

Э.И. ВЛАДИМИРСКИЙ
Б.И. ИСМАЙЛОВ

СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
УПРАВЛЕНИЯ ХАОТИЧЕСКИМИ
СИСТЕМАМИ

БАКУ - ЭЛМ - 2011

УДК: 01.621.,519.7

Рецензенты:

Академик РАЕН, д.т.н., профессор, заведующий
кафедрой «Электрические Сети и Системы» АГНА
А.М.Керимов,
Д.т.н., профессор, заведующий кафедрой «Метрология,
стандартизация и управление качеством» АГНА
Н.Г.Фарзанае.

Э.И.Владимирский, Б.И.Исмаилов. «Синергетические методы
управления хаотическими системами» Баку, «ELM» 2011. – 240с.

ISBN 978-9952-453-39-3

Книга посвящена визуальному представлению и анализу инвариантных множеств при реализации задач управления хаотическими системами. В качестве интеллектуальной поддержки, принимаемых субъектом решений, рассматривается синергетический подход к синтезу систем управления нелинейными процессами, идеологической основой которого являются теория удовлетворительности и топология расширенных фильтров в четких и нечетких концепциях. Парадигма управления продемонстрирована с использованием отображений Чирикова, Лози, Икеды и других двумерных хаотических систем. Для визуализации новых инвариантных множеств, полученных при решении задач управления хаотическими системами, использовался аппарат нелинейного рекуррентного анализа в контексте разработки алгоритмов и программ в среде МАТЛАБ.

Книга ориентирована на аспирантов, докторантов и научных работников, работающих на междисциплинарных направлениях науки.

2201000000

Э.Б.----- - с грифом

655(7)*2011

Э.И.Владимирский, Б.И.Исмаилов, 2011

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	6
ГЛАВА 1. ОТОБРАЖЕНИЕ ПРИНЦИПОВ СИНЕРГЕТИКИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ	13
1.1. Философско-математический аспект	13
1.2. Восприятие информации. Постановка задачи. Четкий случай	18
1.2.1. Оценка восприятий. Нечеткий случай	21
1.3. Аксиоматика нечетких рефлексивных отношений. Закон взаимодействия отношений	22
1.4. Монотонные и немонотонные пространства в четкой и нечеткой концепциях	25
1.5. Вопросы адекватности при принятии удовлетворительных решений	34
1.6. Теория удовлетворительности. Принципы	36
1.7. Теория расширенных фильтров. Синтаксис. Случай монотонности	37
1.7.1. Нечеткие фильтры. Принятие удовлетворительных решений ...	39
1.8. Аксиоматика нечетко – рефлексивных фильтров	42
Выводы	43
Литература	43
ГЛАВА 2. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ	46
2.1. Статистические методы обработки	47
2.2. Нелинейные методы анализа временных рядов	48
2.3. Методы прогнозирования временных рядов	50
2.4. Русла. Возникновение русел. Уравнение русла	56
2.5. Информационные технологии в контексте обработки временных рядов	59
2.6. Теория размерности для инвариантных множеств динамических систем	61
2.7. Конструкция Каратеодори, мера Хаусдорфа и размерность Хаусдорфа – Безиковича	64
2.8. Синергетический подход к формированию интегральных размерностей в интеллектуальных системах	71
2.9. Мультифрактальный анализ временных рядов	83
Выводы	86
Литература	86
ГЛАВА 3. ХАОС В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	90
3.1. Свойства хаотических динамических систем	92
3.2. Характеристики хаотичности	96

3.3 Понятие аттрактора. Аттракторы динамических систем	98
3.3.1 Регулярные аттракторы	100
3.3.2 Хаотические аттракторы	101
3.4. Базовые модели динамического хаоса	103
3.4.1 Система Лоренца	103
3.4.2 Система Ресслера	104
3.4.3 Система Чуа	105
3.4.4 Система Чена	106
3.4.5 Отображение Икеды	107
3.4.6 Отображение Чирикова	109
3.4.7 Отображение Лози	114
3.4.8 Аттрактор Уеда	115
3.4.9 Логистическое отображение	115
3.4.10 Аттрактор Хенона	116
3.4.11 Однородная турбулентность	117
3.4.12 Система Лабиринт	118
Выводы	119
Литература	119
ГЛАВА 4. УПРАВЛЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ	122
4.1. Метод резонансных возбуждений	124
4.2. Нечеткое управление хаотическими системами	127
4.3. Синхронизация в хаотических системах	134
4.4. Основные типы хаотической синхронизации связанных динамических систем	139
4.5. Модели хаотической синхронизации для скрытой передачи информации	148
4.6. Устойчивость режима обобщенной синхронизации к шумам	156
Выводы	160
Литература	161
ГЛАВА 5. НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕКУРРЕНТНЫЙ АНАЛИЗ	163
5.1. Реконструкция фазового пространства. Фазовая траектория	164
5.2. Методология рекуррентных диаграмм	166
5.2.1. Конструирование рекуррентной диаграммы	168
5.2.2. Кросс – рекуррентные диаграммы	171
5.3. Меры сложности геометрических структур рекуррентных диаграмм	174
5.4. Галерея рекуррентных диаграмм хаотических систем	178
5.5. Количественный анализ рекуррентных диаграмм	185
Выводы	188
Литература	188

ГЛАВА 6. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА, УПРАВЛЕНИЯ И СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ	190
6.1 Анализ и синхронизация фазовых траекторий хаотических систем	190
6.2. Обзор состояния проблемы	191
6.3 Примеры анализа и визуализации в задачах управления и синхронизации фазовых траекторий хаотических систем	200
6.3.1. Синхронизация в управлении хаотическими системами и идентификации скрытой информации	206
6.4 Гидродинамика. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности	222
6.4.1. Уравнение Навье-Стокса как логистическое отображение. Математическая модель	225
6.4.2 Контроль и интерпретация вибрационных процессов	229
Литература	233
Заключение	237
Список дополнительной литературы	238

*Синергетика по своей природе – междисциплинарная,
или мультидисциплинарная теория
Генри Хакен, Елена Князева*

*Хаос - это партитура действительности
Генри Миллер (“Тропик Рака”)*

Введение.

И конце 70-х годов благодаря активной деятельности профессора Штутгартского университета Г. Хакена и профессора МГУ Ю.Л. Климонтовича, в Советском Союзе начались дискуссии о синергетике (Хакен Г. Синергетика. М.; Мир 1980г. – 404с.). Примерно в эти же годы яростные дискуссии и споры вызвали идеи Нобелевского лауреата И.Р. Пригожина о принципах формирования и эволюции так называемых диссипативных структур, о хаосе, порядке и т.д. (Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. Пер. с англ. М., Комкнига 2005г. – 232с.).

Кроме того, относительно недавно, профессор Ю.Л. Климонтович предложил ввести специализацию “физика открытых систем” (Климонтович Ю.Л. Проблемы статистической теории открытых систем: критерии относительной степени упорядоченности состояний в процессах самоорганизации.//УФН, т.158, 1989. – с.59.).

Таким образом, синергетика возникла на стыке различных научных школ. Это брюссельская школа И. Пригожина, рассматривающая самоорганизацию в физических и химических процессах; школа Г.Хакена, изучающая лазеры; российская школа В.И. Арнольда и Р. Тома, разрабатывавшая математический аппарат для описания катастрофических процессов, школа А.А. Самарского предложившая теорию самоорганизации на основе вычислительного эксперимента; биофизическая школа М.В. Волькенштейна и Д.С. Чернавского, и др.

Несмотря на определённые различия в содержании и трактовке указанных выше научных направлений, их объединяет глубокая общность. Необходимо отметить, что в современной теории колебаний и волн разработаны специальные методы анализа нелинейных процессов в динамических системах и исследован ряд принципиальных физических явлений, имеющих фундаментальное значение для естествознания.

Однако, выяснилось, что при анализе реальных эволюционных процессов в естествознании ряд проблем не может быть исследован с

использованием только теории колебаний и волн. Так, в качестве примера приводятся явления индуцированных шумом переходов в нелинейных системах. Шум может вызывать качественно новые явления, отсутствующие в системах без флуктуаций. Для понимания закономерностей возникновения структуры и свойств хаотических автоколебаний необходимо использовать весь арсенал теоретических методов и представлений теории динамических систем, статистической и эргодической теорий, теории информации, качественной теории дифференциальных уравнений и др. Отсюда анализ закономерностей нелинейной динамики сложных систем естествознания требует синергетического подхода.

Важным обстоятельством является то, что большинство новых эффектов, открытых в последние годы, относятся к исследованиям процессов в нелинейных диссипативных системах и средах.

Таким образом, ключом к пониманию сути сложных явлений и процессов является диссипативность и нелинейность динамической системы. Поэтому, если подходить к проблеме с самых общих позиций, то синергетика, теория диссипативных структур, физика открытых систем и нелинейная динамика – это важные составляющие одной общей науки о колебаниях и структурах, призванной описать явления в мире нелинейных систем, активно взаимодействующих с внешней средой.

В свете изложенного выше обращает на себя внимание проблема прогнозирования и управления нелинейными системами (процессами). Так, мировые вызовы, спровоцированные некогерентным взаимодействием гетерогенного трафика информационных потоков в таких отраслях как экономика, медицина, экология, социально политический аспект и др., активизируют парадигму институционального анализа этих процессов и принятия по ним удовлетворительных решений (satisfaction solution). Рост и интенсивность этих потоков вызывают нарастание хаотических процессов и эволюционные траектории в мировом пространстве становятся чувствительными к малым информационным воздействиям. В результате кумулятивного эффекта в определённый момент система может переходить с одной траектории эволюционного развития на другую.

До недавнего времени хаос ассоциировался с совершенно непредсказуемыми, неуправляемыми процессами, и сочетание слов “управление хаосом“ казалось парадоксальным. Однако такое представление за последние десятилетия изменилось коренным образом. Оказалось, что именно хаотические системы являются более

восприимчивыми к управляющим воздействиям и содержат более широкий спектр возможностей по сравнению с системами, динамика которых ограничена только регулярными движениями. Для существенного изменения поведения нехаотической системы, как правило, необходимы значительные изменения условий её функционирования. В системе с хаотическим аттрактором тот же результат может быть достигнут малыми, определённым образом заданными, управляющими воздействиями. Кроме того, в ней существует счётное множество неустойчивых регулярных состояний, что неограниченно расширяет выбор возможных режимов работы системы. Поэтому малые воздействия позволяют управлять не только переходами между этими состояниями, но и временем переходных процессов. Эти преимущества обусловлены структурой и свойствами хаотических аттракторов.

Так как хаотические колебания встречаются довольно часто и могут возникать в системах различной природы, проблема управления хаосом имеет актуальное значение и открывает дополнительные возможности в области управления динамическими системами.

Таким образом, под управлением хаосом понимают преобразование хаотического поведения системы в регулярное или хаотическое, но с другими свойствами с помощью малых целенаправленных воздействий на систему.

Необходимо отметить, что задача об управлении хаосом была поставлена в работах Хьюблера и Лючера, Джексона (Jackson E.A. *Perspectives of Nonlinear Dynamics*. Vol. I, II, - Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980, 1990 *Chaos II*, ed. Hao Bai-Lin. – World Sci., 1990.) и в ставшей классической работе Отто, Гребожи, Йорко (метод OGY) (Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. // *Phys. Rev. Lett.* 64. 1990. - p. 1196.). Идея метода OGY базируется на определённых свойствах типичных хаотических аттракторов.

Как отмечено выше, в хаотический аттрактор динамической системы встроено счётное множество седловых циклов различных периодов, и что при эволюции на нём изображающая точка время от времени попадает в малую окрестность каждого из них. Если в этот момент с помощью управляющего воздействия стабилизировать седловой цикл, то траектория останется в его окрестности и система начнёт совершать периодические движения. Отсюда задача об управлении хаосом сводится к задаче о стабилизации определённых орбит, встроённых в хаотический аттрактор.

Что касается вопросов управления хаосом во взаимодействующих системах, то они непосредственно связаны с

задачами управляемой (или принудительной) синхронизации. Здесь с помощью целенаправленных воздействий определённые хаотические подмножества, соответствующие синхронным движениям идентичных осцилляторов, можно преобразовать в устойчивые по одним собственным направлениям при сохранении неустойчивости по другим. В результате будет осуществлён управляемый переход от несинхронных хаотических колебаний к режиму полной синхронизации хаоса.

Естественным развитием данного направления является постановка задач об управлении пространственно-временным хаосом. В этой важной и сложной проблеме имеются скромные успехи, касающиеся простейших моделей распределённых систем в виде цепочек связанных отображений (Лоскутов А.Ю., Прохоров А.К., Рыбалко С.Д. Динамика неоднородных цепочек связанных квадратичных отображений. Теоретич. и матем. физика Т.132, №1 2002. – с. 105-125.).

Необходимо отметить описание неопределённости системы посредством нечётких моделей, приводящих к специфическим версиям алгоритмов управления. Наиболее удобным для синтеза управления является описание в виде нечётких систем Тагаки-Сугено (Takagi-Sugeno) (T-S нечётких систем), описываемых набором нечётких правил вида If A Then B. В ряде работ нечёткие модели нелинейных систем сочетаются с сетевой нейроподобной структурой регуляторов.

К настоящему времени в нелинейной динамике фактически сложились две в достаточной степени независимые ветви, посвящённые исследованию консервативных и диссипативных систем. Во многом это обусловлено объективными различиями в динамике систем, приводящиеся к необходимости применения различных методов для их численного исследования. Так, практически все методы исследования диссипативных систем связаны с исследованием структуры аттрактора, в то время как в консервативных системах аттрактор отсутствует. Однако в некоторых системах можно наблюдать переход от диссипативной к консервативной динамике при непрерывном изменении соответствующего параметра. При этом при приближении к консервативному случаю возникает весьма интересное поведение, демонстрирующее черты как консервативной, так и диссипативной динамики. Такое поведение называют “почти консервативным”. В этой связи вызывает интерес исследование, касающиеся взаимодействия аттракторов с различными элементами гамильтоновых систем (Гончар В.Ю., Тур А.В. Бифуркации

хаотических режимов обратимого отображения при взаимодействии резонансов и аттракторов. Электромагнитные явления. Т.1, №1, 1998г. – с. 3-19.).

Существование и, следовательно, взаимодействие основных элементов гамильтоновых систем (резонансов) и основных элементов диссипативных систем (аттракторов), приводит к большому многообразию новых явлений в таких обратимых системах: получена модель нового типа для описания динамики, описываемой исходным отображением; обнаружено совпадение траекторий, построенных в соответствии с этой моделью, с траекториями, полученными согласно исходного отображения. Такое совпадение траекторий наблюдается именно в хаотическом режиме и на больших временах, при наличии небольшого числа локальных отклонений между этими траекториями. Новые свойства так называемых обратимых отображений позволяют по-новому взглянуть на физические процессы в хаотических системах.

Однако реализация рассматриваемых проблем базируется на использовании традиционных методов анализа нелинейных процессов и, естественно, требует значительного объёма информации и сложных алгоритмических решений.

Фундаментальную перспективу представляет использование метода рекуррентного анализа нелинейных процессов, не предъявляющего особых требований к данным, и дающего удовлетворительные результаты в контексте реализации задач управления хаотическими системами (Norbert Marvan, Cazmen Romano M., Marco Thiel, Jurgen Kurths. Recurrence plot for the analysis of complex systems/ Physics Reports 438, 2007г. – p. 237-329.).

Важным параметром развития современной науки является заметный рост её саморефлексивности. Понятие рефлексии в широком смысле применяется для обозначения фактов самосознания, самоанализа, самооценки – того, что можно было бы назвать “мышлением о мышлении“. То есть обосновывается идея о том, что рефлексивный подход с опорой на методы объективного описания систем вместе с их субъективными внутренними мирами является основой гармонизации объектов.

Таким образом, дополняя принципы синергетики такими понятиями как рефлексивность, при отображении на задачи управления хаотическими системами, мы ещё больше расширяем возможности в контексте принятия удовлетворительных решений (Владимирский Э.И. Отображение принципов рефлексии в математической модели принятия удовлетворительных решений. Тр.

