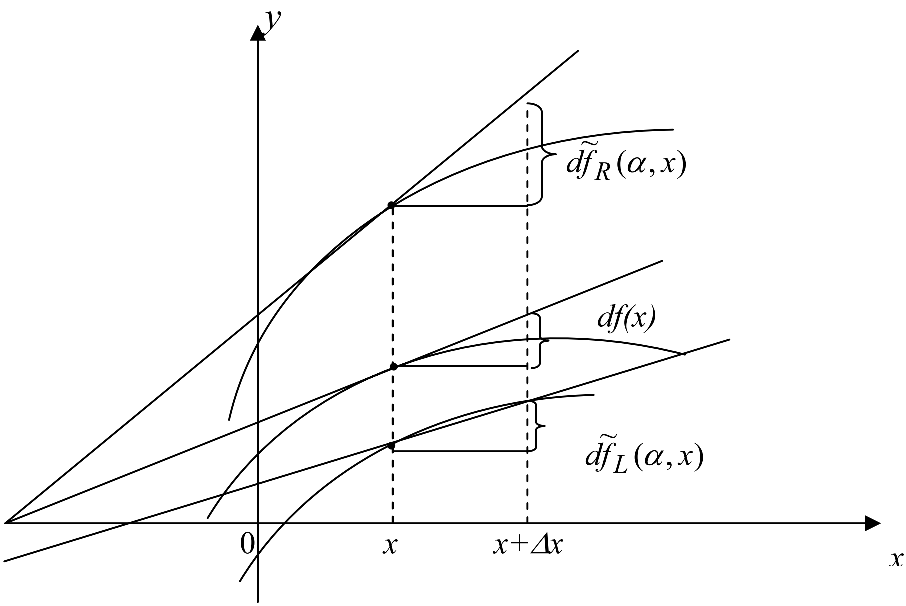


Рис. 7.6

§4. Экстремум нечеткой функции

Следует иметь в виду, что:

1) нечеткий максимум, т.е. максимум нечеткой функции $\tilde{f}(x)$ определяется как

$$\tilde{f}_{\max}(x) = \max_{x \in X} \tilde{f}(x) = \left\{ \underset{\alpha \in [0;1]}{sur} \cdot \max_{x \in X} \tilde{f}(\alpha, x) \right\} \qquad (7.43)$$

2) нечеткий минимум, т.е. минимум нечеткой функции $\tilde{f}(x)$ определяется как

$$\tilde{f}_{\min}(x) = \min_{x \in X} \tilde{f}(x) = \left\{ \inf_{\alpha \in [0;1]} \min_{x \in X} \tilde{f}(\alpha, x) \right\} \qquad (7.44)$$

Поэтому, учитывая, что для любого уровня четкости нечеткой функции $\tilde{f}(x)$

$$\tilde{f}_L(\alpha, x) < \tilde{f}_R(\alpha, x) \qquad (7.45)$$

можно принять следующие определения экстремума (максимума и минимума) нечеткой функции.

Определение 7.16. Нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x)$, $\alpha \in [0;1]$ в точке $x_0 \in X$ имеет максимум, если значение функции $\tilde{f}_R(\alpha, x)$ в точке $x = x_0$ больше, чем ее значение во всех точках множества X.

В терминах приращения аргумента нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x)$ в точке $x = x_0$ имеет максимум, если для любых Δx в этой точке

$$\tilde{f}_R(\alpha, x_0 + \Delta x) < \tilde{f}_R(\alpha, x_0) \qquad (7.46)$$

Определение 7.17. Нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha, x)$, $\alpha \in [0;1]$ в точке $x_1 \in X$ принимает значение минимума, если значения функции $\widetilde{f}_L(\alpha, x)$ в точке $x=x_1$ меньше, чем ее значения во всех оставшихся точках множества X.

В терминах приращения аргумента, нечеткая функция $\widetilde{f}(\alpha, x)$ в точке $x=x_1$, имеет минимум, если для любых Δх в точке $x=x_1$.

$$f_L(\alpha, x_1 + \Delta x) > f_L(\alpha, x_1) \qquad (7.47)$$

Из приведенных понятий экстремума нечеткой функции следует, что при сужении нечеткой функции эти определении совпадают с определениями соответствующих понятий для четких функций той же структуры, что и данная нечеткая функция.

Поэтому теоремы о необходимом и достаточном условия экстремума четкой функции справедливы и для нечеткой функций. Кроме того, при нахождении стационарных точек нечеткой функции в силу теоремы о необходимом условии экстремума функции одной переменной [56] следует найти корни нечеткого уравнения

$$\widetilde{f}(\alpha, x) = 0 \qquad (7.48)$$

Ввиду того, что корнями уравнения (7.48) будут нечеткие величины (в частности, нечеткие числа), то казалось бы, что при применении теоремы о достаточном условии экстремума следует определять значения $\widetilde{f}_L(\alpha, x)$ и $\widetilde{f}_R(\alpha, x)$, найденных из (7.48), нечетких значениях. Но это не так. Дело в том, что если (в частности) в точке $\widetilde{x}_0(\alpha) = \{x_0; m_{L_0}(\alpha); m_{R_0}(\alpha)\}$ функция принимает значение максимума, то мы должны будем сравнить значения

$f_R(x_0 - m_{L_0}(\alpha)),\ f_R(x_0)$ и $f_R(x_0 + m_{R_0}(\alpha))$ и взять величину

$$\max_{x\in X}\widetilde{f}(\alpha;x)=sur\left\{f_R(x_0);f_R\left(x_0-m_{L_0}(\alpha)\right),f_R\left(x_0+m_{R_0}(\alpha)\right)\right\}(7.49)$$

С другой стороны, так как для любого фиксированного значения $\alpha\in[0;1]$ (любого уровня четкости) каждая из функций $f_L(\alpha,x)$и $f_R(\alpha,x)$ описывает конкретные линии на координатной плоскости, то (очевидно, что) стационарные точки для каждой из функций $f_L(\alpha,x)$и $f_R(\alpha,x)$будут различны. Поэтому:

1) если $f(\alpha,x)=\{f_L(\alpha,x);f_R(\alpha,x)\}$, то для определения стационарных точек нечеткой функции следует решить уравнения:

$$f_L(\alpha,x)=0 \text{ и } f_R(\alpha,x)=0 \qquad (7.50)$$

и взять

$$\max_{x\in X}\widetilde{f}(\alpha,x)=\max f_R(\alpha,x)=0 \qquad (7.51)$$

$$\min_{x\in X}\widetilde{f}(\alpha,x)=\min f_L(\alpha,x)=0 \qquad (7.52)$$

2. Если $\widetilde{f}(\alpha,x)=\{f(x);m_L(\alpha,x);m_R(\alpha)\}$, то для определения стационарных точек нечетких функции следует решить уравнения:

$$f(x)=0;\ m_L(\alpha,x)=0 \text{ и } m_R(\alpha,x)=0 \qquad (7.53)$$

и взять

$$\max_{x\in X}\widetilde{f}(\alpha,x)=max\left[f(x)+m_R(\alpha,x)\right] \qquad (7.54)$$

$$\min_{x\in X}\widetilde{f}(\alpha,x)=\min_{x\in X}\left[f(x)-m_L(\alpha,x)\right] \qquad (7.55)$$

Геометрический смысл экстремума нечеткой функции $\widetilde{\mathrm{f}}(\alpha,\mathrm{x})$ иллюстрируется на рис. 7.7.

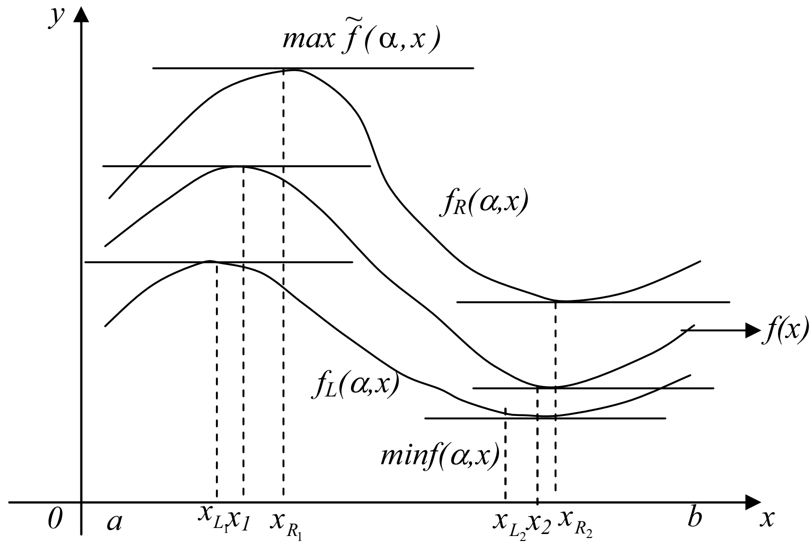


Рис.7.7

Пример 7.7. Найти максимум и минимум нечеткой функции с четкостью α=0,6, заданной в виде:

$\tilde{f}(x) = [1;3]x^3 - [3;5]x^2 + [-3;7]$

Имеем: $f_L(0;x) = x^3 - 5x^2 - 3$

$f_R(0;x) = 3x^3 - 3x^2 + 7$

Если нечеткие коэффициенты и свободный член есть нечеткие числа, имеющие одинаковые растяжения, то

$$f_L(1;x) = f_R(1;x) = f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2$$

Тогда

$$f_L(\alpha, x) = [2-(1-\alpha)]x^3 + [-4-(1-\alpha)]x^2 + [2-(1-\alpha)5]$$

$$f_R(\alpha, x) = [2+(1-\alpha)]x^3 + [-4+(1-\alpha)]x^2 + [2-(1-\alpha)]$$

Отсюда $\begin{array}{l} f_L(0{,}6;x) = 16x^3 + 4{,}4x^2 \\ f_R(0{,}6;x) = 2{,}4x^3 - 3{,}6x^2 + 4 \end{array}$

Используя необходимое и достаточное условие экстремума для $f_L(0{,}6;x), f_R(0{,}6;x)$ и $f(1;x)$, получим:

1) $f_L'(0{,}6,x) = 4{,}8x^2 - 8{,}8x = 0 \quad x_1 = 0;\ x_2 = \dfrac{11}{6}$

$f_L''(0{,}6;x) = 9{,}6x - 8{,}8 \qquad f_L''(0{,}6;0) = -8{,}8 < 0;\ f_L''\left(0{,}6;\dfrac{11}{6}\right) = 8{,}8 > 0$

$\max\limits_{x\in X} f_L(0{,}6;x) = f_L(0{,}6;0) = 0;$

$\min\limits_{x\in X} f_L(0{,}6;x) = f_L\left(0{,}6;\dfrac{11}{6}\right) = -4{,}92$