IV Межд. конф. “Идентификация систем и задачи управления“ SICPRO ‘ 05 Москва, 25-28 января 2005г. М.: Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН,2005.С.1681-1688).

Книга состоит из введения и шести глав.

Во введении отмечено, что до недавнего времени хаос ассоциировался совершенно непредсказуемыми, неуправляемыми процессами, и сочетание слов «управление хаосом» казалось парадоксальным. Оказалось, что именно хаотические системы являются более восприимчивыми к управляющим воздействиям и содержат более широкий спектр возможностей по сравнению с системами, динамика которых ограничена только регулярными движениями. Отсюда актуальность управления хаотическими процессами.

В первой главе рассмотрены философско-математические проблемы поддержки принятия решений как в четких, так и нечетких условиях. Разработана аксиоматика монотонных и немонотонных рассуждений, сформулирован принцип удовлетворительности, в контексте принятия решений, позволивший реализовать теорию расширенных фильтров.

Вторая глава посвящена анализу проблем идентификации и прогнозирования временных рядов. Отмечено влияние синергетических принципов в формировании интегральных размерностей в интеллектуальных системах.

В третьей главе отображены проблемы хаоса в динамических системах. Рассмотрены свойства и характеристики хаотичности динамических систем. Важный раздел занимает комплекс базовых моделей динамического хаоса, необходимый для реализации задач визуального анализа и управления хаотическими системами.

Четвертая глава представлена процессами управления хаотическими системами. Рассмотрены общие методы резонансных возбуждений и возможности использования эффекта синхронизации в задачах управления хаотическими системами. Затронуты также теоретические аспекты использования методов хаотической синхронизации в задачах скрытой передачи информации и отмечена их актуальность.

Пятая глава посвящена теоретическим вопросам нелинейного рекуррентного анализа, позволяющего анализировать инвариантные множества как в топологическом, так и в текстурном аспектах.

В шестой главе представлены результаты практической реализации инвариантных множеств в задачах анализа, управления и синхронизации хаотическими системами. Реализация задач показана

на примерах использования в различных технологических отраслях. В главе также представлена теоретическая работа, в контексте формирования новых инвариантных множеств, при реализации управления хаотическими системами.

ГЛАВА 1. ОТОБРАЖЕНИЕ ПРИНЦИПОВ СИНЕРГЕТИКИ В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

1.1. Философско-математический аспект

Обращение к постнеклассической картине мира позволяет увидеть множество неравновесных структур сложных открытых систем, к которым относится рассматриваемая нами парадигма – система управления хаотическими системами (процессами). Разработка структуры управления хаотическими системами рассматривается в тоже время как пример функционирования сложной самоорганизующей, самоупорядоченной системы, то есть мы подошли к понятиям, которыми характеризуются синергетические структуры.

Здесь важно отметить особенность синергетики как науки в отличие от большинства новых наук, возникавших, как правило, на стыке двух ранее существовавших и характеризующихся проникновением метода одной науки в предмет другой, синергетика как наука, возникает, опираясь не на граничные, а на внутренние точки различных наук, с которыми она имеет ненулевые пересечения. То есть синергетика выступает как междисциплинарная наука, что в свою очередь, определяет метасистемный уровень постановки задач и их реализацию.

В этой связи необходимо учесть такие понятия как когерентность и рефлексивность процессов, дополняющих концепцию синергетики.

При этом когерентность понимается более широко, чем в физике, а именно такая согласованность взаимодействия элементов, которая проявляется в масштабе всей системы.

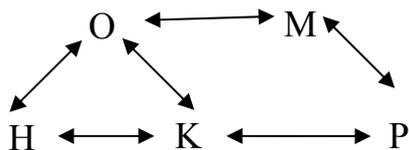
Важным параметром развития современной науки является заметный рост ее саморефлексивности. Понятие рефлексии в широком смысле применяется для обозначения актов самосознания, самопознания, самоанализа, самооценки – того, что можно было бы назвать «мышлением о мышлении». Вовлечение в орбиту исследований сложных и самоорганизующихся систем, превращение науки в комплексное образование, ставят задачу эффективной организации и самоорганизации самого научного знания, в котором и вырабатываются соответствующие механизмы, реализующиеся через усиление координирующих, упорядочивающих, критических и регулирующих функций рефлексий. Речь идет о принципиально иной позиции, с которой наука и ее развитие просматриваются под особым углом зрения, то есть переносом фокуса внимания с объекта

исследования на его средства, орудия познавательной деятельности, на активность субъекта познания.

В этой связи вызывает интерес высказывание П. Тейяр де Шардена: «Рефлексия – это приобретенная сознанием способность сосредоточиться на самом себе и овладеть самим собой как предметом, обладающим своей специфической устойчивостью и своим специфическим значением - способностью не просто познавать, а познавать самого себя: не просто знать, а знать, что знаешь...» [1].

Таким образом, наука и искусство рефлексивности в том и состоит, чтобы вскрыть неявные предпосылки, логику развития, углубиться в ту сущность предмета, которая остается скрытой от взгляда исследователя.

Отсюда дефиницию синергетики можно представить в виде пентаграммы [2, 3],



где Н – нелинейность; О – открытость; К – когерентность; М – междисциплинарность; Р – рефлексивность.

Важным аспектом организации процесса мышления является проблема принятия решения и влияние интуиции на эту проблему. В следующем параграфе дано краткое изложение этого влияния.

Интуиция в процессе принятия решений

Как указывал известный физик – теоретик Е.Л. Файнберг, интуиция есть составная и необходимая часть всей познавательной деятельности [4]. Однако сложность познаваемости этого феномена, очевидна. Например, с точки зрения синергетики механизм интуиции можно представить как механизм самодогрева структуры (визуальных и мысленных образов, идей, представлений) на поле мозга и сознания. В процессе поиска решения, в сферу просматриваемого, «перебираемого» втягиваются элементы внесистемного и иносистемного знания. На первоначальном этапе работы интуиции, вероятно, имеет место максимальное расширение креативного поля, охват максимально возможного разнообразия элементов знания.

В процессе творчества имеют место два противоположных, контрастных процесса – **ассоциация и концентрация**. **Ассоциация** – это разброс, установление все большего количества связей, разрастание сенсуального и интеллектуального мицелия (пересеченная, сложно организованная сеть ходов).

А **концентрация**, напротив – сосредоточение на единое, направленность на какую-либо одну проблему.

Что касается **самодостраивания**, то самоорганизация в области творческого мышления есть восполнение недостающих звеньев, «перебрасывания мостов», самодостраивание целостного образца. Происходит не просто объединение целого из частей, самоструктурирование частей в целое, а самовырастание целого из частей в результате самоусложнения этих частей.

Образ самодостраивания подобен вырастанию «родословного древа решения», «древа познания» на специально подготовленном, окультуренном поле сознания. Речь идет, таким образом, о некоем когнитивном аналоге биологического процесса морфогенеза.

У высококвалифицированных специалистов освобождается поле для свободного конструирования, для игры ума, для интуитивного видения и удержания целого. Отсюда облегчается наступление «вспышек интуиции». Самодостраивание протекает быстро и эффективно, так как спонтанно структурируются «крупные кубики», громадные блоки информации.

Что касается «вспышек интуиции», то Е.Л. Файнберг, рассматривает ее в двух аспектах: **интуиция – суждение**, **интуиция – догадка**, которые принадлежат к разным сферам неосознаваемого психического.

Интуиция – суждение, есть результат деятельности подсознания, где хранится ранее накопленный опыт. Этот опыт перестал осознаваться именно потому, что был многократно подтвержден действительностью. В него входит и опыт других людей, неосознанно освоенный субъектом путем подражания. В интуиции суждения нет творчества, нет новизны.

Иное дело – **интуиция – догадка**, порождаемая активностью сверхсознания, неосознаваемым рекомбинированием ранее накопленного опыта, которое побуждается и направляется доминирующей потребностью в поиске средств ее удовлетворения. Таким образом, интуиция предстает как пульсация сверхсознания над сознанием, которые развертывают, раскрывают перед человеком подлинное разноцветье и полифонию мира.

Проблема рефлексивных процессов является стратегически важной как для развития науки, так и для решения широкого круга практических задач. В научном плане основные ее направления связаны со сменой доминанты каузального подхода на доминанту телеологического (целевого) подхода, с междисциплинарной интеграцией при построении новых способов и средств моделирования, с созданием новых парадигм интеграции разнородных знаний и др.

Широкое развертывание этих исследований связано с разработкой В.А. Лефевром [5] оригинальных идей, которые рождались в связи с потребностями больших проектов в военной сфере. Главная заслуга Лефевра в том, что он вывел понятие рефлексии из философии, тогда во многом сводившейся к идеологии, в общесистемное междисциплинарное поле, что было связано с введением понятия «рефлексивная система». В основе традиционных технологий того времени лежал функциональный подход, в частности, на нем базировалось «исследование операций». В основу же идей Лефевра был положен структурно-функциональный подход.

В этой связи можно привести много примеров повышения роли рефлексивного подхода в интеграции гуманитарных и естественных наук, в частности, это синергетика – одно из современных и перспективных направлений интеграции.

Что касается «прорывных направлений» в использовании рефлексивного подхода на практике, то это, в первую очередь, проблематика поддержки управленческой деятельности в условиях компьютеризации.

Потребность современного информационного общества в развитии человеко-компьютерных систем поддержки решений вновь актуализировало интерес к теоретическим основам их моделей.

Все важным параметром развития современной науки является интенсивный рост ее саморефлексивности. Рефлексия в широком смысле применяется для обозначения актов самосознания, самоанализа, самооценки, то есть того, что можно назвать «мышлением о мышлении». Что касается рефлексивности научного знания, то под ним понимается его самообращенность, наличие в нем механизмов и норм сознательного контроля над процессом его роста и функционирования [5].

Анализ рефлексии в науке предполагает, что речь должна идти не просто о некотором «метауровне» (научного) сознания, а под особым углом зрения, задаваемом переносом фокуса внимания с объекта исследования на его средства, орудия познавательной

деятельности, на активность субъекта познания. Если исходить из типа аргументации, применяемой в процессе рефлексивных процедур, провозглашаемых целей, то рефлексивность современного научного знания расслаивается на внутритеоретическую, метатеоретическую, междисциплинарную, общенаучную и философско-методологическую рефлексию. В пределах каждого из обозначенных уровней рефлексивность знания осуществляется как процедура саморефлексивности, причем отдельные уровни находятся между собой в отношении дополнительности: каждый из высших содержит, предполагает низший, в известном смысле, несовместимый с ним, в качестве необходимого элемента функционирования. Кроме того, их взаимные переходы и взаимодействие отражают структуру рациональности науки, а отсюда возможный сдвиг качественного характера.

Что касается синергетики, как теории самоорганизации, и если она претендует на то, что дает новое видение мира, новые мировоззренческие ориентиры, то естественно ожидать от нее ответов на вечные вопросы о человеке, о его месте в мире, о способах постижения, узнавания, освоения этого мира.

В таких обширных областях как синергетическое знание выделяются три уровня: частнонаучный, общенаучный и философский. Учитывая нелинейность синергетического мышления вышеназванные уровни представляются в виде кольца (Рис.1.1), где все уровни предполагаются равными, где нет высшего и низшего.

Каждый из трех элементов кольца состоит из множества других элементов. Так, Т – набор из десятков теорий - физических, химических, биологических, социальных, выражающих взаимопревращение хаоса и порядка. ОНТ - набор из нескольких общенаучных теорий (концепций) - Хакена, Пригожина, математических, логических теорий и т.п.

Ф-философия-область мировоззренческих учений, а также созвучность с идеями Декарта, Лейбница, Канта, Соловьева, Флоренского, Гегеля, Хайдеггера и других мыслителей.

Однако синергетическое знание было бы неполным, если не учитывать рефлексию в современной науке. Здесь согласно [1] рефлексия в науке расслаивается на внутритеоретическую, метатеоретическую, общенаучную и философско-методологическую. Современное научное познание предполагает не только «переливы» одной формы рефлексии в другую, охватывающую большую предметную область, но и обогащение самого типа рефлексии. Так, если внутритеоретический тип рефлексии совпадает с процедурой

внутренней теоретизации, то на метатеоретической ступени происходит своеобразное «удвоение» знания, расщепление его на объектное и метатеоретическое, а на уровне философско-методологической рефлексии познавательная деятельность «запускает» механизм самообращения и анализа собственных оснований. Здесь философия способна выступать и как общенаучное средство познания, и как инструмент метатеоретического исследования. Такая особенность высших уровней рефлексии открывает перспективы углубления в предмет, а отсюда, естественно, получения нового знания о предмете и реально обоснованной стратегии познавательной деятельности.

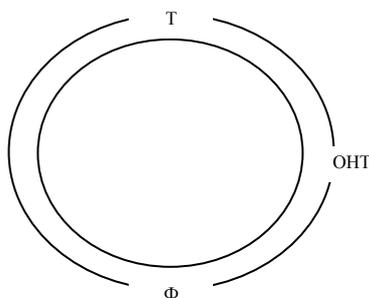


Рис. 1.1 Кольцо синергетического знания (Т-теория, Ф-философия, ОНТ-общенаучная теория)

В этой связи, на наш взгляд, кольцо синергетического знания может трансформироваться в некоторую иерархическую структуру представлений, отображающих асимметрию информационной составляющей кольца.

Отсюда проблема принятия решений в человеко-компьютерных системах, с учетом рефлексивности в них, приобретает характер инновационности.

1.2. Восприятие информации. Постановка задачи. Четкий случай

Для чего ставится задача оценки понятия восприятий. Совершенно ясно, что субъект-человек, является элементом системы «человек-природа» и на него как на элемент системы воздействуют различного рода помехи информационно-функциональной природы. В зависимости от состояния информационно-функционального баланса

человека, воздействия внешних помех и степени его гармонизации с природой, процесс восприятия информации, то есть степень восприятия ее, естественно, деформируется. Поэтому, учитывая информационно-функциональные возможности человека в системе «человек-природа» и, изучая возможные помехи, возникающие в системе, можно попытаться оценить степень восприятия информации человеком с учетом вышеизложенных причин.

Пусть воспринимаемый человеком объем информации записывается в его память в виде некоторого ветвящегося процесса. Пусть ветвящийся процесс ассоциируется с произвольной структурой типа дерево. Пусть формализация произвольной структуры типа дерево описывается в терминах теории неориентированных графов. Тогда в контексте использования понятия центра масс дерева [6] предлагается определить вес дерева, характеризующий возможный объем воспринимаемой информации в долговременной памяти человека. Пусть имеет место:

Теорема 1.1 [6]. В дереве любые две вершины связаны единственной цепью.

Для определения количества деревьев на n данных вершинах, которые в дальнейшем будут определять вес дерева T , имеет место следующая

Теорема 1.2 [6]. Число различных деревьев, которые можно построить на n данных вершинах, равно

$$t_n = n^{n-2} \quad (1.1)$$

Далее можно перейти к определению параметров характеризующих вес дерева T . С этой целью сформулируем следующую постановку задачи. Произвести оценку «мощности леса» $W(F)$, определяющего на абстрактном уровне, возможный объем воспринимаемой информации $Q(J)$ (имеется в виду долговременная память).

Определение «веса» дерева. Пусть $E_i = (v, u_i)$ произвольное ребро с концом v дерева T . Все ребра, принадлежащие цепям из v с первым ребром E_i , образуют часть $B_i = B(v, E_i)$, которая называется ветвью, определяемой E_i и v , $E_i \subset B_i$.

Число ребер в B_i есть $v_e(B_i)$ так, что

$$v_e(T) = \sum_{i=1}^{p(v)} v_e(B_i) \quad (1.2)$$

Число $w(v) = \max_{i=1,2,\dots,p(v)} v_e(B_i)$ называется весом дерева в v .

Любая ветвь B_i , для которой $v_e(B_i) = w(v)$, есть ветвь с весом. Далее пусть вершина с минимальным весом есть центр масс m_0 , тогда $w(m_0) = w(T)$ есть вес дерева T .

Пусть в связном неориентированном графе G отношение связности для вершин является отношением эквивалентности. Следовательно, существует такое разложение множества вершин

$$V = \bigcup_i V_i \quad (1.3)$$

на попарно непересекающиеся множества, что все вершины в каждом V_i связаны, а вершины в различных V_i не связаны. Тогда имеет место прямое разложение

$$G = \bigcup_i G(V_i) \quad (1.4)$$

графа G на непересекающиеся связные подграфы $G(V_i)$. Эти подграфы называются связными компонентами графа G или подлесами леса F .

Введем понятие «мощности» леса, определяемого как

$$W(F) = \bigcup_{i=1}^{t_n} w(T) \quad (1.5)$$

Таким образом, «весовая» составляющая формулы (1.5) определяет мощность леса $W(F)$.

Пусть мощность леса $W(F)$ характеризует объем $Q(J)$ воспринимаемой информации в долговременной памяти человека. Тогда взаимодействие кратковременной и долговременной памяти в процессе восприятия информации будет определяться как [7]:

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \text{interaction}[(7 \pm 2) * Q(J)], \quad (1.6)$$

где J -общий объем взаимодействующей информации; (7 ± 2) -число Миллера; $*$ -операция взаимодействия. Или

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \text{interaction} \left[(7 \pm 2) * \bigcup_{i=1}^{t_n} w(T) \right] \quad (1.7)$$

Что касается принятия решений на базе воспринимаемого объема информации J , то необходимо еще учесть информацию, которая находилась до этого в памяти человека и является дополняющей и основной

$$I = J * J_{\text{доп}}^{\text{def}}, \quad (1.8)$$

где I -информация характеризующая взаимодействие воспринимаемой информации J с информацией $J_{\text{доп}}$ хранящейся в памяти человека (уровень интеллектуальности); $*$ - операция взаимодействия.

Таким образом, объемно- интеллектуальная составляющая информации характеризует уровень «реактивности» при принятии удовлетворительных решений.

Необходимо также отметить. Что на уровень «реактивности» оказывает влияние также такое понятие как интуиция, которая стимулируется, возможно, объемно- интеллектуальной составляющей. Нам известно, что понятие интуиция имеет две составляющие - интуиция «рассуждение» и интуиция – «догадка». Интуиция «рассуждение» не открывает ничего нового, в то время как интуиция «догадка» сильно влияет на уровень «реактивности» на новизну при принятии удовлетворительных решений [4, 8].

1.2.1. Оценка восприятий (впечатлений). Нечеткий случай

Однако совершенно ясно, что процесс восприятия действительности субъектом носит неопределенный, нечеткий характер. Рассмотрим процесс восприятия информации субъектом с точки зрения теории возможностей (possibility theory) Л. Заде. Необходимо отметить, что реально осуществимые события, которые мы воспринимаем, составляют лишь часть в некотором пространстве возможностей. Это пространство возможностей определено как неопределенное пространство (Uncertainty Spaces-US).

Пусть элемент неопределенного пространства (US) представляет собой события категории «возможности» восприятия информации и пусть $\Pi: (X, V_F) \rightarrow [0,1]$, где Π - мера возможности, X - любое множество. V_F - нечеткая σ - алгебра подмножеств. Тогда имеет место следующее [9]:

Определение 1.1 Π - мера возможности, если выполняются следующие условия:

1. $\Pi(\emptyset)=1, \Pi(X, B_F)=1$
2. Если $A \subset B \Rightarrow \Pi(A) \leq \Pi(B)$
3. Для любой совокупности $\{A_{F_n}\} \subseteq (X, B_F)$

$$\Pi\left(\bigcup_{n \geq 1} A_{F_n}\right) = \sup_{n \geq 1} \Pi(A_{F_n})$$

где - $A_{F_n} \subseteq B_F$ нечеткие подмножества.

Тогда имеет место следующее

Определение 1.2 [9]. Пусть (X, B_F) нечеткое борелевское пространство и Π - мера возможности на B_F . Тройка (X, B_F, Π) - называется нечетким вероятностным пространством, а возможность нечеткого события A_{F_n} относительно меры Π определяется интегралом Сугено как:

$$\Pi(A_{F_n}) = \int_{A_{F_n} \subseteq B_{F_n}} \mu_{A_{F_n}}(x) \circ \pi(\bullet) \quad (1.9)$$

или

$$\Pi(A_{F_n}) = \sup_{B_F} \min(\mu_{A_{F_n}}(x), \pi(x)) \quad (1.10)$$

где $\pi(x)$ – функция распределения возможности,

\circ - операция «композиция».

Таким образом, возможность нечеткого восприятия событий (информации) можно оценить как возможность ожидания этих событий, которые в свою очередь оказываются аналогами математического ожидания в классическом понимании. То есть множество восприятий вероятностно-нечеткой природы можно успешно оценивать, используя известный математический аппарат - теорию возможностей.

1.3. Аксиоматика нечетких рефлексивных отношений. Закон взаимодействия отношений

Вышесказанное обязывает обозначить некоторые аспекты аксиоматики рефлексивных отношений в нечеткой концепции. С этой целью представим следующее.

Определение 1.3 Метапространство \tilde{R} называется нечетко рефлексивным (F-reflexion), если

$$F - \tilde{R} \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} \mu_R(x, x) = 1 & \forall x \in A, \\ \mu_R(x, x) = 0 & \forall x \in A, \end{cases}$$

где μ_R - функция принадлежности рефлексивного отношения R .

Рассмотрим $F - \tilde{R}$ метапространстве взаимодействие отношений между двумя множествами.

Определение 1.4 Метапространство \tilde{R} называется нечетко рефлексивным (F-reflexion), если оно отвечает следующим условиям [10]:

$$F - \tilde{R} \stackrel{\text{def}}{=} \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 1, \text{ если } E \subseteq R, R(x, x) = I \quad \forall x \in X - \text{рефлексивность} \\ R(x, y) \leq R(x, x) \quad \forall x, y \in X - \text{слабая релексивность} \\ R(x, y) < I \quad \forall x, y \in X, x \neq y \text{ и} \\ E \subseteq R, \quad R(x, x) = I \quad \forall x \in X \end{array} \right\} \text{сильная рефлексивность} \\ 0, \text{ если } R \cap E = \emptyset, R(x, x) = 0 \quad \forall x \in X - \text{антирефлексивность} \\ \left. \begin{array}{l} R(x, x) \leq R(x, y) \quad \forall x, y \in X - \text{слабая антирефлексивность} \\ R \cap E = \emptyset, R(x, x) = 0 \quad \forall x \in X \text{ и} \\ 0 \leq R(x, y) \quad \forall x, y \in X, x \neq y \end{array} \right\} \text{сильная антирефлексивность} \end{array} \right\} \rightarrow (Mon \ Non \ Mon)$$

$$\text{ГДЕ } E(x, y) = \begin{cases} I, & \text{если } x = y, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть заданы два множества X и Y с нечеткими отношениями R и S на них соответственно. Пусть задано нечеткое отношение \tilde{F} между X и Y . Тогда имеет место

Определение 1.5 Кортеж $\langle X, R; Y, S; \tilde{F} \rangle$ называется согласованной схемой, если выполняется соотношение [11]:

$$R = \tilde{F}^{-1} \circ S \circ \tilde{F}, \quad (1.11)$$

$$\text{где } \mu_R(x, y) = \bigvee_{u, v \in Y} \{ \mu_{\tilde{F}}(x, u) \wedge \mu_S(u, v) \wedge \mu_{\tilde{F}}(y, v) \}$$

В терминах теории множеств закон (1.11) означает, что отношение R является прообразом отношения S относительно соответствия \tilde{F} (то есть характер их согласования).

Однако аксиоматика нечетких отношений не учитывает такие понятия как соображения выгоды, полезности, безопасности, желательности и другие моральные ценности, которые необходимы в контексте принятия решений.

Поэтому рассмотрим модель субъекта, который должен сделать выбор одного из возможных действий.

Пусть функция готовности субъекта к выбору имеет вид:

$$A1 = (a3 \rightarrow a2) \rightarrow a1 \quad (1.12)$$

Переменная $a1$ описывает давление среды к выбору одной из альтернатив. Это реальное давление среды, которое не осознается субъектом, но ощущается на подсознательном уровне. Представление субъекта о давлении среды описывается переменной $a2$. Переменная $a3$ описывает планы субъекта к выбору одной из альтернатив, то есть его интенции или желания, которые он хотел бы осуществить. $A1$ -это та альтернатива, которую субъект готов выбрать.

Пусть переменные формулы (1.12) принимают любые значения на булевой решетке норм $\langle L, \leq \rangle$ независимо друг от друга. Выражение

$$A2 = (a3 \rightarrow a2) \quad (1.13)$$

в формуле (1.12) интерпретируется как «образ себя» для субъекта A , то есть его самооценка. Если субъект не имеет никаких планов или интенций, то его готовность к выбору $A1$ не зависит от $a3$ и описывается значением $a2 \rightarrow a1$, которое называется примитивным выбором.

Если готовность субъекта к выбору совпадает с его интенциями, то есть $A1 = a3$, то выбор субъекта называется реалистическим. В этом случае субъект совершает выбор осознанно, в соответствии с собственными желаниями.

Условия реалистического выбора определяются как

$$(a3 \rightarrow a2) \rightarrow a1 = a3 \quad (1.14)$$

Иными словами, внешняя среда и психологическая установка (ожидаемое давление мира) субъекта формируют его интенции, которые он способен претворить в действие.

Известно, что субъект имеет возможности сделать реалистический выбор, если его интенции лежат между реальным давлением мира и примитивным выбором

$$a1 \leq a3 \leq a2 \rightarrow a1 \quad (1.15)$$

Отсюда следует вывод: если человек стремится к наилучшему для себя поведению, то это приводит к реалистическому выбору.

Действительно, из (1.15) видно, что наилучший реалистический выбор, который может сделать субъект, определяется примитивным выбором:

$$a3 = a2 \rightarrow a1 \Rightarrow a2 \vee a1 = \sup(> a2, a1), \quad (1.16)$$

то есть как наиболее сильная норма из $\succ a_2$ и a_1 .

Продемонстрированный рефлексивный выбор несет некоторый абстрактный оттенок. Кроме того, помимо «образа себя», необходимо учесть такое понятие как «вспышка интуиции» [8], которое несет функцию достраивания для реалистичного выбора.

Необходимо отметить также одно важное обстоятельство, касающееся проблемы рефлексивного выбора. Совершенно очевидно, что такие понятия как рефлексия, интуиция, интенция или желание, «образ себя», «фантомные агенты» [12], учитываемые в процессе принятия решений, несут оттенок нечеткости.

Тогда ставится задача формализации проблем выбора в контексте рефлексивности.

Пусть имеет место следующее

Утверждение 1.1 Если $a_2 \rightarrow a_1$ примитивный выбор, то он ассоциируется с F-монотонным выбором.

Утверждение 1.2 Если $a_1 \leq a_3 \leq a_2 \rightarrow a_1$ реалистичный выбор, то он ассоциируется с F-немонотонным выбором.

Таким образом, прежде чем перейти к рассмотрению проблем монотонных и немонотонных рассуждений, отметим, что они, в принципе, являются элементами $F - \tilde{R}$ метапространства (см. Определение 1.4).

1.4. Монотонные и немонотонные пространства в четкой и нечеткой концепциях

Пусть имеет место

Метатеорема 1.1 [13] (случай монотонности).

Пусть A и B – нормальные нечеткие множества (F-множества) предпосылок (Ant) и следствий (Cons), описываемых функциями принадлежности $\mu_A : U \rightarrow [0,1]$, $\mu_B : V \rightarrow [0,1]$, U , V -универсумы вида $U = V = \{0,1,2,\dots,10\}$.

Пусть в категории нечетких отношений класс объектов этой категории совпадает с классом нечетких множеств A и B . Морфизм F-множества A в F-множество B определяется по правилу условного нечеткого вывода. Пусть в общем случае F-функции предпосылок и следствий имеют вид: $\gamma : PA \rightarrow PB$, $\beta : PB \rightarrow PB$, где PA , PB -мощные множества (или булеаны), операция метаимпликация $\langle \Rightarrow \rangle$

определяет нечеткий морфизм между ними (или нечеткое бинарное отношение).

Пусть $\bigcap_i A_i \subset PA$ -набор предпосылок на входе правила условного нечеткого вывода. Тогда для γ и β выполняются утверждения:

1. γ и β - антитонны;
2. γ и β удовлетворяют аксиоматике F-OI – категории (нечеткая упорядоченная категория с инволюцией).
3. γ и β удовлетворяют аксиоматике F-OI-двойственности
4. F – композиции $\gamma\beta$ и $\beta\gamma$ - экстенсивны;
5. F- композиции $\gamma\beta$ и $\beta\gamma$ - изотонны;
6. F- композиции $\gamma\beta$ и $\beta\gamma$ - идемпотентны;
7. $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$ и $\bigcap_j B_j \neq \emptyset$, $\forall i, j = \overline{1, n}$ «связаны»
8. $\beta\gamma x\gamma$ и $\beta x\beta\gamma$ - максимально возможные подотношения отношения R, R-отношение «удовлетворительности».

F - функция замыкания $\gamma\beta$ и $\beta\gamma$, определяемые Метатеоремой, не являются функциями замыкания по Куратовскому и, следовательно, не могут привести к топологическим пространствам, фильтрам Картана и стандартным представлениям о сходимости.

Доказательство Метатеоремы базируется на основанных положениях теории нечетких категорий [13,14] и соответствий Галуа [6,15].

F-монотонное пространство

Прежде чем перейти к доказательству Метатеоремы (монотонный случай) представим следующее

Определение 1.6 [14]. Категория \mathcal{U} называется упорядоченной категорией с инволюцией, или OI-категорией если на классе ее морфизмов определено отображение $\gamma \rightarrow \gamma''$, называемое инволюцией, и каждое множество $\mathcal{U}(A, B)$ упорядочено отношением \subset так, что выполняются следующие аксиомы:

1. $\gamma'' \in \mathcal{U}(B, A)$ для каждого $\gamma \in \mathcal{U}(B, A)$;
2. $\gamma''' = \gamma$ для любых морфизмов $\gamma \in Mor \mathcal{U}$;

3. $(\gamma\beta)'' = \beta''\gamma''$ для любых морфизмов $\gamma: A \rightarrow B$, $\beta: B \rightarrow C$ из \mathcal{U} ;
4. Из $\gamma \subset \beta$ следует $\gamma'' \in \beta''$;
5. Из $\gamma \subset \beta$ следует $\zeta\gamma \in \zeta\beta$ для любого ζ для которого существует композиция $\zeta\gamma$.

\square Существуют различные композиции нечетких соответствий. В настоящей работе будет использована так называемая максиминная композиция, а именно; если $A \subset X \times Y$ и $B \subset Y \times Z$ -нечеткие отображения, то функция принадлежности композиции $AB \subset X \times Z$ определяется выражением

$$\mu_{AB}(x, z) = \sup_y (\mu_A(x, y) \wedge \mu_B(y, z))$$

Инволюция A'' нечеткого отображения $A \subset X \times Y$ определяется функцией принадлежности

$$\mu_{A''}(y, x) = \mu_A(x, y)$$

Порядок задается отношением включения для F-подмножеств.

F – OI - двойственность. Наличие в F - OI – категории F - инволюции и порядка приводит к гораздо более богатой двойственности, чем в обычных категориях. Для F-OI-категории, например, имеет место следующий принцип двойственности. Вместе с каждым предложением формальной теории F-OI-категории, имеет место F-OI-дуальное предложение, получающееся из исходного обращением стрелок и заменой порядка на противоположный. Рассмотрим специальные классы морфизмов, подтверждающих двойственность F-OI-категории.

1. **D-регулярные морфизмы.** F - морфизм $\gamma: PA \Rightarrow PB$

F-OI-категории \mathcal{U} называется D-регулярным, если

$$\gamma\beta \supset 1x \quad (\sup_y \rho\mu_R(x, y) = 1)$$

Дуально (относительно композиции) F-морфизм β называется B-регулярным, если

$$\beta\gamma \supset 1y \quad (\sup_x \rho\mu_R(x, y) = 1)$$

D-регулярность F-морфизма γ означает, что $\text{Dom } \gamma = PA$, следовательно B-регулярность равносильна тому, что $\text{Im } \gamma = PB$.