2) $\mathrm{f}_{\mathrm{R}}'(0{,}6;\mathrm{x}) = 7{,}2\mathrm{x}^2 - 7{,}2\mathrm{x} = 0;\ \mathrm{x}_1 = 0;\ \mathrm{x}_2 = 1$

$\mathrm{f}_{\mathrm{R}}''(0{,}6;\mathrm{x}) = 14{,}4\mathrm{x} - 7{,}2 \qquad \mathrm{f}_{\mathrm{LR}}''(0{,}6;0) = -7{,}2 < 0;\ \mathrm{f}_{\mathrm{R}}''(0{,}6;1) = 7{,}2 > 0$

$\max\limits_{x\in X} f_R(0{,}6;x) = f_R(0{,}6;0) = 4$

$\min\limits_{x\in X} f_R(0{,}6;x) = f_R(0{,}6;1) = 2{,}8$

Таким образом,

$\max\limits_{x\in X} \tilde{f}(0{,}6;x) = 4;\ \min\limits_{x\in X} \tilde{f}(0{,}6;x) = -4{,}92$

3) $\qquad f'(x) = 6x^2 - 8x = 0;\ x_1 = 0;\ x_2 = \dfrac{4}{3}$

$f''(x) = 12x - 8;\ \ f''(0) = -8 < 0;\ f''\left(\dfrac{4}{3}\right) = 8 > 0$

$\max\limits_{x\in X} f(x) = f(0) = 2;\ \min\limits_{x\in X} f(x) = -0{,}37$

Из вычислений видно, что для каждой из линий $f_L(\alpha, x)$, $f_R(\alpha, x)$ и $f(x)$ - стационарные точки, вообще говоря, различны.

Аналогичным способом, легко показать, что если $\tilde{f}(x) = \{f(x), m_L(x), m_R(x)\}$, то критические точки для $m_L(x)$ и $m_R(x)$ будут различны и будут отличаться от критических точек функции $f(x)$. Поэтому для нахождения экстремальных значений $\tilde{f}(\alpha; x)$ для $\forall\alpha \in (0;1)$ необходимо сначала функцию $\tilde{f}(\alpha; x)$ привести к виду $\tilde{f}(\alpha; x) = \{f_L(\alpha, x); f_R(\alpha, x)\}$ для конкретного (желаемого) значения $\alpha \in (0;1)$, а затем на основании (7.31) и (7.32) найти экстремальные значения нечеткой функции.

§5. Интегрирование нечетких функций

Из понятия неопределенного интеграла для четких функций следует, что операция интегрирования является обратной операцией операции дифференцирования, т.е. операции вычисления производной. Но, так как операция дифференцирования является четкой операцией, то и операция интегрирования есть четкая операция. Поэтому, первообразная нечеткой функции имеет ту же степень четкости, что и сама нечеткая функция. И если учесть, что определенный интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница, на основании которого определенный интеграл по [a, b] от четкой функции равен приращению первообразной на этом отрезке прямой, то степень четкости нечеткой величины (равной значению определенного интеграла нечеткой функции по четкому [a, b] равна степени четкости интегрируемой нечеткой функции. Если же нечеткая функция интегрируется по нечеткому интервалу, то степень четкости результата интегрирования будет (вообще говоря) меньше степени четкости интегрируемой функции.

Рассмотрим нечеткую функцию $\tilde{f}(\alpha, x), \alpha \in (0,1)$, четкого аргумента, непрерывного на [a, b].

Определение 7.18. Предел, к которому стремится интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}(\alpha, \bar{x}_i)\Delta x_i \text{, при } \max \Delta x_i \to 0$$

(где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, a = x_0, x_1, ..., x_n = b; \ \bar{x}_i \in [x_i; x_{i+1}]$), (если этот предел конечен для $\forall \alpha \in [0;1]$) будем называть определенным интегралом нечеткой функции $\tilde{f}(\alpha, x)$ по [a, b] и обозначим

$$J(\alpha) = \int_a^b \tilde{f}(\alpha, x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}(\alpha, \bar{x}_i)\Delta x_i \qquad (7.56)$$

Если: 1) $\tilde{f}(\alpha, x) = \{f_L(\alpha, x); \ f_R(\alpha, x)\}$, где $f_L(\alpha, x)$ и $f_R(\alpha, x)$, интегрируемые на [a, b] четкие функции, то

$$\int_a^b \tilde{f}(\alpha, x)dx = \left\{ \int_a^b f_L(\alpha, x)dx; \ \int_a^b f_R(\alpha, x)dx \right\} \qquad (7.57)$$

2) $\tilde{f}(\alpha, x) = \{f(x), \ m_L(\alpha, x); \ m_R(\alpha, x)\}$, где $f(x)$, $m_L(\alpha; x)$ и $m_R(\alpha; x)$ интегрируемые на [a, b] четкие функции, то

$$\int_a^b \tilde{f}(\alpha, x)dx = \left\{ \int_a^b f(\alpha, x)dx; \ \int_a^b m_L(\alpha, x)dx; \int_a^b m_R(\alpha, x)dx \right\} (7.58)$$

Также, как и для четких функций, для определенных интегралов от нечетких функций справедливы следующие свойства:

1) $\int_a^b \tilde{c}\tilde{f}(\alpha,x)dx = \tilde{c}\int_a^b \tilde{f}(\alpha,x)dx$, для $\forall\alpha \in (0;1)$

2) $\int_a^b \left[\tilde{f}_1(\alpha,x) \pm \tilde{f}_2(\alpha,x)\right]dx = \int_a^b f_1(\alpha,x) \pm = \int_a^b \tilde{f}_2(\alpha,x)dx$

3) $\int_a^b \tilde{f}(\alpha,x)dx = -\int_b^a \tilde{f}(\alpha,x)dx$

4) $\int_a^b \tilde{f}(\alpha,x)dx = 0$

5) Если на [a,b], (где a>b) нечеткие функции $\tilde{\mathrm{f}}(\alpha,\mathrm{x})$ и $\tilde{\mathrm{g}}(\alpha,\mathrm{x})$ для $\forall\alpha \in (0,1)$ удовлетворяют условию

$\tilde{f}(\alpha,x) \le \tilde{g}(\alpha,x)$, то $\int_a^b \tilde{f}(\alpha,x)dx \le \int_a^b \tilde{g}(\alpha,x)dx$

6) Если $\mathrm{m}(\alpha)$ и $\mathrm{M}(\alpha)$ - наименьшее и наибольшее значения функции $\tilde{\mathrm{f}}(\alpha,\mathrm{x})$ на [a,b] и a<b, то

$m(\alpha)(b-a) \le \int_a^b \tilde{f}(\alpha,x)dx \le M(\alpha)(b-a)$

7) Если нечеткая функция $\tilde{f}(\alpha,x), \alpha \in (0;1)$ непрерывна на отрезке [0,1], то на этом отрезке найдется такая точка $x=\xi$, что справедливо равенство:

$$\int_a^b \tilde{f}(\alpha,x)dx = \tilde{f}(\alpha,\xi)\cdot(b-a) \qquad (7.59)$$

Кроме этого, для вычисления определенного интеграла нечеткой функции справедлива формула Ньютона-Лейбница: для любого $\alpha \in (0;1)$

$$\int_a^b \widetilde{f}(\alpha,x)dx = \widetilde{F}(\alpha,x)\Big|_a^b = \widetilde{F}(\alpha,b) - \widetilde{F}(\alpha,a) \qquad (7.60)$$

При этом, если нечеткая функция задается в виде (7.4) или (7.5), то

$$\int_a^b \widetilde{f}(\alpha,x)dx = \left\{ \int_a^b f_L(\alpha,x)dx;\ \int_a^b f_R(\alpha,x)dx \right\} = \qquad (7.61)$$
$$= \{F_L(\alpha,b) - F_L(\alpha,a)\}$$

$$\int_a^b \widetilde{f}(\alpha,x)dx = \left\{ \int_a^b f(x)dx,\ \int_a^b m_L(\alpha,x)dx;\ \int_a^b m_R(\alpha,x)dx \right\} = \qquad (7.62)$$
$$= \{F(b) - F(a); M_L(\alpha,b) - M_L(\alpha,a); M_R(\alpha,b) - M_R(\alpha,a)\}$$

Следует отметить, что если $\widetilde{f}(\alpha,x)$ интегрируется по отрезку $[\widetilde{a}(\beta);\widetilde{b}(\beta)]$ (где $\widetilde{a}(\beta)$ и $\widetilde{b}(\beta)$ - нечеткие числа четкости $\beta \in (01)$), то значение $\widetilde{J} = \int_{a(\beta)}^{b} \widetilde{f}(\alpha,x)dx$ представляет собой величину (нечеткое число) четкости $\mu(\widetilde{J}) = \alpha \cdot \beta$.

С геометрической точки зрения это означает: определенный интеграл от нечеткой функции $\widetilde{f}(\alpha,x) > 0$, четкости $\alpha \in (0,1)$ по отрезку $[a(\beta);b(\beta)]$ численно равен площади криволинейной трапеции с основаниями $\widetilde{x} = \widetilde{a}(\beta); \widetilde{x} = \widetilde{b}(\beta)$ высотой, равной длине отрезка $[\widetilde{a}(\beta);\widetilde{b}(\beta)]$ и боковой стороной, описываемой нечеткой функцией $\widetilde{y} = \widetilde{f}(\alpha,x)$

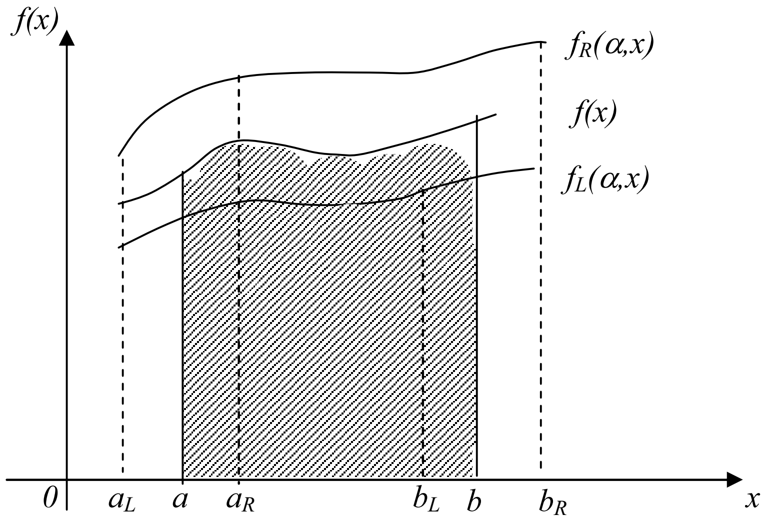


Рис.7.8

Пример 7.8.