2. I - регулярные морфизмы. F-морфизм γ F-OI- категории \mathcal{U} называется I-регулярным, если $\beta\gamma \supset 1y$, то есть справедлива импликация такая, что

$$Y \neq Y' \Rightarrow \mu_R(x, y) \wedge \mu_R(x, y') = 0$$

Дуально F-морфизм β называется K-регулярным, если $\gamma\beta \supset 1x$.

Таким образом, имеет место биективность F-морфизмов. (F-морфизм γ называется сюръекцией, если он DBI-регулярен и инъекцией, если он DKI-регулярен) [14].

Кроме того, как показывает вышеизложенное, K-регулярные F-морфизмы дуальны D-регулярным F-морфизмам относительно порядка.

Что касается доказательства условия идемпотентности, то совершенно очевидно, что F-композиции $\gamma\beta$ и $\beta\gamma$ -F-идемпотентны на основании $\gamma\beta\gamma = \gamma$ и $\beta\gamma\beta = \beta$.

$$(\gamma\beta)^2 = \gamma\beta \text{ и } (\beta\gamma)^2 = \beta\gamma$$

Двойственные F-изотонные функции.

В общем случае отображение F частично упорядоченного класса A в частично упорядоченный класс B называется изотонным (монотонным), если $\forall X, Y \in A (X \leq Y \Rightarrow F(X) \leq F(Y))$.

Пусть $F - \bigcup_A = \gamma\beta$, $F - \bigcup_B = \beta\gamma$ -изотонны. Тогда на основании свойств F-OI-cat и Метатеоремы, двойственные им F-функции

$$F -_{v_A} = (\gamma\beta)'' = \gamma''\beta'',$$

$F -_{v_B} = (\beta\gamma)'' = \beta''\gamma''$ -будут также изотонны. Наличие двойственных F-изотонных функций позволяет сформулировать F-изотонное (монотонное) пространство (F-isotonis spaces). Введем следующее

Определение 1.7 Пусть M-множество F-изотонных функций, PM-мощное множество, N-пустое множество. Пусть (u, v) -двойственные F-функции на PM. Тогда упорядоченные пара (u, v) и множества (M, N) определяют F-изотонное пространство-F-IS.

В общем случае традиционные логические системы обладают свойством монотонности, это означает, что все утверждения, раз выведенные, продолжают оставаться верными в процессе последующего вывода. Совершенно очевидно, что в рамках таких

логических систем не могут быть описанными многие виды человеческих рассуждений как, например, абдуктивное рассуждение, рассуждение по аналогии, по умолчанию и т.д.

Все указанные типы человеческих рассуждений, а также многие другие являются немонотонными, так как некоторое утверждение, принятое как верное, на некотором шаге, через определенное время сможет стать ложным и отвергнуто. Отсюда немонотонность – следствие неполноты и противоречивости человеческих знаний. В этой связи обоснованность в принятии удовлетворительных решений в системах ИИ должна базироваться на следующих условиях [16]:

1. С позиции когнитологии учитывается общая концепция человеческих рассуждений и генерация альтернатив, в комбинации монотонных и немонотонных рассуждений в контексте рефлексивности.

2. Удовлетворение этих рассуждений аксиоматике монотонного и немонотонного выводов.

3. С учетом семантики, полноты, рефлексивности, истинности и непротиворечивости рассуждений удовлетворение структуре целей и ограничений задачи.

Что касается пункта 3 вышеприведенных условий, то здесь вызывает интерес использование так называемых «систем управления истинностью» - СУИ. Системы управления истинностью – СУИ - это программы, которые работают с противоречивой информацией и ориентированы на практическую реализацию этих систем, а не на логику, на основе которой они построены. Это приводит к тому, что СУИ исследуются не как формальные логические системы, а как алгоритмические системы, свойства которых могут быть установлены путем многократного выполнения соответствующего набора программ.

Немонотонные пространства

Дж. Поллок в своей работе [17] называет состояния, из которых начинаются рассуждения, фундаментальными. Грубо говоря, рассуждения проистекают в виде причин, причины объединяются вместе в аргументы и таким образом выводы аргументов становятся оправдываемыми. P является немонотонной причиной для Q , но добавляя дополнительную информацию, мы тем самым нарушаем

причинную связь. Такие причины называются главными внешними причинами (ГПВ) [17].

Если некоторые значения K аннулируют ГВП, то они называются аннуляторами (defeater). Таким образом, главные внешние причины (ГПВ) и аннуляторы обуславливают немонотонный характер человеческого рассуждения. В принципе это ассоциируется с методом «образовать и проверить» - общий прием, используемый при проектировании алгоритмов и программ. Обычно такие программы содержат конъюнкцию двух целей. Одна из которых действует как генератор предполагаемых решений, а вторая проверяет, являются ли эти решения приемлемыми.

$$\text{generate } (X), \text{ test } (X) \rightarrow \text{find}(X) \quad (1.17)$$

то есть имеет место недетерминированный процесс. Таким образом, в общем случае имеет место следующее

Определение 1.8 Пусть M произвольное множество рассуждений, $P(M)$ -мощное множество, N -пустое множество Пусть G^* -множество предполагаемых решений, T -множество тестов. Тогда пары $(G^* \wedge T)$ с множеством (M, N) определяет немонотонное пространство.

Таким образом, свойство немонотонности выражает общесмысловое рассуждение. А для общесмыслового рассуждения требуется логика вывода по умолчанию (default rules). Этот метод вывода предложен Р. Рейтером [18], основная идея которого заключается в расширении логики предикатов первого порядка правилами вывода по умолчанию (default rules).

В общем случае умолчание есть любое выражение, имеющее вид:

$$\alpha(x) : q_1(x), \dots, q_n(x) / \omega(x) \quad (1.18)$$

где $\alpha(x)$ -исходная посылка (Ant); $q_1(x), \dots, q_n(x)$ -подтверждения;

$\omega(x)$ -следствие (cons): $x = x_1, \dots, x_n$ -свободные переменные.

Схемы рассуждений складываются на основании индивидуального опыта, который формирует уникальные когнитивные структуры личности. Правда, рассуждения и поступки человека трудно предсказуемы, однако в привычных ситуациях он обычно демонстрирует некоторые устойчивые схемы рассуждений.

Это объясняется тем, что социальная среда устанавливает культурные нормы поведения, которые образуют общепринятую систему ценностей. Устанавливаемые культурой нормативные схемы

поведения создают возможность прогнозирования рассуждений и поведения людей в различных ситуациях.

Однако появление гипотезы о существовании «внутреннего процессора» [5] и «вспышек интуиции» [8,4], обуславливают более репрезентативное рассуждение по некоторым вопросам. Что касается такого понятия как «внутренний процессор», то это как бы встроенный врожденный информационный генератор образов вместе с их субъективным миром. Работа этого процессора порождает специфический спектр человеческих реакций, сознательно не контролируемых и протекающих чрезвычайно быстро. Этот вид рефлексии был назван быстрой рефлексией [5]. Механизм его универсален и не зависит от культуры, к которой принадлежит субъект.

Таким образом, общесмысловое рассуждение должно быть дополнено такими факторами как «быстрая рефлексия» и «вспышка интуиций». Процесс этот, на наш взгляд, можно назвать автоматическим самодотраиванием рассуждений. Тогда математическая модель рассуждений в контексте рефлексии будет представлять композицию общесмыслового рассуждения с автоматическим самодотраиванием. То есть имеет место выражение (1.18)

$$\alpha(x(\chi, \eta)) : q(x(\chi, \eta)) / \omega(x(\chi, \eta)), \quad (1.19)$$

где χ и η характеризуют «быструю рефлексия» и «вспышку интуиции», соответственно: $x(\chi, \eta) = x_1(\chi_1, \eta_1), \dots, x_n(\chi_n, \eta_n)$ - свободные переменные.

Таким образом, просматривается *отображение принципов рефлексии в математической модели рассуждений*.

Рассмотрим конструирование немонотонных рассуждений с точки зрения семантики. В этой связи для удобства рассуждений логику Р. Рейтера представим как формулу, удовлетворяющую тем или иным требованиям [16,19]. Введем следующее

Определение 1.9 Пусть A будет множеством замкнутых формул первого порядка в языке первого порядка, D будет множеством логик по умолчанию вида: $\alpha \wedge M_\beta \rightarrow \gamma$, где α , β , γ являются замкнутыми формулами в языке первого порядка. Для любого множества замкнутых формул первого порядка $S \subseteq L$ пусть $\Gamma(S)$ будет наименьшим множеством, удовлетворяющим трем свойствам:

1. $A \subseteq \Gamma(S)$

$$2. \text{Th}_L(F(S)) = \Gamma(S)$$

3. Если $\alpha \wedge M_{\beta} \rightarrow \gamma \in D$ и $\beta \notin S$, то $\alpha \rightarrow \gamma \in \Gamma(S)$.

Тогда множество замкнутых формул первого порядка $GE \subseteq L$ является обобщенным расширением для (A, D) , если и только если $\Gamma(GE) = GE$.

Определение 1.10 Пусть Σ_0 будет множеством всех моделей из A . Класс моделей из A , ограниченный с помощью $\langle D_1 \rangle, \Sigma_1$, определяется как

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \Sigma_0, & \text{если } \forall \alpha \in \Sigma_0, \alpha \neq \beta_1, \\ \{\alpha : \alpha \in \Sigma_0, \alpha \models a_1 \rightarrow \gamma\}, & \text{если } \exists \alpha \in \Sigma_0, \\ & \text{что } \alpha \models \beta_1 \text{ и } \alpha \models a_1 \rightarrow \gamma \\ \emptyset & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (1.20)$$

где - « \models »-знак удовлетворения, α - структура

Класс моделей из A , ограниченных с помощью $\langle D_n \rangle, \Sigma_n$, определяется как [19].

$$\Sigma_n = \begin{cases} \Sigma_{n-1}, & \text{если } \forall \alpha \in \Sigma_{n-1}, \alpha \models \beta_n, \\ \{\alpha : \alpha \in \Sigma_{n-1}, \alpha \models a_n \rightarrow \gamma_n\}, & \text{если для каждого } k \leq n, \\ & \text{для которого } \exists \alpha_k \in \Sigma_{n-1}, \text{ что } \alpha_k \models \beta_k \text{ и } \exists \alpha \in \Sigma_{n-1} \\ & \text{что } \alpha \models \beta_k \text{ и } \alpha \models a_n \rightarrow \gamma_n \\ \emptyset & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (1.21)$$

Тогда рекуррентно класс моделей из A ограниченных с помощью $\langle D \rangle$ определяется как [16,19].

$$\sum_A^{\langle D \rangle} = \begin{cases} \bigcap_{n=0}^{\infty} \sum_n, & \text{если для каждого } k \exists \sum_{k-1}, \text{ что } \alpha_k \in \sum_{k-1} \\ \alpha_k \models \beta_k \quad \exists \alpha = \bigcap_{n=0}^{\infty} \sum_n, \text{ что } \alpha \models \beta_k & (1.22) \\ \emptyset & \text{в противном случае} \end{cases}$$

На основании вышеизложенного имеет место

Метатеорема 1.2 Пусть (A, D) -теория умолчания с самодотраиванием, где A -нечеткое множество замкнутых формул первого порядка, D -нечеткое множество логик умолчания с самодотраиванием вида $(\alpha \wedge M_\beta \rightarrow \gamma)$ со своими функциями принадлежности. Если $\sum_A^{\langle D \rangle}$ -класс моделей A , ограниченных $\langle D \rangle$, удовлетворяет теории умолчания с самодотраиванием, то следующие условия эквивалентны:

1. $\sum_A^{\langle D \rangle}$ -непротиворечивый класс моделей
2. $\sum_A^{\langle D \rangle}$ -устойчивый класс моделей
3. $\sum_A^{\langle D \rangle}$ -семантически замкнут относительно логики умолчания с самодотраиванием
4. $\sum_A^{\langle D \rangle}$ -порождает собственный фильтр.

Рассмотренная выше модель рассуждений с автоматическим самодотраиванием представляет собой авторефлексию или рефлексию первого рода рассуждений.

Рефлексия второго рода имеет место относительно представлений о реальности, принципах принятия решений, авторефлексии и т.д. других объектов, что и является предметом дальнейшего рассмотрения.

1.5. Вопросы адекватности при принятии удовлетворительных решений

В процессе принятия решений встает проблема выбора такого сегмента знаний, который максимизировал бы нашу информацию. Такой подход напоминает подходы к решению проблемы немонотонной логики, использующие минимальные или предпочтительные модели.

Кроме того, основная сложность данного вопроса заключается в том, что в качестве базовой логики выступает в данной работе многозначная логика. В этой ситуации, для того, чтобы измерить информацию результирующей базы знаний P . Ягер предложил использовать меру специфичности [20].

Мера специфичности, ассоциированная с суждением P и обозначаемая как $S_p(C_n)$ (V есть A), предназначена для определения той степени, до которой суждение P «доносит» информацию о единственном значении до V . Данное значение рассматривается как суженность A до некоего одноточечного множества.

В фундаментальном смысле мера специфичности (C_n) измеряет объем информации, заключенной в суждении.

Так как мера специфичности зависит от A , то обозначается она в смысле $C_n(A)$.

Формально $C_n(A)$ определяется как отображение нечеткого множества на единичный интервал $C_n: F \rightarrow [0,1]$ и обладает следующими свойствами:

1. $C_n(A) = 1$, если $\exists x^* \in X \ A(x^*) = 1$ и

$$A(x) = 0 \text{ для всех } x \neq x^* ;$$

2. $C_n(\emptyset) = 0$;

3. Если A есть некое нормальное множество, имеет хотя бы один элемент с принадлежностью первого ранга (ранга один) и если $A \subset B$, то $C_n(A) \geq C_n(B)$.

Свойство один «уверяет» нас, что специфичность является максимальной в том случае, когда A «сообщает» нам точное значение V . Оно есть единица только в случае, если A есть одноточечное множество.

Свойство два «гарантирует» минимальную специфичность в том случае, когда A не дает нам никакой информации о значении V .

Свойство три практически «требует» наличия такой ситуации, когда при расширении (увеличении) множества уменьшается специфичность. Совершенно ясно, что чем больше информации будет содержаться в БЗ о некотором объекте исследований, тем полнее и с большим доверием мы можем относиться к принятым решениям.

Однако в момент времени t в БЗ может иметься минимально необходимый объем информации (учитывая, конечно, семантику информации), достаточный для принятия удовлетворительного для нас решения. Тогда мера специфичности C_{Π} будет определяться этим удовлетворительным объемом семантической информации.

Теперь можно сказать, что адекватность или степень адекватности будет определяться тем объемом семантической информации, который достаточен для принятия удовлетворительного решения (решений).

Степень адекватности или мера адекватности $Ad(J_y)$ есть мера удовлетворительной специфичности, т.е.

$$merAd(J_y) = merC_{\Pi}, \quad (1.23)$$

где J_y - объем семантической информации, позволяющий принять удовлетворительное решение, $J_{\min} \leq J_y \leq J_{\max}$.

Кроме того

$$merAd(J_y) : F \rightarrow [0.1].$$

Тогда, предложенная Р. Ягером мера C_{Π} [20] будет иметь следующий вид:

$$C_{\Pi}(A_y) = \int_0^{\alpha_{\max}} 1 / Card(F\alpha) d\alpha = merAd(J_y), \quad (1.24)$$

где α_{\max} индуцирует максимальный ранг принадлежности любого элемента A .

Необходимо заметить, что $A_y \subset A$.

A_{α} есть множество α -уровня для A :

$$A_{\alpha} = \{x / F(x) \geq \alpha\}.$$

При добавлении суждений мы имеем «рост специфичности» и, естественно, объема знаний, но до тех пор, пока оно не противоречит тому, что уже известно. В этом случае такое включение может иметь результатом потерю знания.

1.6. Теория удовлетворительности. Принципы

Герберт Саймон ввел термин «удовлетворительность», ссылаясь на методы выбора, которые дают хорошие результаты или удовлетворительные решения в отличие от оптимальных [21].

Принцип удовлетворительности решений является одним из самых простых принципов решения, который принимается за рациональный. Этот принцип является типичным принципом параметрического решения с функцией генерации неопределенной оценки.

В общем случае, пусть M и U универсумы альтернатив и неопределенностей соответственно. Тогда проблема решения представляется с помощью (M, U, g) , где $M \subset M$, $U \subset U$ и $g: M \times U \rightarrow \tilde{R}$, \tilde{R} - числовая ось. Функция g – представляет собой целевую функцию. Класс проблем решения \tilde{A} имеет вид:

$$\tilde{A} = P(M) \times P(U) \times \tilde{R}^{M \times U} \quad (1.25)$$

где $P(M)$ и $P(U)$ - мощные множества M и U соответственно,

$\tilde{R}^{M \times U} = \{g | g : M \times U \rightarrow \tilde{R}\}$ является классом функций результирующих решений.

Фундаментальная функция принятия решения должна определить как будет использована функция результирующего решения g для различения альтернатив, то есть для выбора решения. Необходимо отметить, что принципы решения должны классифицироваться в соответствии с их более точными структурами [16].

Однако в реальных условиях, в системах искусственного интеллекта (ИИ), не всегда имеют место точные структуры, да и в этом, наверное, нет необходимости, так как точность может и не гарантировать удовлетворительность.

Естественно, что в этой ситуации возникает проблема, связанная с исследованием вопросов «сходимости» полученных решений. Особую актуальность приобретает эта проблема в связи с использованием исчисления высказываний в системах ИИ, для целей принятия удовлетворительных решений, как в монотонных, так и в немонотонных условиях.

В условиях же неопределенности, нечеткости исходной информации эта проблема приобретает второй порядок актуальности.

В этой связи, следуя методологии конструирования топологического пространства, характеризующегося такими

фундаментальными понятиями как сходимость, операция замыкания, окрестность, необходимо рассмотреть следующие связанные вопросы:

1. Конструирование монотонного и немонотонного пространств.
2. Определение окрестностно-сходящихся систем в этих пространствах.

Реализация этих вопросов дает возможность обосновать понятие расширенной топологии как сверхструктуры, то есть дает математическую основу, позволяющую регулировать разные структуры, связанные с теорией удовлетворительности.

Основными сложностями при реализации этих задач явились вопросы, связанные с анализом сходимости полученных решений. Введение таких фундаментальных понятий как расширенные топологические пространства, расширенные фильтры [21], принципиально отличающиеся от классических, позволили решать вопросы сходимости в контексте теории удовлетворительности, что выгодно отличается от методов оптимизации в топологических пространствах. Важным шагом вперед явилось расширение этого подхода до уровня использования аксиоматики нечетких множеств в контексте рефлексивности процессов, что в некоторой степени предопределило новые возможности теории удовлетворительности (the satisfactory theory).

1.7. Теория расширенных фильтров. Синтаксис. Случай монотонности

Использование аксиоматики расширенных фильтров может успешно решать поставленные задачи в контексте удовлетворения сходимости полученных решений.

Так, Хаммер определил фильтр как «любое устройство, которое принимает или пропускает определенные элементы в множестве (системе) и отвергает другие. Это определение совместимо с общепринятой языковой концепцией и является широким обобщением топологического определения» [21].

Например, отношение удовлетворения является фильтром в том смысле, что по этому отношению пропускаются или принимаются определенные действия и отвергаются другие действия. То есть такая перспектива открывает широкие возможности и фильтры становятся унифицированной концепцией для математиков.

Так, функции являются фильтрами, уравнения – фильтрами, отношения – фильтрами, система аксиом – фильтрами, определения –

фильтрами, и т.д. Поэтому одна задача заключается в заострении понятий о фильтрах, то есть в более конкретном определении класса фильтров, а другая – возможностей «фильтрации».

Что касается класса фильтров, то в работе предлагается рассмотрение аксиоматических основ построения нечетких расширенных фильтров в условиях монотонных и немонотонных рассуждений, используемых в сложных системах при принятии удовлетворительных решений [22].

Имеет место следующее

Определение 1.11 [23] Пусть (Γ) – непустое множество F -функций, $\gamma \subset \Gamma$, тогда $\mathfrak{R} \in P(\Gamma)$ есть расширенный нечеткий фильтр, если

1. $\bigcap_i A_i \subset A \in \mathfrak{R}, \forall i = \overline{1, n}, B \in P(\Gamma), \gamma : A \rightarrow B$ влечет $B \in \mathfrak{R}$
2. $\emptyset \notin \mathfrak{R}, \Gamma \in \mathfrak{R}$

На основании положений, изложенных в [23] можно показать, что совокупность всех нечетких фильтров в множестве (Γ) создает нечеткую дистрибутивную решетку с частичным упорядочением (\mathbb{L}, \leq) . Эти результаты важны в контексте анализа систем нечетких фильтров и положением фильтра в структуре решеток, что дает возможность определить многие свойства «фильтрации» и, следовательно, свойства сходимости F -фильтра.

Тогда имеет место следующая

Метатеорема 1.3 Пусть $P(\Gamma)$ есть расширенный нечеткий фильтр. Пусть совокупность всех F -фильтров в множестве (Γ) F -решетка (\mathbb{L}, \leq) . Пусть упорядоченная пара (u, v) и множество (M, N) определяют нечеткое изотонное пространство F -IS. Тогда пара $(F$ -IS, $(\mathbb{L}, \leq))$ определяют F – изотонное пространство с F – решеткой фильтра.

Семантика. Окрестностно-сходящиеся системы

Семантика полученных решений в F – изотонном пространстве, F -IS, должна отвечать условиям аксиомы удовлетворения (axiom of satisfactory).

Аксиома удовлетворения

1. $F - \gamma \rightarrow (L, \leq)$ в $(F$ -IS, $(\mathbb{L}, \leq))$ – непротиворечиво
2. $F - \gamma \rightarrow (L, \leq)$ в $(F$ -IS, $(\mathbb{L}, \leq))$ – истинно

Отсюда имеет место следующая

Метатеорема 1.4 Пусть пара $(F$ -IS, $(\mathbb{L}, \leq))$ определяет F – изотонное пространство с F – решеткой фильтров.

Если $F - \gamma \rightarrow (L, \leq) = AS$, то тройка $\langle F - IS, (L, \leq) AS \rangle$ определяет F – изотонное пространство с удовлетворительными решениями.

Определение 1.12 Упорядоченная пара (u, v) двойственных F -изотонных функций определяет окрестностно-сходящуюся систему.

Пусть $\bigcap_i A_i \subset A = \text{dom}f$, а $Jmf \subseteq B$. Для множества F -фильтров, представляющих структуру решетки, область значений Jmf определяется неоднозначно. Ясно одно, что область определения $\text{dom}f$ представляет собой множество высказываний в F -изотонном пространстве и $Jmf \subseteq B$ представляет собой F – решетку фильтров.

Таким образом, если в результате работы правил условного нечеткого вывода следствия B_i в F – изотонном пространстве удовлетворяют условиям Метатеоремы 1.4, то область значений определяет сходимость системы. Тогда область определений $\text{dom}f$, представляет собой окрестность системы. Учитывая двойственность пары (u, v) F -изотонных функций, можно сказать, что сходимости являются выборками окрестностей и окрестности являются выборками сходимостей. А это означает, что окрестности и сходимости являются фильтрами.

1.7.1. Нечеткие фильтры. Принятие удовлетворительных решений

Что касается понятия фильтра в случае немонотонных рассуждений, то здесь, естественно, имеют место некоторые отличия от общепринятых конструкций в теории структур.

Представим, следуя [23], следующее

Определение 1.13 Пусть теория умолчания (A, D) представляет собой непустой класс F -моделей, ограниченных $\langle D \rangle \sum_A^{<D>}$, тогда $\Psi \subseteq P(A, D)$ есть семантический фильтр на (A, D) , если:

1. $\sum_A^{<D>} \in \Psi$
2. $\emptyset \notin \Psi$, $(A, D) \in \Psi$

Определение 1.14 Если $\sum_A^{<D>} = \emptyset$ для каждого перечисляемого $\langle D \rangle$, то не существует ни одного устойчивого класса F -моделей (A, D) .

Теперь мы вплотную подошли к формированию немонотонного пространства, структура которого обладает свойствами немонотонности в нечеткой концепции. Не претендуя на общность, дадим следующее

Определение 1.15 Пусть M – произвольное множество, $P(M)$ – мощное множество. Пусть (A, D) – теория умолчания, где $A \subset M$ F -множество замкнутых формул первого порядка, $D - F$ – множество логик умолчания вида $\alpha \wedge M_\beta \rightarrow \gamma$ N – непустое множество. Тогда (A, D) с множествами (M, N) определяет F -немонотонное пространство.

Метатеорема 1.5 Пусть (A, D) с множествами (M, N) определяет F – немонотонное пространство. Если выполняются условия Метатеоремы, $\sum_A^{<D>} | = (A, D)$, то тройка $\langle (A, D), (M, N), \sum_A^{<D>} \rangle$ – определяет F -немонотонное пространство с удовлетворительными решениями.

Что касается вопросов сходимости полученных решений, то они обусловлены условиями Метатеоремы 1.1, 1.5 и Определений 1.13, 1.14.

Замечание. Введение структуры расширенных нечетких фильтров, которые принимают или отвергают те или иные решения, совершенно естественно требуют наличия некоторой коструктуры, то есть кофильтров (дуальных фильтру). В нашем случае это будет *расширенный нечеткий идеал*. То есть структура, характеризующая обратное рассуждение.

Что касается монотонных рассуждений, то обратное рассуждение очевидно (см. Определение 1.12). Математика немонотонных рассуждений показывает, что при расширении (extension) теории (A, D) обратного рассуждения нет, то есть операция сужения (contraction) не имеет место [24].

Однако в работе предлагается приближенный механизм обратного рассуждения, то есть операция сужения (contraction), заключающаяся в проведении обратного рекуррентного процесса, $\gamma \wedge M_s \rightarrow \alpha M_s$ – отображает непротиворечивый процесс механизма обратной рекуррентности. Тогда имеет место

Определение 1.16 Пусть теория умолчания (A, D) представляет непустой класс F -моделей из A , ограниченных $\langle D \rangle$, то $J_s \subseteq P(A, D)$ есть *семантический идеал* J_s на (A, D) , если:

1. $\sum_A^{<D>} = \emptyset$

2. $\emptyset \in J_s$

Таким образом, необходимо заметить, что процесс аннуляции расширений (механизм обратной рекуррентности), на содержательном уровне, как бы совпадает с обратным процессом „фильтрации”. То

есть расширенный семантический фильтр замкнут относительно операции расширения, а J_s - операции сужения. Отсюда имеет место некоторое соответствие синтаксиса и семантики, что дает возможность сделать попытку восполнить пробелы аксиоматики в условиях немонотонных рассуждений.

Пусть M множество альтернатив и U -множество «эталонных» объектов. Пусть множество «эталонных» объектов U представляет собой множество нечетких фильтров [23]. Пусть множество нечетких фильтров U представляет собой дистрибутивную решетку (L, \leq) . Структура $\tilde{M}S^0$ производит парные сравнения (m_i, u_i) , где $m_i \in M, u_i \in U$, с целью принятия удовлетворительного решения.

Определение 1.17 Множества M, U называются сравнимыми, если они связаны отношением включения

$$M \sim U \Leftrightarrow (M \subset U) \vee (U \subset M)$$

$M \not\sim U$ – в противном случае.

При операциях по «фильтрации» тех или иных получаемых решений возникает задача оценки не по одному, а по нескольким факторам, признакам, частным критериям. В этой связи меры близости объектов, описываемых дихотомическими признаками, принято выражать в терминах четырехклеточной таблицы сопряженности: α - число признаков, отсутствующих у M и U одновременно, d - число совпадающих признаков b (или c), присутствующих у M , но отсутствующих у U (или наоборот), $a+b+c+d=n$. Учитывая, что работа ведется в решетчатой структуре нечетких фильтров, необходимо дать

Определение 1.18 Положительной оценкой на решетке нечетких фильтров $F(x)$ называется функция $v: F(x) \rightarrow R^+$, удовлетворяющая свойству

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) = v(A) + v(B)$$

и условию, из $A \subset B$ следует $v(A) < v(B)$

Положительная оценка v определяет на $F(x)$ метрику

$$\rho(A, B) = v(A \cup B) - v(A \cap B) \quad (1.26)$$

Определение 1.19 Решетка $F(x)$ с положительной оценкой v и метрикой ρ называется метрической решеткой нечетких фильтров.

На основании определений (1.17, 1.18) и работы [25], представим один из возможных показателей мер близости в пространстве нечетких фильтров.

Вид меры близости

$$\frac{a+b}{a+b+c+d},$$

Вид меры близости на L

$$\frac{\nu(l) - d\nu(X, Y)}{\nu(l)}$$

$$\frac{l}{n} (n - \sum_i |x_i - y_i|)$$

Таким образом, если полученное решение удовлетворяет пользователя в интервале структуры L , то система считается структурно устойчивой. В противном случае производится направленное обучение по каждой структуре в отдельности с целью удовлетворения критериям решетчатой структуры (фильтру).

Отсюда самоорганизация отдельных структур метасистемы осуществляется процессами направленного обучения.

1.8. Аксиоматика нечетко-рефлексивных фильтров

Аксиоматика четких и нечетких расширенных фильтров, в контексте принятия удовлетворительных решений, подробно представлена выше и опубликована в ряде работ [7,15,23,26]. Однако синергетические методы анализа взаимодействия человека - компьютерных систем были бы неполными, если не учитывать рефлексивные процессы как в контексте рассуждений, так и при принятии удовлетворительных решений.

В этой связи возникает настоятельная необходимость доработки нечетких расширенных фильтров аксиоматикой, учитывающей рефлексивную составляющую. Представим

Определение 1.20 Пусть $(A, D)'$ - теория умолчания с самодистраиванием. Пусть $(A, D)'$ представляет собой непустой класс нечетко-рефлексивных моделей, ограниченных $\langle D \rangle$, $\sum_A^{\langle D \rangle}$. Тогда $\Psi \subseteq P(A, D)'$ есть нечетко-рефлексивный фильтр на $(A, D)'$, если:

1. $\sum_A^{\langle D \rangle} \in \Psi$
2. $\emptyset \notin \Psi$, $(A, D)' \in \Psi$.

Определение 1.21 Если $\sum_A^{\langle D \rangle} = \emptyset$ для каждого перечисленного $\langle D \rangle$, то не существует ни одного устойчивого класса нечетко-рефлексивных моделей $(A, D)'$.

Теперь мы вплотную подошли к формированию пространства, структура которого обладает свойствами немонотонности в нечетко – рефлексивной концепции. Дадим следующее

Определение 1.22 Пусть M – произвольное множество. $P(M)$ – мощное множество. Пусть $(A, D)'$ – теория умолчания с самодистраиванием, где $A \subset M$. F – множество замкнутых формул первого порядка. D -множество логик умолчания с самодистраиванием вида $(\alpha \wedge M_\beta \rightarrow \gamma)$, N – непустое множество. Тогда $(A, D)'$ с множествами (M, N) определяет F – немонотонное пространство с рефлексией.

Метатеорема 1.6 Пусть $(A, D)'$ с множествами (M, N) определяет F - немонотонное пространство с рефлексией. Если выполняются условия Метатеоремы 1.5, где $\sum_A^{<D>} (A, D)'$, то тройка $\langle (A, D), (M, N), \sum_A^{<D>} \rangle$ – определяет F - немонотонное пространство, в рефлексивной концепции, с удовлетворительными решениями.

Практическая реализация отображения принципов рефлексии в модели принятия удовлетворительных решений представлена в [2].

Выводы

В первой главе рассмотрены философско-математические проблемы интеллектуальной поддержки решений в сложных системах, заключающиеся в синергетическом анализе знаний и в разработке алгоритмов восприятия информации как в четких, так и нечетких условиях.