$$\int_{\tilde a(\beta)}^{\tilde b(\beta)} \tilde f(\alpha, x)dx$$, где α=0,8; β=0,6

$[a;b]=[-1;2];\ \tilde f(x)=[-2;1]x^2-[3;5]$

Имеем: $f_L(0;x)=-2x^2-5;\quad f_R(0;x)=x^2-3$

$f_L(1;x)=f_R(1;x)=f(x)=-0{,}5x^2-4$

$f_L(\alpha;x)=[-0{,}5-(1-\alpha)1{,}5]x^2+[-4-(1-\alpha)]$

$f_R(\alpha,x)=[-0{,}5+(1-\alpha)1{,}5]x^2+[-4+(1-\alpha)]$

Тогда

$f_L(0{,}8;x)=-0{,}8x^2-4{,}2$

$f_R(0{,}8;x)=-0{,}2x^2-3{,}8$

$$J_L(0{,}8)=\int_{-1}^{2} f_L(0{,}8;x)dx=\int_{-1}^{2}(-0{,}8x^2-4{,}2)dx=\left(-\frac{0{,}8}{3}x^3-4{,}2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=$$
$$=\left(-\frac{6{,}4}{3}-8{,}4\right)-\left(\frac{0{,}8}{3}+4{,}2\right)=-1{,}5$$

$$J_R(0{,}8)=\int_{-1}^{2} f_R(0{,}8;x)dx=\int_{-1}^{2}(-0{,}2x^2-3{,}8)dx=$$
$$=\left(-\frac{0{,}2}{3}x^3-3{,}8x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=-1{,}2$$
$$J=J_L(1)=J_R(1)=\int_{-1}^{2}(-0{,}5x^2-4)dx=\left(-\frac{1}{6}x^3-4x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=-13{,}5$$

Таким образом,
$$\tilde{J}=\int_{-1}^{2}\tilde{f}(0{,}8x)dx=\{-1{,}5;-12\}=\{-13{,}5;1{,}5;1{,}5\}$$
Далее имеем:
$$\tilde{a}(\beta)=\tilde{a}(0{,}6)=-\tilde{1}(0{,}6)=\{-1{,}4;-0{,}6\}$$
$\tilde{b}(\beta)=\tilde{b}(0{,}6)=\tilde{2}(0{,}6)=\{1{,}6;2{,}4\}$. Тогда
$$J_L(a_L;b_L)=\int_{-1,4}^{1,6}(-0{,}8x^2-4{,}2)dx=\left(-\frac{0{,}8}{3}x^3-4{,}2x\right)\Bigg|_{-1,4}^{1,6}=-13{,}34$$
$$J_L(a_R b_R)=\int_{-0,6}^{2,4}(-0{,}8x^2-42)dx=\left(-\frac{0{,}8}{3}x^3-4{,}2x\right)\Bigg|_{-0,6}^{24}=-16{,}35$$

$$J_R(a_L,b_L)=\int_{-1,4}^{1,6}(-0{,}2x^2-38)dx=\left(-\frac{0{,}2}{3}x^3-3{,}8x\right)\Bigg|_{-1,4}^{1,6}=-11{,}86$$

$$J_R(a_R b_R) = \int_{-0,6}^{2,4}(-0,2x^2 - 3,8)dx = \left(-\frac{0,2}{3}x^3 - 3,8x\right)\Bigg|_{-0,6}^{2,4} = -12,4$$

Таким образом,

$$\widetilde{J}(0,8;0.6) = \widetilde{J}\left(f_{0,8},[-1/0,6;2/0,6]\right) =$$
$$= \{-16,35;-11,86\} = \{-13,5;2,85;1,64\}$$

Из рисунка 7.8. следует, что для более точного вычисление определенного интеграла от нечеткой функции $\widetilde{f}(\alpha, x)$ по нечеткому интервалу $[\widetilde{a}(\beta);\widetilde{b}(b)]$ необходимо (если $\widetilde{a}(\beta) < \widetilde{b}(\beta)$) вычислить

$J_L(a_R b_L)$ и $J_R(a_L b_R)$

Имеем:

$$J_L(a_R;b_L) = \int_{-0,6}^{1,6}\left(-0,8x^2 - 4,2\right)dx = \left(-\frac{4}{15}x^3 - 4,2x\right)\Bigg|_{-0,6}^{1,6} = -9,671$$

$$J_R(a_L;b_R) = \int_{-1,4}^{2,4}\left(-0,2x^2 - 3,8\right)dx = \left(-\frac{1}{15}x^3 - 3,8x\right)\Bigg|_{-1,4}^{2,4} = -15,611$$

Таким образом, ввиду того, что полученные результаты отрицательны, получаем:

$$\widetilde{J}(0,8;0,6) = \widetilde{J}(f_{0,8};-1/0,6;2/0,6) = \{-15,611;-9,671\} =$$
$$= \{-13,5;2,111;3,829\}$$

§6. Нечёткие меры и нечёткие интегралы

Во всех монографиях по нечётким множествам под понятием «нечёткая мера», принимается. Понятие нечёткой меры, приведённой [58, 62], т.е.

Пусть X – произвольное множество, а β - поле борелевских множеств (множества покрытий) (σ -алгебра) для X.

Определение 7.19. Функция $g(\cdot)$, определённая в виде $g:\beta \to [0;1]$ называется нечёткой мерой, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1)\ g(\varnothing)=0 \\ 2)\ g(X)=1 \end{array}\right\} \quad \text{(ограниченность)} \\ 3)\ \text{если } A,\ B\in\beta \text{ и } A\subset B, \text{ то } g(A)\le g(B) \text{(монотонность)} \\ 4)\ \text{Если } A_n\in\beta \text{ является монотонной последовательностью,} \\ \text{то } \lim\limits_{n\to\infty} g(A_n) = g(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) \text{ (непрерывность)} \end{array}\right\} \quad (7.63)$$

Но по сути дела чёткая функция множества $g(\cdot)$ определяет неаддитивную чёткую меру (квазимеру) на обычном множестве X.

Если сравнить определение 7.19 с определением меры в [64], то заметим, что эти определения различаются тем, что числовая функция $g(\cdot):\beta \to [0;1]$ заменена на числовую функцию $g(\cdot):\beta \to R$, где R – действительное числовое множество.

Если X – конечное множество, очевидно, можно сравнивать $\mathrm{P}(\{x\})$ с $\mu_A(x)$:

$$\sum_{x\in X} \mathrm{P}(\{x\}) = 1 \text{ и } \sum_{x\in X} \mu_A(x) \ne 1.$$

В случае, когда $X \subset R$, приходится сталкиваться со следующими трудностями.

Для $(a,b] \subset R$, $P(a \le x < b) = \int_a^b P(x)dx$,

где P*(x)* – плотность вероятности. При этом, очевидно, что $\forall x \in R : P(\{x\}) \ne 0$, когда $P(x) \ne 0$.

Нетрудно увидеть, что понятие плотности вероятности и функция принадлежности сравнимы. В то время, как вероятностная мера является шкалой для измерения неопределенности типа случайности, а нечеткое множество [58-63] являются субъективными шкалами для нечеткости.

С другой стороны, если учесть, что мерой (обычной чёткой мерой) отрезка на прямой равна его длине (является мера множества Лебега), то для нечёткого интервала (нечёткого отрезка прямой) – его длина является нечёткой величиной (нечётким числом).

Всвязи с выше изложенным под понятием нечёткой меры, в общем случае, следует придерживаться следующего понятия:

Определение 7.20. Нечёткозначная числовая функция $g: A \to R$ (где R – нечёткое подмножество числового множества *R*) называется *нечёткой мерой,* если:

1° $g(A) \ge 0$ для любого $A \in A$, $g(\varnothing) = 0$;

2° $g\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g(A_n)$, где $A_n \in A$, $(n=1,2,...,)$

3° если $A_i, A_j \in A$ и $A_i \subset A_j$, то $g(A_i) \le g(A_j)$ (монотонность);

4° если $A_n \in A$ является монотонной последовательностью, то $\lim_{n\to\infty} g(A_n) = g(\lim_{n\to\infty} A_n)$ (непрерывность).

Из введенного определения нечёткой меры следует, что если A есть нечёткое множество, то $g(\cdot)$, вообще говоря, есть чёткая функция, в противном случае $g(\cdot)$ - нечёткая функция.

С другой стороны, учитывая, что любые два нечётких подмножества, содержащие одни и те же элементы одного и того же универсального множества X с различными степенями чёткости, отличаются друг от друга степенью (уровнем) нечёткости, то мера нечёткого множества зависит от значений уровня нечёткости данного нечёткого множества.

Кроме того, сравнивая (3°, 7.20) и (3, 7.63) убеждаемся в том, что нечёткая мера (мера нечёткого множества) является однопараметрическим расширением обычной чёткой меры (меры чёткого множества).

Всвязи с изложенным, при определении нечёткой меры следует конкретизировать с какой степенью чёткости определяется нечёткая мера.