Разработана аксиоматика монотонных и немонотонных рассуждений, на базе которой предложены выводы в четких и нечетких условиях, поддержанных алгоритмом оценки степени адекватности в контексте рассуждений.

Сформулирован принцип удовлетворительности в контексте принятия решений, позволивший разработать теорию расширенных алгебраических фильтров в монотонном и немонотонном пространствах рассуждений, и дать формализацию и связь этих пространств с принципами удовлетворительности принятых решений.

Литература

1. Бажанов В.А. Рефлексия в современном науковедении. Рефлексивные процессы и управление, Т. 2., №2, июль – декабрь 2002. – с. 73-89.

2. Владимирский Э.И. Отображение принципов рефлексии в математической модели принятия удовлетворительных решений. Тр. IV Межд. Конференции «Идентификация систем и задачи управления», SICPRO'05. Москва 25-28 января 2005. М.: Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, 2005. С. 1681-1688.

3. Владимирский Э.И. Отображение принципов синергетики на множество задач, реализуемых интегрированной геоинформационной системой. Тр. пятой межд. науч. – технич. конференции «Микроэлектронные преобразователи и приборы на их основе». МЭПП, Баку 5-8 декабря 2005. – с. 212-214.

4. Симонов П.В., Романовская Т.Б., Файберг Е.П. Две культуры //Вопросы философии. №1, 1994.- с. 154-158.

5. Лефевр В.А., Дж. Адамс – Вебер. Функции быстрой рефлексии в биполярном мире. Рефлективные процессы и управление. Т. 1. №1, 2001. – с. 34-46.

6. Оре Л. Теория графов. М.: Наука, 1968. – 352 с.

7. Садыхов Р.А., Мамедов А.М., Владимирский Э.И., Мамедова У.С. Soft Computing и теория функциональных систем. Тр. Межведомственного научного совета по экспериментальной и прикладной физиологии. Развитие теории функциональных систем. Т. 8. М.: 1999.- с. 328-348.

8. Князева Е.Н., Курдюмов С.П. Интуиция как самодооствраивание. Вопросы философии, №2, 1994. – с. 110-122.

9. Владимирский Э.И., Киясбейли Ш.А., Шишонок Н.А. Теория неопределенности в реализации задач надежности сложных систем. Прикл. задачи анализа решений в технич. системах. Сб. науч. Тр. – Рига: Риж. Политехн. Ин-т, 1988. – с.17-21.

10. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта /Под ред. Д.А. Пospelова. –М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 312 с.

11. Кузьмин В.Б. Построение групповых решений в пространстве четких и нечетких бинарных отношений: М.: Наука. гл. ред. физ.- мат. лит., 1982.- 168 с.

12. Мединцев Р.А. Рефлективный менеджмент – средства выживания компаний в новой экономике. Рефлективные процессы и управление. Тез. IV Межд. симпозиума 7-9 октября 2003 г. М.: 2003. – с. 99-101.

13. Владимирский Э.И. Монотонные и немонотонные логики в правилах принятия удовлетворительных решений. Тезисы докладов Всесоюзной научн. техн. конф. «Искусственный интеллект в

автоматизированном управлении технологическими процессами». Грозный. – Москва., 1989. – с. 62-63.

14. Гисин В.Б., Цаленко М.Ш. Алгебраическая теория систем и ее приложения //Системные исследования. М.: Наука. 1984. – с. 130-151.

15. Pashaev A.M., Sadigov R.A., Vladimirsky E.I., Mamedova U.S., Jafarzade T.R., Agamaliyeva J.A. Self – Organizing Soft Computing Technology and Normal Physiology of the Person for Want of Acceptance of Satisfactory Solutions //First International Conference on Soft Computing and Computing with Words in System Analysis, Decision and Control. ICSCCW. 2001 June 6-8, 2001, Antalya, Turkey, 2001. – pp. 226-232.

16. Владимирский Э.И. Рефлективное управление как математическая модель принятия удовлетворительных решений. Ученые записки НАА, Т. 6, №1, 2006. – с. 132-137.

17. Pollock John. Defeasible Reasoning Gognitiv Science. 11, 1987. – pp. 481-518.

18. Reiter R.A. Logic for default reasoning. Artificial Intelligence. №13, 1980. – pp. 81-132.

19. Keki B. Irani and Zhaogang Qion Default Reasoning – Extension and Semantics «Pros. 3rd Conf – Wasington D.C., 1987, pp. 277-281.»

20. Yager R.R. Measuring tranquility and anxiety in decision – making: an application of fuzzy sets. Int. J. Man – Machine Studies. 8 (3). 1982. – pp. 139-146.

21. Hammer P.S. «Filters in General» in Advances in Mathematical Systems Theory. P.S. Hammer Ed, University Park, PA: Penn. State Univ., 1969, pp. 107-120.

22. Robert F., Erlandson. The satisfying Process: A New Look IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics. SMC 1981, pp. 740-752.

23. Владимирский Э.И., Мамедова У.С., Садыхов Р.А. Нечеткие фильтры в принятии решений //Ученые записки, АГНА, 1998. №3, с. 169-172.

24. Reiter R.A. Logic for default reasoning. Artificial Intelligence, №136 1980. – pp. 81-132.

25. Раушенбах Г.В. Меры близости и сходства //Сб. Анализ нечисловой информации в социологических исследованиях. – М.: Наука, 1985. – с. 169-203.

26. Владимирский Э.И., Мамедова У.С. Принятие удовлетворительных решений в сложных системах. Тр. II Международного симпозиума «Проблемы математического моделирования, управления и информационных технологий в нефтегазовой промышленности» Изв. НАНА Т.1, Баку, 1998 – с. 37-39.

ГЛАВА 2. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМ ИДЕНТИФИКАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Проблема анализа и обработки временных рядов в контексте принципов синергетики приобретает особую актуальность. Временные ряды являются основным результатом экспериментов как натуральных, так и вычислительных. В качестве приоритетных обычно указывают задачи метеорологии, геофизики, финансового анализа. В последнее время к ним присоединились физиология, медицина и социальные науки.

В процессе постановки задач анализа и обработки временных рядов возникают трудности принципиального характера: неизвестно какой именно математический объект следует поставить в соответствие полученным данным: в силу какой неопределенности в течение длительного времени к анализу временных рядов подходили с позиций математической статистики; использовался ли соответствующий математический аппарат, включающий понятия последовательностей случайных величин, случайных процессов, статистических моделей, стохастических дифференциальных уравнений, хаотических моделей и т.д.

В общем случае задача моделирования по временным рядам известна под именами «идентификация систем» и «прогноза систем» [1].

В работе состояние и перспективы реализации исследуемой проблемы будут рассматриваться в контексте задач идентификации и задач прогноза.

Задача идентификации. При ее решении делается попытка ответить на вопрос, каковы параметры системы, породившей данный временной ряд. Параметры могут быть самыми различными – статистические распределения, параметры статистических моделей, спектральные свойства и т.п. Важно, чтобы эти параметры помогли бы идентифицировать систему (процесс), то есть отличить ее от других.

Задача прогноза. Она состоит в том, чтобы по данным наблюдений предсказать будущие значения измеряемых характеристик или, более широко, будущее состояние анализируемого объекта.

Таким образом, при обработке временных рядов обычно решают несколько типов задач:

- задачи измерения характеристик динамических систем, инвариантных относительно замены переменных (размерности аттракторов, ляпуновские показатели, энтропии, аппроксимации

уравнений движения по экспериментальным данным, которые относятся к проблеме идентификации).

- задачи динамического прогноза временных рядов;
- задачи классификации для диагностических целей (другая часть задач идентификации);
- определение типа данных (т.е. следует ли данные рассматривать как детерминированные или как случайные).

Здесь также имеет место задача «идентификации временного ряда».

В общем случае скалярным временным рядом (ВР) будет называться массив из N чисел, представляющих собой значения некоторой динамической переменной $x(t)$ с постоянным шагом Δt по времени, то есть в моменты $t_i = t_0 + (i - 1)\Delta t$; $x_i = x(t_i)$, $i = \overline{1, N}$.

В контексте обработки ВР рассмотрим сначала некоторые черты статистических подходов, а потом обратимся к методам нелинейной динамики.

2.1. Статистические методы обработки

В основе многих статистических методов обработки лежит понятие статистической модели.

Пусть имеет место временной ряд x_i и «шум» - последовательность некоррелированных и одинаково распределенных случайных величин ξ_i с нулевым средним ($E\xi_i = 0$).

Пусть i -й элемент ряда x_i представлен как функция m предшествующих элементов x_{i-1}, \dots, x_{i-m} и $k+1$ случайных величин ξ_i, \dots, ξ_{i-k} , тогда

$$x_i = F(x_{i-1}, \dots, x_{i-m}, \xi_i, \dots, \xi_{i-k}). \quad (2.1)$$

Обычно ограничивались линейными функциями F , то есть моделями вида:

$$x_i = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{i-y} + \sum_{j=0}^k b_j \xi_{i-j}. \quad (2.2)$$

Здесь первая сумма представляет авторегрессию (Auto Regression), а вторая сумма - скользящее среднее (Moving Average). Общее название ARMA.

Коэффициенты α_j и b_j определяются, например, методом наименьших квадратов (МНК).

Получение искоемых коэффициентов можно рассматривать как возможное решение задачи идентификации, а соотношение (2.2) можно использовать для прогноза следующего значения по m предыдущим. В качестве прогнозируемой величины обычно используется среднее значение

$$\hat{x}_i = Ex_i = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i x_{i-j}. \quad (2.3)$$

Необходимо отметить, что шум является совершенно необходимой и неотъемлемой частью таких линейных моделей. В отсутствие шума поведение модели абсолютно не похоже на исследуемый ряд. Поэтому подобные «линейные прогнозы» можно делать лишь на сравнительно наибольшее число шагов вперед [2].

Однако главных причин популярности (2.2) - две: это единственная модель, для которой можно получить аналитические результаты, а ее построение и использование требует сравнительно небольших затрат машинного времени.

2.2. Нелинейные методы анализа временных рядов

Анализ временных рядов методами описания нелинейных динамических систем (ДС) приобретает все более широкое распространение.

В терминах данного описания исследуемые процессы называются хаотическими или, как еще говорят, содержат в себе детерминированный хаос. С точки зрения линейных методов анализа эти процессы – стохастические. Однако нелинейный анализ показывает, что, хоть их и нельзя причислить к детерминированным, абсолютно случайными они тоже не являются. Другими словами, предсказание системы с определенной точностью оказывается возможным, но лишь на ограниченное число шагов.

Для описания формальных характеристик хаотических процессов, необходимо рассмотреть такие понятия теории сложных систем как фазовое пространство и аттрактор.

Математическим образом всех движений динамической системы является ее фазовый портрет.

Фазовый портрет дает не только геометрическое изображение отдельных движений, состояний равновесия, периодических, хаотических и стохастических движений, но и определяет «логику»

поведения ДС, ее зависимость от параметров. Если поведение системы стохастично, то фазовая траектория заполняет некоторый объем фазового пространства; если это детерминированный периодический процесс, то траектория заполнит поверхность какой-либо симметричной фигуры, например – тора.

Фазовые портреты систем с хаотическим поведением также заполняют некоторую ограниченную область фазового пространства. В связи с этой особенностью фазовый портрет называют аттрактором системы (от англ. to attract – притягивать). То есть можно сказать, что все траектории состояния системы стягиваются к ее аттрактору. Добавим также, что изучение нелинейной системы связано с изучением ее аттрактора. Имеет место следующее

Определение 2.1 [3]. Аттрактором называется замкнутое множество A , которое является инвариантным относительно отображения ($f(A) = A$) и имеет область притяжения U_0 ($U_0 \supset A$), все точки из которой попадают в A (то есть $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(U_0)$).

Аттракторы же систем, демонстрирующих хаотическое поведение, называются странными аттракторами. Они обладают геометрической (масштабной) инвариантностью или скейлинговой структурой. Кроме того, известно, что странные аттракторы для динамических систем и точечных изображений обычно имеют структуру канторова множества. Этим они отличаются от простых аттракторов. Размерность странного аттрактора – дробная.

Известно, что можно получить удовлетворительную картину странного аттрактора небольшой размерности, если вместо переменных x , входящих в уравнения динамических систем, использовать m -мерные вектора, получаемые из элементов временного ряда по тому же принципу, что и в задачах авторегрессии.

$$z_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}\} \quad (2.4)$$

В этой связи рассмотрим теорему Такенса [4].

Рассматривается ДС вида $\dot{x} = f(x)$ в предположении, что через любую точку фазового пространства x проходит только одна траектория, и если в момент t_0 траектория оказалась в точке $x_0 = x(t_0)$, то в момент $t_0 + \tau$ она окажется в точке $x_1 = x(t_0 + \tau)$, причем x_1 зависит от x_0 и τ , но не от t_0 .

То есть существует отображение Y^τ , переводящее x_0 в x_l :
 $x_l = Y^\tau(x_0)$.

Тогда члены обрабатываемого ряда

$$h_i = h(t_i) = \Phi(x(t_i)) = \Phi(x_i),$$

можно представить как [4]

$$\begin{aligned} h_k &= \Phi(x_k) = \Phi_0(x_k); \\ h_{k+1} &= \Phi(x_{k+1}) = \Phi(Y^\tau(x_k)) = \Phi_1(x_k); \\ h_{k+2} &= \Phi(x_{k+2}) = \Phi(Y^\tau(Y^\tau(x_k))) = \Phi_2(x_k) \\ &\dots\dots\dots \\ h_{k+m-1} &= \Phi_{m-1}(x_k) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Таким образом, если ввести новый m -мерный вектор

$$z_k = (h_k, h_{k+1}, \dots, h_{k+m-1}),$$

то должна существовать функция A , зависящая только от исходной динамической системы (т.е. функций f или φ) и параметров m и τ такая, что $z = A(x)$.

Ф. Такенсом [4] была доказана теорема, которая утверждает, что почти для всех τ и $m \geq 2d + 1$, где d - размерность аттрактора, отображение $z = A(x)$ будет взаимно однозначным и непрерывным. Если же в пространстве z -векторов выделить множество, на которое отображаются вектора x , то на этом множестве отображение будет обратимым, и можно условно записать $x = A^{-1}(z)$.

Подставив выражение для x в соотношение $h_{k+m} = \Phi_m(x_k)$, получим:

$$\begin{aligned} h_{k+m} &= \Phi_m(A^{-1}(z)) = F(z) = \\ &F(h_k, h_{k+1}, \dots, h_{k+m-1}), \quad \forall K. \end{aligned}$$

2.3. Методы прогнозирования временных рядов

Пусть требуется построить предсказывающую систему (предиктор) с дальновидностью 1 шаг по исходной выборке, то есть требуется вычислить $N + 1$ -ю величину h_{N+1} временного ряда $h_1, h_2, \dots, h_k, h_{k+1}, \dots, h_{k+m}, \dots, h_N$ данной системы по N предыдущим. Для решения задачи используется трехслойная нейронная сеть (НС) с $N_1 = m - 1$ нейронами на входном слое и $N_3 = 1$ нейронам на выходном [5]. Входные данные представляются в виде $m - 1$ -мерных

z -векторов. Компоненты z -векторов $h_{k+1}, h_{k+2}, \dots, h_{k+m-1}$ подаются на N_j входных нейронов соответственно. На выходной нейрон в качестве желаемого результата в процессе обучения подается величина h_{k+m} . Согласно теореме Такенса, для некоторых значений m должна существовать такая функция F , что

$$h_{k+m} = F(h_k, h_{k+1}, \dots, h_{k+m-1}).$$

Таким образом, после завершения процесса обучения нейронная сеть предположительно «умеет» вычислять функцию F . Если возникает необходимость продолжить ВР, достаточно подать на вход сети h_{N-m+1}, \dots, h_N компоненты ВР и получить на выходе исходную величину - h_{N+1} .

На базе использования трехслойной нейронной сети можно произвести прогнозирование временного ряда, например, «системы Лоренца» [5].

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(X - Y); \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ; \\ \dot{Z} &= XY - bZ.\end{aligned}$$

Траектории этой системы при всех положительных значениях параметров σ, r, b входят в некоторую сферу в фазовом пространстве X, Y, Z , то есть у системы существует аттрактор и находится он внутри этой сферы.

Методы прогнозирования обычно делят на локальные, глобальные и третий тип «глобальные с локальными свойствами».

Пусть согласно теореме Такенса должно существовать некоторое отображение $\Psi(z)$ такое, что

$$z_{i-1} = \Psi(z_i), \quad (2.6)$$

или

$$x_{i-k} = \Psi(z_i), \quad (2.7)$$

где k соответствует искомой координате вектора z_{i+1} .

Локальные методы

Локальные методы названы так потому, что функция F или Ψ строится как множество локальных аппроксимаций в окрестностях отдельных точек, причем сшивать друг с другом эти отдельные аппроксимации не требуется.

Для поиска $F(z)$ находится k ближайших соседей точки z , обозначаемых z_{oi} , $i = \overline{1, k}$.

Пусть в окрестности точки z функцию F будем аппроксимировать полиномом степени n , то есть ищется $F(z) = P_n(z)$. Полином $P_n(z)$ зависит от $\sim m^n$ параметров, коэффициентов. Их значения определяются методом наименьших квадратов (МНК), минимизируя функционал

$$\sum_{i=1}^k (P_n(z_{oi}) - F_i)^2 = \min.$$

Здесь k должно быть больше числа коэффициентов полинома. По этой причине очень редко используются полиномы степени выше 2, обычно только при $m \leq 3$.

В контексте реальной реализации используются: методы нулевого порядка; методы первого порядка, нелинейные локальные аппроксимации [1].

Глобальные и глобально-локальные методы

В [1] отмечено, что к глобальным методам относят те, в которых делается аппроксимация уравнений динамики единой функцией во всей используемой области z -пространства, то есть сразу по всему множеству N известных пар $\{F_i, z_i\}$. Эти методы используются не столько для прогнозирования, сколько для аналитического исследования полученных уравнений движения, либо нужны глобальные идентификационные характеристики всей системы в целом. Здесь в качестве аппроксимирующей функции используются обычно многочлены $P_n(z)$. Для определения коэффициентов многочлена решается задача минимизации полной ошибки

$$\sum_{i=1}^k (P_n(z_{oi}) - F_i)^2 = \min.$$

При обработке экспериментальных данных используют два других метода, которые называются глобальные аппроксимации с локальными свойствами. К ним относятся метод радиальных базовых функций (РБФ) и нейронные сети – перцептроны.

Остановимся на рассмотрении радиальных базовых функций.

Радиально-базовые функции

Радиально базовые функции предлагались для аппроксимации неизвестных функций многих переменных по набору известных точек [1].

Однако с их помощью также строится аппроксимация уравнений динамической системы.

Для этого выбирается M точек – центров z_{ck} и базовая или базисная функция одной переменной $\Psi(r)$. Отображение F строится в виде:

$$F(z) = \sum_I^M \alpha_k \Psi(\|z - z_{ck}\|), \quad (2.8)$$

а коэффициенты α_k определяются из условия минимизации функционала ошибки

$$\sum_i (f_i - F(z_i))^2 = \sum_i (f_i - \sum_I^M \Psi_{ik} \alpha_k)^2 = \min, \quad (2.9)$$

где

$$\Psi_{ik} = \Psi(\|z_i - z_{ck}\|).$$

Вычисление ляпуновских показателей по реализации

Одной из особенностей хаотических режимов является неустойчивость каждой траектории, принадлежащей хаотическому аттрактору.

Количественной мерой этой неустойчивости оказались характеристические показатели Ляпунова. Они являются одной из важнейших характеристик аттрактора, поскольку позволяет оценить:

- фрактальную размерность аттрактора;
- энтропию динамической системы;
- характерное время предсказуемости поведения системы.

Поскольку критерием хаотической динамики служит присутствие положительного старшего ляпуновского показателя, представляет большой интерес возможность его оценки на основании обработки временных рядов (реализаций).

В [4] была предложена процедура реконструкции аттрактора в фазовом пространстве методом запаздываний и определения

размерности вложения m . Дальнейшая последовательность действий похожа на алгоритм Бенеттина [1].

Идея реконструкции уравнений динамической системы по наблюдаемой реализации отражена в [1] и вкратце состоит в следующем. Сначала определяется размерность вложения, то есть размерность фазового пространства конструируемой модели. Далее за основу берут некоторую форму уравнений, содержащую набор неопределенных коэффициентов, например, коэффициентов разложения правых частей уравнений в ряд Тейлора по динамическим переменным. Чтобы наблюдаемая реализация оптимальным образом описывалась данной моделью, используется метод наименьших квадратов. Далее формулируется условие минимума некоторой положительной величиной типа суммы квадратов невязок. Из условия минимальности этой величины получается система уравнений, позволяющая найти неопределенные коэффициенты. Для случая одномерных отображений предложен новый метод оценки параметров модели, основанный на использовании метода наименьших квадратов (МНК) и расчете целевой функции с помощью итерирования модельного отображения в обратном времени. В численном эксперименте показано, что новый метод дает значительно более точные оценки, чем традиционный подход, при умеренных уровнях шума, меньших некоторого порога. Чем больше числа оцениваемых параметров, тем выше этот порог, то есть шире область большей эффективности нового метода. Здесь в качестве тестового объекта была выбрана эталонная хаотическая система – квадратичное отображение

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2. \quad (2.10)$$

Произведена также оценка трех неизвестных параметров для случая того же квадратичного отображения:

$$x_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2 x_n - \alpha_3 x_n^2, \quad (2.11)$$

подтверждающая эффективность предложенного метода.

Моделирование временных рядов на фазовых плоскостях

В [6] предложен метод моделирования временных рядов биржевых показателей на фазовых плоскостях. Отличительной чертой метода являются преобразования, подобные формуле Шеннона для определения информационной энтропии, в том числе в дифференциальной форме. Результаты могут рассматриваться как отображение функциональных показателей в фазовом пространстве.

С учетом связей в объектах возможны замены переменных, что позволяет получить для аддитивных показателей $Q(j)$ различной размерности

$$V_1(i/j) = -q(i/j) \ln q(i/j), 1 \leq j \leq B, \quad (2.12)$$

где i - индекс элемента $i = \overline{1, A}$; $q(i/j)$ - удельный вес элемента i , определенный по показателю j :

$$q(i/j) = \frac{Q(i/j)}{\sum_{i=1}^A Q(i/j)}.$$

Для произвольных показателей $R(k)$ и других определены модели

$$\begin{aligned} V_2(i/k) &= \ln R(i/k), 1 \leq k \leq C, \\ V_3(i/k) &= -\frac{1}{R(i/k)}, 1 \leq k \leq C \end{aligned} \quad (2.13)$$

Соответственно отображения предложено задавать в виде

$$U(i/\dots) = \frac{V(i/\dots) - M[Y]}{\sigma[V]}. \quad (2.14)$$

Главным достоинством моделей является возможность объединять показатели различной размерности, например, в форме

$$U(i/\sum_j U) = \frac{1}{\sigma\left[\sum_j U\right]} \sum_j [\pm U(i/j)], \quad (2.15)$$

и получать наиболее удобные для анализа модели без привлечения априорных весовых коэффициентов.

Выделение самых сильных диагностических признаков и их комбинаций позволило сформулировать задачу анализа временных рядов.

Сочетание моделей трактуется как аналог фазового портрета, обобщающий связь временных рядов [6].

Оценка корреляционной размерности по наблюдаемой

Рассмотрим временной ряд, полученный в результате записи наблюдаемой переменной величины в последовательные равноотстоящие моменты времени x_1, x_2, \dots, x_N .

Зададимся некоторым целым m и используем идею, реконструкции аттрактора методом запаздывания в пространстве размерности m , то есть положим

$$x_i = (x_j, x_{i-p}, x_{i-2p}, \dots, x_i - (m-1)p), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

Рассматривая множество точек x_i в m -мерном пространстве как фазовый портрет аттрактора, оценим его размерность по методу Грассбергера-Прокаччия [4,7], то есть вычислим для разных ε корреляционный интеграл

$$\tilde{N}(\varepsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i,j=1}^M \theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|), \quad (2.17)$$

отложим полученную зависимость на графике в координатах $(\log \varepsilon, \log C(\varepsilon))$, произведем поиск на ней линейного участка и определим угловой коэффициент $D(m)$. Описанную процедуру выполним несколько раз, рассматривая последовательно $m = 1, 2, 3, \dots$

Здесь важно отметить, что наличие или отсутствие насыщения зависимости $D(m)$ при увеличении m рассматривается как критерий того, генерируется ли сигнал динамической системой или же он является шумовым. Если наблюдается насыщение на некотором уровне D , то это величина D принимается в качестве оценки корреляционной размерности аттрактора ДС, породившей наблюдаемый сигнал. Основываясь на оценке D и теореме о вложении Мане [4], можно заключить, что размерность фазового пространства этой ДС не превышает $2D + 1$.

Утверждение, доказанное Мане, состоит в том, что любое практически гладкое отображение X в Y будет задавать вложение множества A в пространство Y при условии, что

$$m \geq 2D_A + 1, \quad (2.18)$$

где D_A - фрактальная размерность множества A ; m - размерность вложения.

2.4. Русла. Возникновение русел. Уравнение русла

Рассмотренные выше вопросы были связаны только с «глобальной» предсказуемостью, то есть с возможностью восстановить полную динамическую систему в Z -представлении

$$Z_{n+1} = \Psi(z_n). \quad (2.19)$$

Для сложной системы эта задача считается неразрешимой. Поэтому разумным считается рассмотреть вопрос о «предсказуемости в проекции малой размерности».

Пусть, локально, в некоторой области G n - мерного фазового пространства, поведение сложной системы приближенно, но с хорошей точностью может быть описано маломодовой моделью с размерностью фазового пространства $n_1 < n$. Тогда, если данная траектория в течение времени наблюдений достаточное число раз проходила через область G , то это может быть недостаточно для того, чтобы восстановить полную исходную n - мерную систему, но достаточно, чтобы восстановить n - мерную функцию, дающую возможность делать локальный прогноз.

Иными словами подход русел и джокеров – это попытка использовать идеи маломодовой нелинейной динамики для анализа сложных систем большой размерности [1].

Возникновение русел. Уравнение русла

Пусть для динамической системы $x_{n+1} = f(x_n)$ существует область G , где функция $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = f_1(P_{n_1}x) + \gamma f_2(x), \quad x \in G \subset R^n.$$

Здесь $\gamma \ll 1$, а P_{n_1} - проектор на подпространство размерности $n_1 < n$. Эта проекция рассматривается как плоскость (в общем случае поверхность) P , проходящая через некоторую точку $x_0 \in G$, а оператор P_{n_1} - как проектор на нее.

Пусть n_1 координат на P обозначено как $u = P_{n_1}x$, а прочие $n - n_1$ - через $v = (I - P_{n_1})x$. Тогда $f(x) = f_1(U) + \gamma f_2(U, V)$, и на поверхности P получается отображение:

$$U_{i+1} = P_{n_1}f_1(u_i) + \gamma P_{n_1}f_2(u_i, v_i), \quad u_i, v_{i+1} \in P. \quad (2.20)$$

Если γ очень мала, то динамика приближенно сводится к n_1 - мерной:

$$U_{i+1} = P_{n_1}f_1(u). \quad (2.21)$$

Таким образом, (2.21) является уравнением русла, связанного с областью G .

Что касается использования идеи русел для прогнозирования временных рядов, то имеет место динамическая система с ее компонентой

$$x_n = \Phi(x_{n-1}, \dots, x_{n-m}) \equiv \Phi(z_{n-m}). \quad (2.22)$$

Предполагается, что полная система имеет большую размерность и где-то в реконструированном пространстве R^m существуют области G_k , где можно использовать подход маломодовых русел.

Так, в [1] показано, что если положить $\|D\Phi(z_0)\| \approx \|D^2\Phi(z_0)\| \approx 1$, $N \approx 10^3$ и точность ~ 0.01 , тогда для метода 1-го порядка $\varepsilon_1 \approx N^{-2/d}$ или

$$d \cong -2 \frac{\lg N}{\lg \varepsilon_1} = 3. \quad (2.23)$$

Следовательно, имеется область, где динамику можно предсказать по 3-6 наиболее важным компонентам вектора z или, иными словами, определить проектор P_{n_1} . Если такая проекция найдена, построение предиктора можно проводить обычными методами [1].

Однако необходимо отметить, что точность прогноза в этом случае ограничена не только ошибками исходных данных и хаотичностью динамической системы, серьезной ошибкой может быть отброшенный член в (2.21), который накладывает свои ограничения на ошибку прогноза и в рамках маломодового подхода не может быть уменьшен. Поэтому более адекватной моделью для русла могла бы быть динамическая система с наложенным шумом.

Возможно этот «шум» должен обладать некоторыми динамическими чертами, чтобы воспроизводить свойства проекции траектории в пространстве большой размерности.

Что касается поиска русел, то нам представляется это сложной задачей. По-видимому наиболее многообещающим может служить подход, рассмотренный в [8].

2.5. Информационные технологии в контексте обработки временных рядов

Бурно развиваются математические средства исследования мультифрактальных структур, появляющихся в результате развития нелинейных динамических систем.

Сложные фракталы, называемые мультифракталами чаще всего встречаются в природе, тогда как простые самоподобные объекты представляют собой идеализацию реальных явлений. Важными представителями мультифракталов являются многие сигналы, регистрируемые в натуральных экспериментах.

Мультифрактальные процессы допускают разложение на участки с различными локальными свойствами скейлинга [9].

Для более «тонкого» анализа мультифрактальных свойств временных рядов используется теория вейвлетов [10-12], которая представляет собой обширное научное направление.

Необходимо отметить, что во многих работах, посвященных практическому использованию теории вейвлетов, применяется дискретное преобразование. Дискретное преобразование приводит к более точному представлению сигнала, особенно в задачах, связанных с его сжатием и последующим восстановлением.

Дискретное преобразование наиболее естественно в случаях анализа временных рядов [13].

Непрерывное преобразование более «медленное», поскольку содержит избыточную информацию. Тем не менее, при анализе сложных сигналов она может оказаться более наглядной и информативной.

В [14] представлены основы теории мультифрактального анализа, базирующегося на непрерывном вейвлет-преобразовании.

Рассмотрено расширение концепции мультифракталов на случай нерегулярных функций – метод максимумов модулей вейвлет-преобразования. Этот метод представляет собой сочетание двух различных теорий – теорию вейвлетов и теорию мультифракталов, имеющей глубокую аналогию со статистической термодинамикой.

Так, в [14] отмечено, что возможность локализации сингулярностей вероятностной меры объекта делает вейвлет - анализ незаменимым средством для выявления мультифрактальной структуры, а также нарушений регулярности временных рядов.

Большой интерес представляет работа [15], в которой рассматривается моделирование ЭКГ на основе преобразования Гильберта. Здесь фактически каждая пульсация ЭКГ определяется

отдельно, затем после расчета преобразования Гильберта мгновенный модуль и мгновенная фаза моделируются с помощью полиномиального проецирования, исходя из реальной величины текущей пульсации ЭКГ, которая сравнивается с эталонной пульсацией ЭКГ. Показано, что принятая стратегия сжатия успешно адаптирована для сигналов ЭКГ, что подтверждается избыточностью информации по каждой пульсации.

Отмечено, что использование метода с полиномиальным отображением дает лучшие результаты по сравнению с методом вейвлет - преобразования (WT-преобразование).

При рассмотрении сложных динамических систем применение стандартных моделей, таких как трендовые и регрессионные [16], используемые в задачах предсказания, становится затруднительным, поэтому возникает необходимость исследования нейросетевых подходов в предсказании поведения временных последовательностей. В этой связи заслуживает внимание [17], в которой рассматривается метод предсказания многомерных временных рядов с помощью нейросетей типа FIR (Finite Impulse Resposns).