Определение 7.21. Нечёткозначная числовая функция $g_\alpha : A_\alpha \to R$ называется нечёткой мерой α-уровня (где $\alpha \in (0;1)$), если:

$$\left.\begin{array}{l}
1'.\ g_\alpha(A) \geq 0 \text{ для любого } A \in A_\alpha;\ g_\alpha(\varnothing) = 0; \\
2'.\ g_\alpha\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_\alpha(A_n), \text{ где } A_n \in A_\alpha,\ (n=1,2,..), \\
A_i \cap A_j = \varnothing, \text{ при } i \neq j; \\
3'.\ \text{Если } A_i, A_j \in A_\alpha \text{ и } A_i \subset A_j, \text{ то } g_\alpha(A) \leq g_\alpha(A_j) \\
\text{монотонность.} \\
4'.\ \text{Если } \{A_n\} \in A_n \text{ - монотонная} \\
\text{последовательность, то } \lim\limits_{n\to\infty} g_\alpha(A_n) = g_\alpha\left(\lim\limits_{n\to\infty} A_n\right)
\end{array}\right\} \quad (7.65)$$

В силу (3.7) и 3′ следует, что

$$g_{\alpha_1}(A) \leq g_{\alpha_2}(A) \text{ для } \forall \alpha_1, \alpha_2 \in (0;1] \text{ при } \alpha_1 \leq \alpha_2 \quad (7.66)$$

Следует отметить, что в общем случае как для чёткой, так и для нечёткой меры условие аддитивности не выполняется, т.е.: $g_\alpha(A \bigcup B) \neq g_\alpha(A) + g_\alpha(B)$ для $\forall \alpha \in (0;1]$ влечёт за собой

$$\left.\begin{array}{l} \forall A, \beta \in A_\alpha : g_\alpha(A \bigcup \beta) \geq \max(g_\alpha(A), g_\alpha(\beta)) \\ \forall A, \beta \in A_\alpha : g_\alpha(A \bigcap \beta) \leq \min(g_\alpha(A), g_\alpha(\beta)) \end{array}\right\} \qquad (7.67)$$

При решении практических задач моделирования с использованием аппарата теории нечётких мер, для управления вычислительных алгоритмов на ЭВМ, удобно аппроксимировать нечёткие меры. Для этой цели (§2, гл.I). В частности,

$$g_\alpha([a,b]) = \begin{cases} b_L(\alpha) - a_L(\alpha) \\ b_R(\alpha) - a_R(\alpha) \end{cases} \qquad (7.68)$$

Если при этом $\alpha=1$, то нечёткая мера (6.48) совпадает с чёткой мерой по Лебегу.
Основные свойства нечётких мер рассмотрим на примере метрики Сугено (6.43). Для построения нечётких мер в [58], [62] используются следующие λ-правила. Пусть A, $B \in \beta$; $A \bigcap B = \varnothing$.
Тогда

$$g_\lambda(A \bigcup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B) \qquad (7.69)$$

В случае $A \bigcup B = X$ условие (6.49) будем называть условием нормировки для g_λ мер. Очевидно, что если

$\overline{A} = X^\lambda \setminus A,\ A \in \beta$, то из (6.49) следует

$$g_\lambda(\overline{A}) = \frac{1 - g_\lambda(A)}{1 + \lambda g_\lambda(A)} \qquad (7.70)$$

Формула (7.70) определяет класс λ-дополнений Сугено [61].

При $\lambda>0$ имеем класс супераддитивных мер, а при $-1 < \lambda < 0$ получаем класс субаддитивных мер.

В общем случае, когда A и B – произвольные непересекающиеся подмножества множества X, т.е. $A,B \in \beta$, $A \cap B = \varnothing$ выражение (6.49) принимает вид.

$$g_\lambda(A \cup B) = \frac{g_\lambda(A) + g_\lambda(B) - g_\lambda(A \cap B) + \lambda g_\lambda(A) g_\lambda(B)}{1 + \lambda g_\lambda(A \cap B)} \quad (7.71)$$

Если $X=\beta$, то g_λ-меру можно построить непрерывной функции $h(x)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. если $x \le y$, то $h(x) \le h(y)$, $\forall x, y \in \beta$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 1$

Функция h –называется нечёткой функцией распределения.

Таким образом, нечёткую меру на $(R\beta)$ можно построить в виде:

$$g_\lambda([a;b]) = \frac{h(b) - h(a)}{1 + \lambda h(a)} \quad (7.72)$$

Следует отметить, что выражение $g(A)$ представляет собой меру, характеризующую степень нечёткости A, т.е. оценку нечёткости суждений «$X \in A$».

Все нечёткие меры можно разделить на два класса: супераддитивные и субаддитивные.

I. Супераддитивные меры

1) Функция доверия.

Определение 7.22. Мера, удовлетворяющая следующим условиям, называется функцией доверия: [65]:

$$\left.\begin{aligned} &1.\ b(\varnothing)=0;\ b(x)=1;\ \forall A\in\beta;\ 0\le b(A)\le 1 \\ &2.\ \forall A_1,\ldots,A_n\in\beta: b\left(A_1\cup\ldots\cup A_n\right)\ge\sum_{i=1}^{n}b(A_i)- \\ &\quad -\sum_{i<j}b\left(A_i\cap A_j\right)+(-1)^{n+1}b\left(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\right) \end{aligned}\right\} \qquad (7.73)$$

Следует отметить, что при $|\beta|=2$, имеем:

$$\forall A,B\in\beta: b\left(A\cup B\right)\ge b(A)+b(B)-b(A\cap B)$$

В [66; 67] приведены другие определения этой меры.

2) Согласованная функция доверия.

Понятие согласованной функции доверия базируется на определении ядра $C=\{B\subset X|m(B)>0\}$ полностью упорядоченного по вложенности. Поэтому любая функция носителя является согласованной функцией доверия. В [65] согласованная функция доверия определяется с помощью следующих аксиом:

1) $b(\varnothing)=0;\ b(X)=1$

2) $b\left(A\cap B\right)=\min\left(b(A),b(B)\right);\ \forall A\in\beta$

При этом

$$\min\left(b(A),B(\overline{A})\right)=0;\ \forall b,\exists B;\ b\left(A\cup B\right)>\max\left(b(A),b(B)\right)$$

II. Субаддитивные меры. К ним относятся мера правдоподобия, мера возможности, мера вероятности и другие.

Определение 7.23. Если $b(\cdot)$ есть функция уверенности, то мера правдоподобия множества A из X определяется в [65] как

$$DI(A) = 1 - b(\overline{A}) \tag{7.74}$$

Мера правдоподобия удовлетворяет следующим аксиомам:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\; PI(\quad) = 0;\; PI(X) = 1 \\ 2)\;\; \forall A_1,\ldots,A_n \in X;\; PI\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) \\ \quad \le \sum\limits_{i=1}^{n} PI\left(A_i\right) - \sum\limits_{i<j} PI(A_i \cup A_j) + \ldots + \\ \quad\; + \left(-1\right)^{n+1} PI\left(A_1 \cup \ldots \cup A_n\right) \end{array}\right\} \tag{7.75}$$

В [67] приведён иной способ определения функции правдоподобия.

Определение 7.24. Если $m(\cdot)$ есть нечёткая мера, удовлетворяющая свойствам:

$$m(\varnothing) = 0;\; \sum_{A \in \beta} m(A) = 1 \text{ (полное доверие), тогда}$$

$$\forall A \in \beta : PI(A) = \sum_{B \cap A \neq \varnothing} m(B) \tag{7.76}$$

является мерой правдоподобия.

Меры правдоподобия называют также верхними вероятностями. [68]

Очевидно, что эти два определения эквивалентны.

Справедливо утверждение: если $g_1(\cdot)$ и $g_2(\cdot)$ две меры такие, что $\forall A \in \beta : g_1(A) + g_2(\overline{A}) = 1$, то g_1 является функцией доверия тогда и только тогда, когда g_2 - есть мера правдоподобия.

Определение 7.25. Мерой возможности [69] называется функция П:β→[0,1], удовлетворяющая следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \Pi(\varnothing)=0;\ \Pi(X)=1 \\ 2)\ \forall i \in N, A_i \subset X, \prod\left(\bigcup\limits_{i\in N} A_i\right) = \underset{i\in N}{sub}\prod\left(A_i\right) \end{array}\right\} \quad (7.77)$$

N - множество натуральных чисел.

Мера возможности может быть построена с помощью распределения возможности π(x), являющейся функцией π:[0;1] такой,что $\underset{x\in X}{sur}\,\pi(x)=1$. Нетрудно увидеть, что $\forall A \in \beta : \prod(A) = \underset{x\in A}{sur}\,\pi(x)$. Очевидно, что для счётного множества $\pi(x)=\prod(x)$.

Любая мера возможности является нечёткой мерой тогда и только тогда, когда существует функция распределения f такая, что $\underset{x\in X}{sur}\, f(x)=1$.

Если $g_1(A)+g_2(\overline{A})=1$ и $g_1(\cdot)$ - согласованная функция доверия, то $g_2(\cdot)$ -есть мера возможности.

Определение 7.26. Нечёткая мера g=P называется вероятностной мерой*,* если:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \forall A \in \beta;\ P(A)\in[0;1];\ P(\varnothing)=0; P(X)=1 \\ 2)\ \forall i \in N; A_i \in \beta \text{ и } \forall i \neq j : A_i \bigcap A_j = \varnothing, \text{ то} \\ \qquad P\left(\bigcup\limits_{i\in N} A_i\right) = \sum\limits_{i\in N} P(A_i) \end{array}\right\} \quad (7.78)$$

Вероятностная мера является частным случаем меры правдоподобия (λ=0).

Определение 7.27. Нечёткая меры g называется g_γ-мерой, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l}
1)\ g_\nu(X)=1;\ g_\nu(\varnothing)=0 \\
2)\ \forall i\in N;\ A\in\beta \text{ и } \forall i\neq j;\ A_i\bigcap A_j=\varnothing \\
g_\nu\left(\bigcup\limits_{i\in N}A_i\right)=(1-\nu)\bigvee\limits_{i\in N}g_\nu(A_i)+\nu\sum\limits_{i\in N}g_\nu(A_i) \\
\\
\text{где } \nu>0; \\
3)\ \forall A,B\in\beta \text{ и } A\subseteq B,\ g_\nu(A)\leq g_\nu(B)
\end{array}\right\}\qquad(7.79)$$

Отметим, что g_ν - мера является расширением мер**ы** Цукамото [62], для которой $\nu\in[0,1]$. Очевидно, что при ν=0 g_ν- мера становится мерой возможности, а при ν=1 – вероятностной мерой. Если ν> 1, то g_ν -мера описывает неопределённость, отличающуюся по своим свойствам от вероятности или возможности.

В случае счётного множества X условие нормировки для g_ν- меры имеет вид:

$$g_\nu(X)=(1-\nu)\bigvee_{i\in N}g_\nu+\nu\sum_{i\in N}g_i=1\qquad(7.80)$$

где $g_i=g_\nu(\{x_i\})$ для $\forall x\in X$, $\forall i\in N$.

Решение многих задач нахождения значения g_ν-меры для случая множества действительны чисел на много упрощается, если применить аппроксимации с помощью функций *(S-L)* типа.

Определение 7.28. Функция *SL(·)* называется функцией *(S-L)* типа, тогда и только тогда, когда

$$\forall x \in R^{+} : SL(-x) = SL(x);\ SL(0) = S,\ S \in [0;1],$$

причём $SL(\cdot)$- монотонно убывает на R^{+}.

Например, $SL(x) = S\max\left(0;1-|x|^{P}\right)$;

$SL(x) = Sep\left(-|x|^{P}\right),\ P \geq 1$

Определение 7.29. Нечёткая плотностью SL-типа называется нечёткая плотность $g' : X \to [0;1]$ такая, что

$$g'(x) = \begin{cases} SL'\left(\dfrac{a'-x}{m_L}\right) \text{ при } x \leq a';\ m_L \geq 0 \\ SL''\left(\dfrac{x-a''}{m_R}\right) \text{ при } x > a'';\ m_R \geq 0 \\ S, \qquad \text{если } x \in [a';a''] \subset \Re \end{cases} \qquad (7.81)$$

где m_R, m_L –правый и левый растяжения, L', L'' - функции *(L-R)*-типа.

Очевидно, что если $L' = L'' = L$, то

$$g'(x) = SL\left(\frac{a'-x}{m_L} \vee \frac{x-a''}{m_R} \vee 0\right) = L(a(x))$$

Можно показать, что $\forall [a,b] \subset X \subset \Re$

$$g_{\nu}([a;b]) = \underset{x\in[a,b]}{sur}\, g'(x)(1-\nu) + \nu \int_a^b g'(x)dx =$$

$$S\left((1-\nu)L\left(\inf_{x\in[a,b]}\left(\frac{a'-x}{m_L} \vee \frac{x-a''}{m_R} \vee 0\right)\right) + \nu \tilde{L}_a^b\right)$$

где

$$\widetilde{L}_a^b = \int_a^b L\left(\left(a' - x\right)/m_L \vee \left(x - a''\right)/m_R \vee 0\right)dx$$

Нетрудно увидеть, что

$$\inf\left(\frac{a' - x}{m_L} \vee \frac{x - a''}{m_R} \vee 0\right) = \begin{cases} 0, \text{если } \left[a', a''\right] \bigcap [a, b] \neq \varnothing \\ \dfrac{a' - b}{m_L}, \text{если } b \leq a' \\ \dfrac{a - a''}{m_R}, \text{если } a \geq a'' \end{cases} \qquad (7.82)$$

Параметр нормировки g_γ-меры ν может быть найден из условия (7.82) по формуле:

$$\nu = \left(1 - \bigvee_{i=1}^{n} g_i'\right) \bigg/ \left(\sum_{i=1}^{n} g_i' - \bigvee_{i=1}^{n} g_i'\right) \qquad (7.83)$$

Параметр S определяется как:

$$S = \arg \underset{x \in X}{sur}\, g_\nu'\left(\{x\}\right) \qquad (7.84)$$

При этом, если предположить, что нечёткая мера на элементарном подмножестве равна значению нечёткой плотности в точке, принадлежащей этому подмножеству, т.е. $g_\nu(\Delta_i) \approx g_\nu'\left(\{x\}\right)$, где $g_\nu(\Delta_i)$-нечёткая мера, в случае (S-L)- аппроксимации получим:

$$g_\nu(\Delta_i) = S\left((1 - \nu) \underset{x \in X}{sur}\, L(a(x)) + \nu \int_{\Delta i} L(a(x_i))dx\right) \qquad (7.85)$$

В простейшем случае оценивание параметров (*S*-*L*)-функции следует производить, используя функционал вида:

$$h = \left(\sum_{x_i \in X} \left(SL\left(a(x_i)\right) - g_i'\left(\{x_i\}\right) \right)^2 \right)^{1/2} \qquad (7.86)$$

Рассмотренные методы аппроксимации позволяют упростить процедуры вычисления нечётких мер при определении значений нечётких интегралов в различных алгоритмах.

Определение 7.30. нечётким интегралом от функции $h : X \to [0;1]$ на множестве $A \subset X$ по нечёткой мере *g* будем называть

$$\int_A h(x) \circ g = \sup_{\alpha \in [0;1]} \left(\alpha \wedge g\left(A \cap H_\alpha\right) \right) \qquad (7.87)$$

где $H_\alpha = \{x / h(x) \geq \alpha\}$ [58-61].

Если $\Im(X)$ - множество нечётких подмножеств универсального множества *X*, а понятие нечёткого подмножества включает в себя понятие чёткого подмножества, то $\Im(X)$ является нечётким расширением β; $\Im(X) \supset \beta$.

Определение 7.31. Функция множества $\tilde{g}$, определяется в виде:

$$\tilde{g}(A) = \wp_A \mu_A \circ g \qquad (7.88)$$

для $A = \{(x, \mu_A(x))\}$, $\mu_A \in \Im(X)$ называется расширением *g* на $\Im(X)$.

Определение 7.32. Нечётким интегралом от функции $h: X \to [0;1]$ на нечётком множестве $\mu_A \in \Im(X)$ по нечёткой мере g будем называть:

$$\int_A h(x) \circ g = \int_A \left(\mu_A(x) h(x)\right) \circ g \qquad (7.89)$$

Отметим, что для описания различных видов неопределённостей в теории нечётких мер используется общее понятие «степень нечёткости», которое включает в себя «степень важности», «степень уверенности» и «степень принадлежности» в теории нечёткого множества. Если степень принадлежности $x_0 \in E$ равна $g(x_0, E)$, а вместо E взято нечёткое подмножество $\mu_A \in \Im(X)$, то

$$g(x_0, A) = \int_X \mu_A(x) \circ g(x_0, \bullet) = \mu_A(x_0)$$

Отметим основные свойства нечётких интегралов [58-61]. Пусть $\alpha \in [0;1], (E, F) \subseteq X$. Тогда, если $h: X \to [0;1]$, то

$$\int_E (\alpha \vee h) \circ g = \alpha \vee \int_E h \circ g$$

$$\int_E (\alpha \wedge h) \circ g = \alpha \wedge \int_E h \circ g$$

$$\int_E (h_1 \wedge h_2) \circ g \le \int_E h_1 \circ g \int_E h_2 \circ g$$

$$\int_E (h_1 \vee h_2) \circ g \ge \int_E h_1 \circ g \bigvee \int_E h_2 \circ g$$

$$\int_{E \cup F} h \circ g \ge \int_E h \circ g \bigvee \int_F h \circ g$$

$$\int_{E \cap F} h \circ g \leq \int_{E} h \circ g \wedge \int_{F} h \circ g$$

Кроме того,

$$\int_{A} h \circ g = M$$

тогда и только тогда, когда $g(A \cap F_M) \geq M \geq g(A \cap F_{M+0})$, где $F_M = \{x / h \geq M\}$ и $F_{M+0} = \{x / h > M\}$

Легко показать, что понятие нечёткого интеграла сходно с понятием интеграла Лебега. Для этого рассмотрим разбиение множества X на непересекающиеся подмножества E_i:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \varnothing E_i \cap E_j \neq \quad , i \neq j .$$

Пусть $h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{E_i}(x)$, где $\alpha \in [0;1], E_i \in \beta$, а f_{E_i} - характеристическая функция множества E_i:

Пусть l – есть мера Лебега. Интеграл Лебега то функции h по множеству A определяется как

$$\int_{A} hdl = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l(A \cap E_i) \qquad (7.91)$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_n$. Пусть $F_i = E_i \cup E_{i+1} \cup ... \cup E_n$.

Тогда определяя $h(x) = \max_{i=1,n} \min(\alpha_i, f_{F_i}(x))$, получим следующее выражение для нечёткого множества:

$$\int_{A} h(x) g(\cdot) = \max_{i=1,n} \min(\alpha_i g(A \cap F_i)) \qquad (7.92)$$

В заключении приведём экспериментальное определение нечёткой меры [70]. Пусть существует «m» объектов и пусть $h_j : K \to [0;1]$ - оценка j-го объекта, а l_j –

общая оценка, получаемая из (5.8), (5.9), либо аналогичных операций над нечёткими числами. Предъявляя индивиду объекты и их частные оценки, можно получить его субъективные оценки «d_j» из [0;1] для всех объектов. Обозначим $\bar{l} = \max\{l_j\}; \underline{l} = \min\{l_j\}$ и аналогично $\bar{d}$ и $\underline{d}$.

Проводя нормализацию $l_j \forall j \in \left(\overline{1,m}\right)$, имеем:

$$W_j = \frac{\bar{d} - d}{\bar{l} - \underline{l}} l_j + \frac{d\bar{l} - \bar{d}\underline{l}}{\bar{l} - \underline{l}}$$

Субъективная нечёткая мера может быть получена при условии минимума критерия

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(d_j - w_j\right)^2} \qquad (7.94)$$

ГЛАВА VIII. НЕЧЕТКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Нечеткие линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 8.1 Нечетким дифференциальным уравнением будем называть дифференциальное уравнение, хотя бы один из коэффициентов которого есть нечеткая функция, либо нечеткое число.

Так как понятие нечеткого диффреенциального уравнения ен связано не с его порядком, не с его линейностью и не с ее однородностью, то все основные понятия (различных видов решений дифференциальных уравнений с четкими коэффициентами) справделивы для дифференциальных уравнений с нечеткими коэффициентами. При этом их решения являются нечеткими функциями, либо семейством нечетких функций.

Следует отметить, что так как решение нечеткого уравнения есть нечеткая функция, то и начальные условия, при которых ищется частное решение, являются нечеткими величинами.

Для конкретности приведем все основные понятия для нечеткого дифференциального уравнения первого порядка.

Определение 7.2. Диффреницальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{f}(x,y) \tag{8.1}$$

будем называть нечетким дифференциальным уравеннием первого порядка, если $\tilde{f}(x,y)$ есть нечеткая функция.

Определение 8.3. Нечеткую функцию $\tilde{\varphi}(x,y)$, зависящая от переменной дифференцирования и произвольной постоянной $\tilde{C}$ (четкой либо нечеткой) будем называть общим решением уравнения (7.1), если:

1) если она удоалетворяет данному уравнениею при любых значениях $\tilde{c}$;

2) Каково бы ни было начальное условие

$$\tilde{y}|_{x=x_0} = \tilde{y}_0$$

(8.2)

всегда можно найти такое значение $\tilde{c} = \tilde{c_0}$, что функция $\tilde{y} = \tilde{\varphi}(x, \tilde{c}_0)$ удовлетворяло начальному условию

Определение 8.4. Частным нечетким решением уравнения (8.1), удовлетворяющего начальному условию (8.2) будем называть нечеткую функцию $\tilde{y} = \tilde{\varphi}(x)$

которая удовлетворяет уравнению (8.1) и входит в семейство общего решения этого уравнения, т.е. существует такое нечеткое значение нечеткой постоянной $\tilde{c}$, что

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x, \tilde{c}_0)$$

Аналогично можно ввести поянтие особого нечеткого решения уравенния (8.1).

Как и в случае четких линейных дифференциальных уравнений, нечеткие линейные дифференциальные уравнения n-го порядка можно выразить в виде:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}} = \tilde{f}(x) \tag{8.3}$$

где a_k могут быть как постоянные (нечеткие числа), так и переменные (нечеткие величины);

$\tilde{f}(x)$ - может быть как четкой, так и нечеткой функцией.

Отметим, что все методы решения различных типов обыкновенных дифференциальных уравнений с четкими коэффициентами справедливы и для аналогичных дифференциальных уравнений с нечеткими коэффициентами.

Для применения известных методов решения дифференицальных уравнений с четкими коэффициентами к решению уравнений с нечеткими коэффициентами той же структуры наиболее удобным (так же и при решении нечетких алгебраических уравнений) является сведение эитх уравнений к интервальным дифференциальным уравнениям.

Проиллюстрируем решение нечетких линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядкы на конкретных примерах.

Пример 8.1

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{2}y + \tilde{6};\ \tilde{y}|_{x=0} = \{4;0,2;0,1\}$$

$$\tilde{2} = \{2;0,1;0,2\}\tilde{6} = \{6;0,2;0,1\}$$

Пусть $\tilde{y} = \{y_L; y_R\}$. Тогда на основания правила деления нечетких чисел (1.46) имеем:

$$\frac{\tilde{6}}{\tilde{2}} = \frac{\{6;0,2;0,1\}}{\{2;0,1;0,2\}} = \{3;0,227;0,053\}$$. Тогда имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_L}{dx} = 1,9(y_L + 2,773)y_L|_{x=0} = 3,8 \\ \dfrac{dy_R}{dx} = 2,2(y_{RL} + 3,053)y_R|_{x=0} = 4,1 \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} y_L = C_L e^{1,9x} - 2,773 \\ C_L = 6,573 \end{cases}$$,тогда $$\begin{cases} y_R = C_R e^{2,2x} - 3,053 \\ C_R = 7,153 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_L = 6,573e^{1,9x} - 2,773 \\ y_R = 7,153e^{2,2x} - 3,053 \end{cases}$$

Легко показать, что для $\forall \alpha \in [0,1], y_L \leq y_R$.

Для случая задачи оши для уравнения с четкими коэффициентами и четким начальным условием:

$$\frac{dy}{dx} = 2y + 6; y|_{x=0} = 4$$

$$y = Ce^{2x} - 3; c = 7; y = 7e^{2x} - 3$$

При этом для любого α-уровня имеем:

$$\tilde{y}(\alpha, x) = \{y_L(\alpha, x); y_R(\alpha, x),\} =$$

$$= \{[7 - (1 - \alpha),427]e^{[2-(1-\alpha),1]x} -$$

$$-[3 - (1 - \alpha),227]; [7 + (1 - \alpha)153]e^{[2+(1-\alpha),0,2]x} -$$

$$-[3 + 1 - \alpha)0,053\}$$

Докажем, что для $\forall \alpha \in [0,1], y_L(\alpha, x) < y_R(\alpha, x)$ имеем:

$\frac{dy_L(\alpha,x)}{dx} =$

$= [7-(1-\alpha)0{,}427][2-(1-\alpha)0{,}1]e^{[2-(1-\alpha)0{,}1]x} > 0$

$= [7-(1-\alpha)0{,}427][2-(1-\alpha)0{,}1]e^{[2-(1-\alpha)0{,}1]x} > 0$

$\frac{dy_R(\alpha,x)}{dx} =$

$= [7+(1-\alpha)0{,}1][2+(1-\alpha)0{,}2]e^{[2-(1-\alpha)0{,}1]x} > 0$

для любых x∈(-∞;∞) и [0,1]. Поэтому

$y_L(\alpha,x)$ *и* $y_R(\alpha,x)$, возрастающие функции. Но так как

$\frac{dy_L(\alpha,x)}{dx} < \frac{dy_R(\alpha,x)}{dx}$ и $y_L(\alpha,x) < y_R(\alpha,0)$ для $\forall[0,1]$, то

$y_L(\alpha,x) < y_R(\alpha,0)$ на [0,1] и лишь $y_L(1,x) = y_R(1,x)$/

В частности, для α=0,8, имеем:

$\tilde{y}(0{,}8;x) = \{6{,}914\,e^{1{,}98x} - 2{,}956; 7{,}031e^{2{,}04} - 3{,}011\}$

Отметим, что учитывая теорему о возрастании и убывании функций одной переменной, легко доказать, что относительно параметра α∈[0,1] функция $y_L[\alpha,x]$ монотонно убывает. Кроме этого, если *y(x)* – возрастающая функция, то и функции $y_L(\alpha,x)$ и $y_R[\alpha,x]$ для любого α∈[0,1] – возрастающие функции и наоборот.

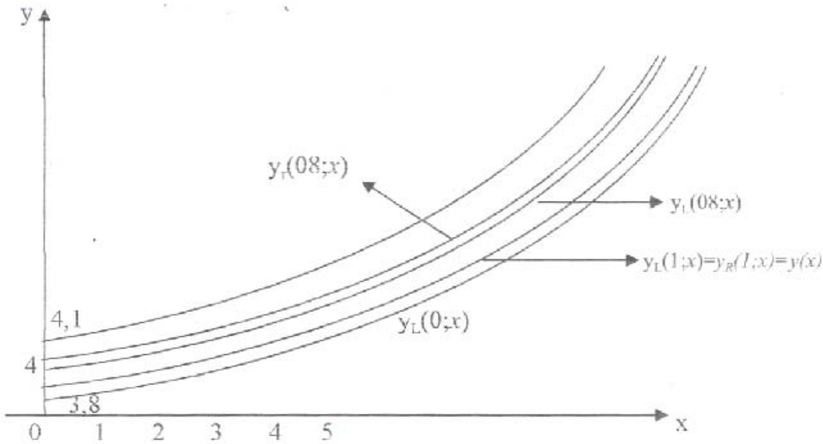


Рис.8.1

Наконец, для любого конечного n

$$\frac{d^n\tilde{y}(\alpha,x)}{dx^n}=\frac{d^n}{dx^n}\{y_L(\alpha,x);y_R(\alpha,x)\}=$$

$$=\left\{\frac{d^ny_L(\alpha,x)}{dx^n};\frac{d^ny_R(\alpha,x)}{dx^n}\right\},\text{если}\qquad \frac{d^ny}{dx^n}>0$$

$$=\left\{\frac{d^ny_R(\alpha,x)}{dx^n};\frac{d^ny_L(\alpha,x)}{dx^n}\right\},\text{если}\qquad \frac{d^ny}{dx^n}<0$$

Таким образом, для решения нечетких линейных дифференциальных управлений можно воспользоваться одним из следующих способов:

I. Составить и решить четкое дифференциальное уравнение, соответствующее данному нечеткому дифференциальному уравнению.

II. Представить нечеткое дифференциальное уравнение и нечеткие начальные условия в интервальной форме и решив полученую задачу найти решение поставленной задачи в виде функций (L-R)-типа для любого $\alpha\in[0,1]$.

III. Решить соответсвующее четкое дифференциальное уравнение с четкими начальными условиями:

3) Подставить в найденную четкую функцию (решение четкой задачи) вместо четких коэффициентов $\{a_n\}$ заданные соответствующие нечеткие коэффициенты $\{\tilde{a}_n\}$ и получить нечеткую функцию, являющуюся решением заданонго нечеткого уравнения с нечеткими начальными условиями для любых $\alpha\in[0,1]$. При этом при необходимости полученное нечеткое решение можно представить в интервальной форме.

Пример 7.2

$$y'' - \{5;0,2;0,3\}y' - \{6;0,2;0,1\}y = \{2;0,2;0,1\}x - \{3;0,2;0,3\}$$

$$\tilde{y}\Big|_{x=0} = \{2;0,2;0,1\}\tilde{y}\Big|_{x=0} = 0$$

Решение:

1.1. Решим четкую задачу Коши.

$$y'' - 5y' - 6y = 2x - 3; \quad y\Big|_{x=0} = 2; \; y'\Big|_{x=0} = 0$$

$$k^2 - 5k - 6 = 0; \; k_1 = 6; \; k_2 = -1$$

$$\bar{y} = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-x}; \; y^* = Ax + B$$

Проведя элементарные подсчеты и учитывая начальные условия, получаем:

$$y = 0{,}22e^{6x} + 1{,}01e^{-x} - 0{,}33x + 0{,}77$$

Представим нечеткую задачу Коши в интервальной форме и найдем ее решение

$$\begin{cases} y'' - 5{,}2y' - 6{,}2y = 18x - 3{,}3 & y\Big|_{x=0} = 2{,}1; \quad y'\Big|_{x=0} = 0 \\ y'' - 4{,}7y' - 5{,}9y = 2{,}1x - 28 & y\Big|_{x=0} = 1{,}8; \quad y'\Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^2 - 5{,}2k - 6{,}2 = 0 \\ k^2 - 4{,}7k - 5{,}9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 6{,}37; \; k_2 = 0{,}97 \\ k_1 = 5{,}73; \; k_2 = 1{,}03 \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, находим решение задачи в интервальной форме:

$$\widetilde{y} = \begin{cases} y_R = 0{,}37e^{6{,}37} + 1{,}1e^{-0{,}89x} - 0{,}29x + 0{,}775 \\ y_R = 0{,}13e^{5{,}73x} + 1{,}08e^{-1{,}03x} - 0{,}356x + 0{,}589 \end{cases}$$

II. $y'' - 5y' - 6y = 2x - 3; \quad y\big|_{x=0} = 2; \;\; y'\big|_{x=0} = 0$

$y = 0{,}22e^{6x} + 1{,}01e^{-x} - 0{,}33x + 0{,}77$

Учитывая правило действий над нечеткими числами, имеем:

$\tilde{7} = \tilde{6} + \tilde{1} = \{7; 0{,}5; 0{,}4\}$

$\tilde{9} = \tilde{3} \cdot \tilde{3} = \{9; 1{,}71; 1{,}71\}$

$\widetilde{0{,}77} = \tilde{7} : \tilde{9} = \{0{,}77; 0.234\}$

$\widetilde{0{,}22} = (\widetilde{0{,}77} - \widetilde{0{,}33}) : 2 = \{0{,}22;\ 1{,}004; 0{,}972\}$

Следовательно,

$$\widetilde{y} = \begin{cases} y_R = 1{,}192e^{6{,}2} + 1{,}84e^{-0{,}98x} - 0{,}324x + 7{,}4 \\ y_L = 0{,}76e^{5{,}9x} + 0{,}68e^{-1{,}03x} - 0{,}339x + 6{,}4 \end{cases}$$

Из примера следует, что при решении нечетких дифференциальных уравнений наиболее эффективным является способ применения интервальных дифференциальных уравнений.

§2.Система нечетких дифференциальных уравнением первого порядка

Определение 8.5 Систему дифференциальных, содержащую хотя бы одно нечеткое дифференциальное уравнение, будем называть нечеткой истемой дифференциальных уравенний и обозначим:

$$\frac{dy_i}{dx} = \tilde{f}_i(x, y_1, y_2, \dots y_n), (i = \overline{1, n}) \qquad (8.5)$$

Для случая нечетких линейнхы дифференциальных уравнений первого порядка имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_i + \tilde{f}_1(x) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_i + \tilde{f}_2(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_i + \tilde{f}_n(x) \end{cases} \tag{8.6}$$

Следует отметить, что: 1) $\tilde{f}_i(x)$ могут быть и четким и нечетким функциями; 2) понятие решений системы нечетких дифференциальных уравнений определяются аналогично, что и решения аналогичных систем с четими дифференциальными уравнениями.

В частности, решение системы (7.6) следует искать следующим образом:

1) привести заданную систему нечетких уравнений к системе интервальных уравнений;

2) В зависимости от типа полученных систем четких дифференциальных уравнений применяем тот или иной способ решения системы дифференциальных уравнений.

Пример 8.3.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \tilde{2}x + y \qquad X\big|_{t=0} = \tilde{4} \\ \dfrac{dx}{dt} = \tilde{3}x + \tilde{4}y \qquad y\big|_{t=0} = \tilde{1} \end{cases}$$

где $\tilde{1} = \{1; 0{,}2; 0{,}3\}$; $\tilde{2} = \{2; 0{,}2; 0{,}1\}$;
$\tilde{3} = \{3; 0{,}1; 0{,}3\}$; $\tilde{4} = \{4; 0{,}2; 0{,}3\}$;

Решение.Пусть $\tilde{X} = \{X_L; X_R\}$; $\tilde{y} = \{y_L; y_R\}$

Выпишем нечеткую задачу Коши в интервальной форме и решим ее. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dX_R}{dt} = 2{,}1X_R + 1{,}3y_R & X_R\big|_{t=0} = 4{,}3 \\ \dfrac{dy_R}{dt} = 3{,}3X_R + 4{,}3y_R & y_R\big|_{t=0} = 1{,}3 \end{cases}$$

$$y_R = \frac{1}{1{,}3}\left(X_R' - 2{,}1X_R\right)$$

$$X_R'' - 6{,}4X_R' + 5{,}6X_R = 0$$

$$\begin{cases} X_R = C_{R_1}e^{5{,}46t} + C_{R_2}e^{1{,}05t} \\ y_R = 3{,}26C_{R_1}e^{5{,}46t} - 1{,}02C_{R_2}e^{1{,}05t} \end{cases}$$

Аналогично,

$$\begin{cases} \dfrac{dX_L}{dt} = 1{,}8X_L + 0{,}8y_L & X_L\big|_{t=0} = 3{,}8 \\ \dfrac{dy_L}{dt} = 2{,}9X_L + 3{,}8y_L & y_L\big|_{t=0} = 0{,}8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_L = C_{L_1}e^{4{,}62t} + C_{L_2}e^{0{,}98t} \\ y_L = 3{,}53C_{L_1}e^{4{,}62t} - 1{,}1C_{L_2}e^{0{,}98t} \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, имеем:

$$\begin{cases} X_L = 1{,}08e^{4{,}62t} - 2{,}7e^{0{,}98t} \\ y_L = 3{,}64e^{4{,}62t} - 2{,}8e^{0{,}98t} \end{cases}$$

Таким образом, решение нечеткой задачи Коши в интервальной форме будет:

$$\begin{cases}\tilde{X} = \{1{,}08e^{4{,}62t} + 2{,}7e^{0{,}98t}; 1{,}33e^{5{,}46t} + 2{,}97e^{1{,}05t}\} \\ \tilde{y} = \{3{,}04e^{4{,}62t} - 2{,}84e^{0{,}98t}; 4{,}34e^{5{,}46t} - 3{,}042{,}97e^{1{,}05t}\}\end{cases}$$

Для сведения решения нечеткой задачи Коши к виду

$$\{\tilde{X};\tilde{y}\} = \{\{X; m_{X_L}; m_{X_R}\}, \{y; m_{y_L}; m_{y_R}\}\}$$

Следует выписать четкую задачу Коши. Имеем:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = 2x + y \qquad X\big|_{t=0} = 4 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \qquad y\big|_{t=0} = 1\end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases}x = 1{,}25e^{5t} + 2{,}75e^{t} \\ y = 3{,}75e^{5t} - 2{,}75e^{t}\end{cases}$$

Сравнивая полученные результаты, убеждаемся, что $X(t) \in \tilde{X}(t)$ и $y(t) \in \tilde{y}(t)$.

Учитывая свойство выпуклости нечетких величин, для любого $\alpha \in [0;1]$ имеем:

$$\tilde{X}(\alpha,t) = \begin{Bmatrix} X_L(\alpha,t) \\ X_R(\alpha,t)\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{cases}[1{,}25 - (1-\alpha)0{,}17]e^{[5-(1-\alpha)0{,}38]t} + [2{,}75 - (1-\alpha)0{,}03]e^{[1-(1-\alpha)0{,}02]t} \\ 1{,}25 + (1-\alpha)0{,}08e^{[5+(1-\alpha)0{,}46]t} + [2{,}75 + (1-\alpha)0{,}22]e^{[1+(1-\alpha)0{,}02]t}\end{cases}$$

$$\tilde{y}(\alpha,t) = \begin{Bmatrix} y_L(\alpha,t) \\ y_R(\alpha,t)\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{cases}[3{,}75 - (1-\alpha)0{,}22]e^{[5-(1-\alpha)0{,}38]t} - [2{,}75 - (1-\alpha)0{,}02]e^{[1-(1-\alpha 00{,}02]t} \\ [3{,}75 + (1-\alpha)0{,}59]e^{[5+(1-\alpha)0{,}46]t} - [2{,}75 + (1-\alpha)0{,}29]e^{[1+(1-\alpha)90{,}05]t}\end{cases}$$

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\widetilde{A}$ - нечеткое множество

$\mathcal{F}$ - множество нечетких подмножеств X

G - нечеткая грамматика

g -нечеткая мера

N -множество натуральных чисел

P -отношение порядка

$\mathfrak{I}$ - множество обычных подмножеств множества X

$\mathcal{R}$- множество действительных чисел

$\mathcal{R}^+$ -множество неотрицательньрс действительньк чисел

$\widetilde{R}$ - транзитивное замыкание отношения

R - отношение

T - функция истинности

U - универсальное множество

A_a - множество уровня а нечеткого множества A

μ_b - функдия принадлежности; нечеткое множество

ρ - метрика

$\times$ - Декартово произведение

$\subset$ - строгое включение

$\subseteq$ - включение

$\bigcap$ - пересечение

$\bigcup$ - объединение

$\setminus$ - разность множеств

$\overline{A}$ - дополнение множества A

$\varnothing$ - пустое множество

$\circ$ - композиция отображений; композиция отношений

$\dot{U}$ - ограниченное объединение

$\underset{\bullet}{U}$ - ограниченное пересечение

$\int$ - знак объединения

$\xrightarrow{H}$ - нечеткое отображение

$\longrightarrow$ - отображение; импликация

$\approx$ - приближенное равенство

$\eqsim$ - равенство, приближенное снизу

$\simeq$ - равенство, приближенное сверху

f - нечеткий интеграл

$\succ$ - символ предпочтения

* - бинарная операция

$\vee$ - операция max, конъюнкция

$\wedge$ - операция min; дизъюнкция

$\oplus$ - расширенная сумма

$\odot$ - расширенное умножение

$\ominus$ - расширенная разность

$\oslash$ - расширенное деление

$\circledast$ - расширенная бинарная операция

$\widetilde{\max}$ - расширенный максимум

$\widetilde{\min}$ - расширенный минимум

$\tilde{\vee}$ -расширенная дизъюнкция

$\tilde{\wedge}$ - расширенная конъюнкция

$\tilde{+}$ - алгебраическая сумма

$\cdot$ - алгебраическое произведение

$\dot{\vee}$ - ограниченная сумма

$\underset{\bullet}{\wedge}$ - ограниченное произведение

=> - если..., то; семантическое следствие; композиция отношений, определяемая импликацией

$\Leftrightarrow$ -Тогда и только тогда, когда...; семантическая эквивалентность

$\leftrightarrow$ - эквивалентность

$\downarrow$ - стрелка Пирса

| - стрелка Шеффера

$\neg$ - отрицание

⌉ - отрицание *A*

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Р.А., Алиев Р.Р. Sof Computing Нечеткие множества и системы. Баку, 1996. С. 182.
2. Albert P. The algebra of fuzzy logic - Fuzzy Sets and Systems. 1978. P.203-230.
3. Бакельман И.Я. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Москва, 1976.
4. Батыршин И.З. О мерах энтропии размытых множеств - В кн Исследование операций и аналитическое проектирование в технике, Вып. 1, Казань КАН, 1978. С.40-45.
5. Батыршин ИЗ. О некоторых свойствах мер невероятностной энтропии размытых множеств. В кн.Прикладной многомерный статистический анализ. М. Наука, 1978. С. 345-348.
6. Батыршин И.З. Управление при наличии расплывчатых категорий Тезисы III научно-технического семинара. Пермь.НИИУМС, 1980. С.27-29.
7. Батыршин И.З. О транзитивности размытых упорядочений. В книге «Исследование операций и аналитическое проектирование». КАИ, 1979. С.67-73.
8. Balte N., Trillas E. Entropy and fuzzy integral – jurnal of Mathematical Analysis and Applications 1979v69. P. 469-474.
9. Banon G. Distinction between several subsets of fuzzy measures.-Fuzzy sets and systems, 1981 V.5 P.291-306.
10. Capocelli R., De Luca A.Fuzzy sets and decision theory. Information and Control 1973 V 23 P 44-473
11. Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств. М. Мир, 1983. С. 152.

12. Гасанов Г.С. Нечеткая математика в моделях управления. Элм. Баку, 1997. С.398.
13. Goguen J.L. Fazzy Sets. Jurnal of Mathematical Analysis and Application, 1967 V18. P. 145-174.
14. Dombi J. Ageneral class of fuzzy operations, the De Morgan chass of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators. Fuzzy Sets and Systems. 1982. v8. P. 149-163.
15. Dubois D., Prade H. Fuzzy sets and systems. Theory and applications. - New York Academic Press, 1980. 393 P.
16. Dubois D., Prade H. New results about properties and semantics of fuzzy-set-theoretic operators, -In: Fuzzy Sets/Ed. By P.P. Wang and S.K.Change N.Y.; Plenum Press 1980,P.59-75
17. De Luca A.Termini S. Entropy of L.fuzzy sets.-Information and control, 1974: V.24. P. 55-73.
18. De Luca A. Termini S. Agebraoc properties of fuzzy sets -Journal of Mathematical. Analysis and Applications, 1972 V20. P.301-312
19. De Luca a. Termini S. On the convergence of entropy measures of fuzzy sets. Kybernetes 1977 V.6. P.2I9-227.
20. Dempster A.P. Upper and lower probabilitiesties induced by multi-Valued mappung.-Ann.Math.Statist. 1967. V.38.P.325-339.
21. Dubois D.Prade H. Operations in fuzzy-valued logied logic inform and Control, 1979 V 43. P.224-240
22. Ebanks B.R. On measures of fuzziness and their representation. - Jurnal of Mathematical Analisis and Application, 1983 V.94, p.24-37
23. Flovd R.W. Non deterministic Algorithms Jour. Assoc. Comput. Machinary Vol 14, p. 136-644, 1967

24. Yager R.R. Fuzzy equations.- In: Proc. OfEEE Int. Conf Decision and Control, 1977, p.596-600
25. Yager F.F. On solving fuzzy mathematical relationships. - Information and Control. 1970 V. 41 №1, p.29-55
26. Yager R.R. Validation of fazzy linguistic models.J. of Cybernetics, 1978. V.8, p.17-30
27. Yager R.R. A note on fuzzyments in a dtandarted uncertainty logic. IEEE Trans. On Systems Man and Cybernetics, 1979 V. SMC-9, №7, p.388-392
28. Журид Б. А., Силов В.Б. Метод построения логико-лингвистических, моделей интеллектуальных, роботов. Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1983 г., №5, с.188-193
29. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Пер. с англ. М.Мир, 1976, с.166
30. Заде Л.А. Размытые множества и их применение в распознании образов и кластер-анаJшзе. В кн. Классификация и кластер. М.Мир, 1980 г., с.208-247
31. Заде Л.Л. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. В кн. Математика сегодня. М.Знание, 1974 г.
32. Zadeh L.A. Fuzzy sets - Information and Control. 1965, V.8., P.-338
33. Zadeh L.A. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. - Fuzzy sets and systems, 1978,№1, p.3-28
34. Zadeh L.A. Similarity relations and fuzzy orderings. - Information Sciences. 1971 V 3p. 177-200 35.
35. Zimmerman H.J. Fuzzy set. Theory and its applications. Second revised Edfton 1990, p. 398
36. Ибрагимов В.А. Дифференцирование нечеткой функции и ее экстремум АГНА. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. Баку, 2003

37. Ибрагимов В. А Нечеткая функция, ее предел и непрерывность. АГНА. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа. Баку, 2003г.
38. Goguen JA.L - fuzzy sets. Jurnal of Mathematical Analysis and Applications 1967 V 18, p.145-174
39. Higashi M., Klir G.J. On measures of fuzziness and fuzzy conplements. - International jornal of General Systems, 1982 V 8, P. 169-180
40. Hirota K. Concept of probabilistic sets. PSS45, 1981. p.31-46,P. 169-180
41. John N. Mordeson. Prechand S. Nair "Fuzzy Mathematics" with 20 Figures and 9 Tables
42. Knoptmacher J. On measure of fuzziness - Jurnal of Mathematical Analysis and application 1975 V 49. p. 529-534
43. Killing R. Fuzzy Planner. Tech. Peport №168 Comput Science Depart Univ of Wisconsin Febr 1973
44. Kaufman A- Introduction to the theory of fuzzy subsets. V. 1-N.Y. Academic Press, 1975, 643 p.
45. Kitajima S& Isai K.- Method of Learnin Control varing Search Domain by fuzzy Avtomata. Japan - US Seminar. Florida, Octs 1973
46. Kalmanson Ds Reacherche cardio - Vaskulaire of theorie des ensembles Flous. La Nouvelle Press Medicate. №2, 40.pp.2757-2760 Nov. 1973
47. Capocelli R., De Luca A. Fuzzy sets and decision theory-Information and Control, 1973 V23, p.446-473
48. Klement E.P. Construction of fuzzy a - algebras using triangular norm,- Journal of Mathematical Analysis and Applications 1982 V.85, p.543-565
49. Корман А. Введение в теорию нечётких множеств. М.Радио и связь, 1982 г, с.432

50. Loo S.G. Meassures of fuzziness.-Cybemetica. 1977. V3.p.201-217
51. Lower R. On fuzzy complements - Information Sciences, 1978, V.14, p.l07-1l3
52. Л.А.Люстерник, В.И.Соболев «Краткий курс функционального анализа», Москва, 1982
53. Mae Vicar - Whelan P.J. Fuzzy logic and alternative approach - In. Proc of gth int.symp. on Multiple – Valued Logics Bath. N.V. 1979p 152-158
54. Mizumoto M. Tanaka K. Some properties of fuzzy sets of type 2 - Inform Contrl. 1976, V.31, p. 312-340
55. Нариняки А.С. Недоопределенные множества – Проект ВОСТОК, Вып 4. Новосибирск, ВЦ. СО. АН СССР, 1980-27 с.
56. Negoita C.V., Ralescu D.L. Applications of fuzzy sets to system analysis. - Basel: Birkhauser Verlag 197-190 p.
57. Novak V. Fuzzy sets - The aprocsimation of semisets. Port 1 BUSERAL, 1983,Niver №13,p. 15-28
58. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. Под.ред. Д.А.Поспелова, М.1986 г.
59. Novak V. A note on foundations of fuzzy sets. BUSEFAL 1983 Ete, №15 p.5-10
60. Новиков П.С. Элементы математической логики, Москва, 1973
61. Norwich A M., Turksen I.B A model for the measurement of memberahip an conseguences of its empirical implementation. FSS 12. 1984. p. 1-25
62. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.l, 1986г.
63. Салимов Я.Ш., Ибрагимов В.А., Алиев Ф.Г. Понятие нечеткого числа и нечеткой точки. Milli aviasiya akademiyasmm elmi əsərləri №2, 2004 il

64. Sugeno M. Terano T. An approach to the identification of human characteristics by arrluing the fuzzy integral.- In:Proc of 3-rd IF AC Symposium on Identification and System Parameter Estimation. Hague 1973, Part 2. P.1064-1065
65. Skala H.J. On many - Valued logics fuzzy sets, fuzzy logics and their applications Fuzzy Sets and Systems 197S, V.I.p.129-149
66. Shafer G. A mathematical theory of evidence.- Princeton, New York: Pronceton University Press, 1976
67. Sugeno M. Fuzzy measure and fuzzy integral - Trans. SICE. 1972 V8 №2.p.95-102
68. Sugeno M. Inverse operation of fuzzy integral and conditional fuzzy measures. - Trans. SICE. 1975 VII №1. p.32-37
69. Sugeno M. Fuzzy decision-making problems - Trans SICE, 1975 VII №6, p.85-92
70. Sugeno M. Fuzzy measures and fuzzy integrals a survey – In: Fuzzy Automata and Decision Processes/ED by M.M.Cupta, G.Saridis, B.R.Gaines. Amsterdam: North-Holland, 1977,p.89-I02
71. Trillae E., Riera T. Entrapies of finite fuzzy sets. Information Sciences, 1978 vl5, p.159-168
72. Tsukamoto Y. Identification of preference measure by means of fuzzy integrals. - Ann. Conf of JORS, 1972, p.131-135
73. Tsukamoto Y., Cupta M.M., Nikitoruk P.N. On density of fuzzy measure.-In Fuzzy Set and Possibility Theory/Ed by R.R.Yager. New York. Pergamon POress, 1982,p.l33-142
74. Tsukamoto Y. Tashiro T. Method of solution to fuzzy inverse problem.-Trans SICE 1979 vl5, p.21-25
75. Шокин Ю.И. Интервальный анализ. Новосибирск. Наука 1981. С.112

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора.. 3
ПРЕДИСЛОВИЕ.. 4
ГЛАВА I. НЕЧЕТКАЯ АРИФМЕТИКА......................... 8
§1.Нечеткие числа и операции над ними................... 9
§2. Нечеткие числа L-R типа и действия над ними.... 25
§3. Сравнение нечетких чисел.................................... 35
ГЛАВА II.НЕЧЕТКАЯ АЛГЕБРА................................ 42
§1.Теоретическое обоснование нечетких уравнений... 42
§2.Нечеткие линейные алгебраические уравнения...... 45
§3.Нечеткие квадратные уравнения................................ 49
§4.Система нечетких линейных алгебраических
уравнений с двумя неизвестными............................. 61
ГЛАВА III. НЕЧЕТКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.......................... 75
§1. Нечеткие точки.. 75
§2.Нечеткие линии и нечеткие поверхности................. 80
§3.Нечеткие углы.. 93
§4.Нечеткие многоугольники... 98
ГЛАВА IV. Нечеткие множества.................................. 116
§1.Понятие нечетких множеств..................................... 116
§2.Операции на нечеткими множествами..................... 125
§3.Принцип обобщения.. 140
§4.Размытые нечеткие множества.................................. 143
ГЛАВА V.НЕЧЕТКИЕ ОТНОШЕНИЯ И НЕЧЕТКИЕ
ГРАФЫ.. 165
§1.Понятие нечетких отношений и операции над ними 165
§2.Нечеткий граф... 175
§3.Композиция двух нечетких отношений.................... 182
§4.Свойства нечетких отношений.................................. 190
§5. Классификация нечетких отношений....................... 201
§6.Пусть в конечном нечетком графе............................ 220
§7. Разложение на максимальные подотношения

подобия.. 224
§8.Обратная задача для нечетких отношений................ 232
ГЛАВА VI. НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА................................. 240
§1.Равносильность формул алгебры характеристик нечеткого множества.. 241
§2.Характеристическая функция характеристик нечеткого множества.. 244
§3. Анализ характеристических функций характеристик нечеткого множества........................ 255
§4.Композиция интервалов.. 277
§5. Нечеткие утверждения и их функциональные представления.. 283
§6.Многозначная и нечеткозначная логика................... 289
§7.Теория нечетких подмножеств и теория вероятности.. 296
§8.Законы нечеткой композиции.................................. 301
ГЛАВА VII.НЕЧЕТКИЙ АНАЛИЗ............................. 315
§1.Нечеткие функции.. 315
§2.Предел и непрерывность нечеткой функции........... 328
§3.Дифференцирование нечеткой функции.................. 336
§4.Экстремум нечеткой функции.................................. 344
§5.Интегрирование нечетких функций.......................... 349
§6.Нечеткая мера и нечеткий интеграл......................... 356
ГЛАВА VIII.НЕЧЕТКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.. 371
§1.Нечеткие линейные дифференциальные уравнения первого порядка.. 371
§2.Система нечетких дифференциальных уравнений первого порядка.. 379
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ...................................... 383
ЛИТЕРАТУРА.. 386