FIR – нейросеть обладает внутренней динамикой, что позволяет отнести ее к рекуррентным сетям. В результате исследований показано, что существенное влияние на точность предсказания оказывает выбор параметров модели, особенно размерностей синоптических фильтров, которые определяют внутреннюю динамику нейросети.

Получены результаты, показывающие возможность выявления взаимозависимостей между отдельными элементами многомерной временной последовательности.

Интеллектуальный анализ данных

Интеллектуальные математические методы прогнозирования применяют в тех случаях, когда невозможно учесть влияние многих факторов из-за значительной сложности объекта прогнозирования, или если недоступны объективные результаты измерений поведения объекта. Исследования данных и их методов анализа в последние десятилетия оформились в виде отдельного направления, называемого интеллектуальным анализом данных или Data Mining, в котором анализ временных рядов получил понятие интеллектуального анализа временных рядов или Times-Series Data Mining.

Так, в работах ряда зарубежных ученых Х. Танаки, К. Хирохиты, В.Педрича, Батыршина И.З., Ковалева С.М., Ярушкиной Н.Г. и др. исследованы методы нечеткой регрессии, анализа данных временных рядов, получивших широкое распространение. Несмотря на перечисленные работы, многие задачи анализа временных рядов остаются нерешенными, в частности задачи анализа нечетких тенденций и генерации правил распознавания тенденций. Однако в последнее время появился ряд работ [18,19], в которых рассматривается анализ нечетких тенденций как средство интеллектуального анализа данных.

2.6. Теория размерности для инвариантных множеств динамических систем

В теории гладких динамических систем существует направление, связанное с исследованием размерности инвариантных множеств. Речь идет не о классическом топологическом понятии размерности, а о различных модификациях так называемой размерности Каратеодори [20]. Она имеет не чисто топологический, а топологометрический характер.

Грубое описание топологического строения этих множеств состоит в следующем: локально они представляют собой произведение гладкого подмногообразия на множество канторовского типа. Таким образом, размерность (или, как обычно в этих случаях говорят, фрактальная размерность) трактуется как количественная характеристика сложности топологического строения аттракторов в трансверсальных к нему направлениях. Вместе с тем, были обнаружены некоторые соотношения между размерностью, метрической энтропией динамической системы и показателями Ляпунова [20]. Эти соотношения отражают глубокую внутреннюю связь между топологией аттрактора и свойствами действующей на нем динамики.

Общая трактовка размерностей характеристик состоит в следующем. Пусть X - сепарабельное метрическое пространство и $m(\alpha, Z)$ - семейство σ - полуаддитивных внешних мер на X , зависящих от вещественного параметра α . Предположим, что для всякого $Z \subset X$ существует такое критическое значение α_0 параметра α , что $m(\alpha, Z) = 0$ при $\alpha > \alpha_0$ и $m(\alpha, Z) = \infty$ при $\alpha < \alpha_0$ (при этом, $m(\alpha_0, Z)$ может быть любым числом в промежутке

$[0, \infty]$. Число α_0 называется размерностной характеристикой множества Z . Определим один весьма важный класс характеристик – размерностные и емкостные характеристики относительно меры, т.е. связанные с некоторой борелевской вероятностной мерой на X . Введение этих характеристик основано на следующем. В то время как размерность сечения аттрактора какой-либо трансверсальной к нему площадкой зависит, вообще говоря, от выбора этой площадки, размерность множества в этом сечении, состоящего из точек «типичных» по отношению к инвариантной эргодической мере, от выбора сечения уже не зависит. Это определяет и ту роль, которую играют размерностные и емкостные характеристики относительно меры: основные соотношения между размерностью, энтропией и показателями Ляпунова удается получить тогда, когда рассматриваются именно эти характеристики. Здесь следует обратить внимание на еще одно обстоятельство, связанное с упомянутым выше явлением «самоподобия» инвариантного множества. В реальных ситуациях самоподобные множества возникают в сечении аттрактора трансверсальной к нему площадкой W , но при этом самоподобие почти никогда не бывает строгим. Тем не менее, иногда инвариантное множество удается разбить на «куски», каждый из которых является так сказать «асимптотически самоподобным». Это означает, что коэффициенты самоподобия зависят от номера ранга n , но имеют асимптотику по n – так называемые «асимптотические коэффициенты самоподобия». Такие «куски» – это сечение носителей инвариантных эргодических мер площадкой W , а «асимптотические коэффициенты самоподобия» выражаются через характеристические показатели Ляпунова этих мер. В многомерном случае надо учесть еще анизотропию инвариантного множества (в известном смысле это удается достичь с помощью размерностных характеристик относительно отображения).

Так, вводится и исследуется новый тип размерностных характеристик – размерностные характеристики относительно отображения. Их отличительная особенность состоит в том, что одно и то же инвариантное множество может иметь различную размерность в зависимости от действующей на нем динамики. Таким образом, эти величины характеризуют не множество, как таковое, а пару: множество и действующее на нем отображение. Смысл их введения заключается в следующем. В трансверсальном сечении аттрактора происходит сжатие; при этом в том случае, когда размерность сечения ≥ 2 , скорость сжатия в различных направлениях в сечении разная.

Поэтому из первоначального покрытия, составленного из шаров, под действием итераций отображения образуется новое покрытие, составленное из сильно вытянутых эллипсоидов с различными длинами полуосей. При подсчете размерностных характеристик относительно отображения учитываются «наилучшие упаковки», составленные из таких эллипсоидов. Это позволяет учесть анизотропию Z , о чем говорилось выше. Для размерностных характеристик относительно отображения получены некоторые результаты, связывающие их с метрической энтропией отображения и показателями Ляпунова.

Рассмотрим ограниченную открытую область X в n -мерном пространстве с гомеоморфизмом T для X на себя, сохраняющим объем, т.е. для любого открытого множества $G \subset X$ вводится предположение равенства объемов G и $T(G)$. При многократном применении T любая точка x порождает последовательность $x, Tx, T^2x, \dots, T^i(x), \dots$, называемую положительной *полуорбитой* x . Когда x принадлежит G для бесконечного множества целых положительных значений i , то говорят о возвращающейся точке x открытого множества G .

Тогда *теорема* Пуанкаре гласит, что для любого открытого множества $G \subset X$ точками, возвращающимися относительно G , являются все точки G , кроме некоторого множества первой категории меры нуль. Утверждение о мере было высказано Пуанкаре в терминах «вероятности». В современной терминологии доказательство теоремы Пуанкаре было сделано Каратеодори.

Теорема Пуанкаре играет важную роль в *теории динамических систем*. При изменении во времени состояния динамической системы начальная точка x в фазовом пространстве переместится в другую точку Tx . Поэтому уравнения движения системы будут определять преобразование T фазового пространства в себя. При условии гладкости входящих в дифференциальные уравнения движения членов преобразование T является гомеоморфизмом.

Пуанкаре, используя, в отличие от Пуассона, новые методы, строго обосновал свои выводы. По своей сути, это был один из первых триумфов современной *качественной теории дифференциальных уравнений*, начало которой положил Пуанкаре.

Дальнейшее развитие теории сохраняющих меру преобразований привело к существенному улучшению теоремы Пуанкаре. Например, *эргодическая теорема* Дж. Д. Биркгофа (1931 г.) утверждает, что при

сохраняющих меру отображения множества конечной меры на себя почти все точки любого измеримого множества не только возвращаются в данное множество бесконечно много раз, но это происходит с частотой, стремящейся к определенному положительному пределу.

2.7. Конструкция Каратеодори, мера Хаусдорфа и размерность Хаусдорфа-Безиковича

В различных областях математики возникают множества, в том или ином смысле пренебрежимо малые и неразличимые в смысле меры Лебега. Для различения таких множеств с патологически сложной топологической структурой необходимо привлекать нетрадиционные характеристики малости, например, емкость, потенциал, меры и размерность Хаусдорфа и т.п. Наиболее плодотворным оказалось применение *дробной размерности* Хаусдорфа, тесно связанной с понятиями энтропии, фракталами и странными аттракторами в теории динамических систем.

Эта дробная размерность определяется p -мерной мерой с произвольным вещественным положительным числом p , которую ввел Хаусдорф (*Hausdorff E. Dimension and Ausseres Mass // Math. Ann 1919. V. 79. P. 157-179*). В общем случае понятие меры не связано ни с метрикой, ни с топологией. Однако, *мера Хаусдорфа может быть построена в произвольном метрическом пространстве, на основе его метрики, а сама размерность Хаусдорфа связана с топологической размерностью.*

1. Конструкция Каратеодори. Понятия введенные Хаусдорфом, основываются на *конструкции Каратеодори (Caratheodory C. Uber das Lineare Mass von Punktmengen – eine Verallgemeinerung des Langenbegriffs // Nachr. Ges. Wiss. Gottingen., Mathematisch-Physikalische Klasse, 1914. P. 404-426)*, которую и рассмотрим далее. Пусть (M, ρ) - метрическое пространство, F - семейство подмножеств пространства M и f - такая функция на F , что $0 \leq f(G) \leq \infty$ при $G \in F$ и $f(\emptyset) = 0$. Построим вспомогательные меры m_f^ε , а затем основную меру Δf следующим образом. Пусть

$E \subset M$ и $\varepsilon > 0$ значение m_f^ε определяется как точная нижняя грань множества чисел

$$m_f^\varepsilon = \inf \sum_i f(G_i) \quad (2.24)$$

по всевозможным счетным ε -покрытиям $\{G_i\}$, $G_i \in F$.

Из неравенства $m_f^{\varepsilon_1}(E) \geq m_f^{\varepsilon_2}(E)$ для $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ следует существование предела

$$\Lambda(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} m_f^\varepsilon(E) = \sup m_f^\varepsilon(E). \quad (2.25)$$

Ясно, что $m_f^\varepsilon(E)$ и Λ -внешние меры на M . Пусть $\rho(A, B) > \varepsilon > 0$. Рассмотрим произвольное ε -покрытие $\{G_i\}$ множеств $A \cup B$, состоящее из некоторого числа множеств. Тогда семейства $\{A \cap G_i\}$ и $\{B \cap G_i\}$ не пересекаются и покрывают множества A и B соответственно, поэтому

$$m_f^\varepsilon(A \cup B) \geq m_f^\varepsilon(A) + m_f^\varepsilon(B) \quad (2.26)$$

или

$$\Lambda_f(A \cup B) = \Lambda_f(A) + \Lambda_f(B). \quad (2.27)$$

Класс Λ_f -измеримых множеств пространства M образует σ -кольцо, на котором внешняя мера Λ_f регулярна. Мету Λ_f также называют результатом применения конструкции Каратеодори к функции f , а внешнюю меру $m_f^\varepsilon(E)$ - приближающей мерой порядка ε . Каждое борелевское множество в M также Λ_f -измеримо.

Мера Λ_f довольно тонко отражает свойства функции f и семейства F , хотя обычно и не является продолжением f . В результате применения конструкции Каратеодори можно получить m -мерную сферическую меру \mathbf{S}^m ; m -мерную меру Гросса \mathbf{G}^m ; m -мерную меру Каратеодори \mathbf{E}^m ; m -мерную интегрально-геометрическую меру индекса t , обозначаемую через \mathbf{T}_t^m , m -

мерную меру Джиллести \mathbf{Q}^m , m -мерную хаусдорфову меру \mathbf{H}^m , которая подробно определена ниже, и т.д.

Приведем ряд неравенств, связывающих различные m -мерные меры:

$$\mathbf{S}^m \geq \mathbf{H}^m \geq \mathbf{E}^m, \mathbf{S}^m \leq \left(\frac{2n}{n+1} \right)^{m/2} \mathbf{H}^m, \mathbf{E}^m \leq \mathbf{Q}^m. \quad (2.28)$$

В случае $m = n$ все рассмотренные меры совпадают с m -мерной мерой Лебега.

Пусть $B(\alpha, r)$ - замкнутый шар радиуса r с центром в точке $\alpha \in M$. Тогда при $0 < \varepsilon < \infty$, $A \subset M$ и $\alpha \in M$ имеем

$$m_f^\varepsilon(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} m_f^\varepsilon[A \cap B(\alpha, r)]. \quad (2.29)$$

Укажем два простых утверждения, которые описывают поведение приближающих мер на убывающей последовательности $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ компактных подмножеств пространства M . Если элементы семейства F являются открытыми подмножествами M , то

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_f^\varepsilon(C_i) = m_f^\varepsilon\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right). \quad (2.30)$$

Если $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ и $f(s) = \inf\{f(T)\}: T \in F, S \subset \text{Int}T, d(T) \leq \varepsilon$ для всех таких $S \in F$, что $d(S) \leq \varepsilon_0$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} m_f^\varepsilon(C_i) \leq m_f^{\varepsilon_0}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\right), \quad (2.31)$$

где d - диаметр множеств, Int -множество всех внутренних точек множества T .

Приведем еще теорему о поведении приближающих мер на возрастающей последовательности подмножеств. Пусть X - ограниченное компактное метрическое пространство, F - семейство всех непустых компактных подмножеств из X , функция $f: F \rightarrow [0, +\infty]$ непрерывных относительно метрики Хаусдорфа и $f(C) > 0$ для всех таких $C \in F$, что $d(C) > 0$. Если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots$ образуют возрастающую последовательность подмножеств пространства X , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m_f^c(A_k) \leq m_f^c\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right). \quad (2.32)$$

Следствием данной теоремы является следующее утверждение. Когда S - суслинское множество пространства X , то для A_f - меры Каратеодори на X выполняется равенство

$$A_f(S) = \sup\{A_f(C), C \in F, C \subset S\}. \quad (2.33)$$

2. Мера Хаусдорфа. Определим h - меру Хаусдорфа. Пусть $h(r)$ - непрерывная монотонно возрастающая функция от r ($r \geq 0$), для которой $h(0) = 0$. Класс таких функций обозначим через H_0 . Применив конструкцию Каратеодори к функции $f(E) = h[d(E)]$ при $E \neq \emptyset$ и $f(\emptyset) = 0$ (здесь $d(e)$ - диаметр множества E), получим A_h - меру Каратеодори, которую называют h -мерой Хаусдорфа. Если при этом $h(r) = \gamma(\alpha)r^\alpha$, где α - фиксированное положительное не обязательно целое число, а $\gamma(\alpha)$ - положительная константа, зависящая только от α , то h -меру Хаусдорфа называют α -мерой или α -мерой Хаусдорфа H_α , которая является борелевской регулярной мерой.

Конструкцию h -меры Хаусдорфа можно представить себе следующим образом. Покроем α произвольной последовательностью кругов C_ν радиусом $r_\nu \leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0; \nu = 1, 2, \dots$) и обозначим через $m_h^\varepsilon(\alpha, h) \geq 0$ нижнюю грань соответствующих сумм $\sum_{\nu=1}^{\infty} h(r_\nu)$. Это число возрастает при убывании ε . По определению

$$A_h(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_h^\varepsilon(\alpha, h), \quad (2.34)$$

следовательно

$$0 \leq A_h(E) \leq +\infty. \quad (2.35)$$

Предел (2.34) является внешней h -мерой Хаусдорфа, которая на σ -кольце A_h -измеримых множеств пространства M является борелевски регулярной мерой. Выбирая в качестве $h(r)$ различные функции, мы получаем: линейную меру ($h(r) = 2\pi r$), плоскую меру ($h(r) = \pi r^2$), логарифмическую меру ($h(r) = 1/\ln r$).

Значение H_m - меры Хаусдорфа с функцией

$$h(r) = \frac{\Gamma^\alpha(1/2)}{2^\alpha \Gamma(1 + \alpha/2)} r^\alpha \quad (2.36)$$

для множества евклидова пространства совпадает с внешней m -мерой Лебега. Поэтому, H_α -мера Хаусдорфа обобщает внешнюю меру Лебега с целочисленных значений на произвольные положительные.

Имеет место следующая

Теорема 2.1. Для того, чтобы компакт S имел h -меру Хаусдорфа, равную нулю, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало конечное разложение компакта $S = A_1 \cup \dots \cup A_k$, такое, что

$$h[d(A_1)] + \dots + h[d(A_k)] < \varepsilon. \quad (2.37)$$

Из условия $E_1 \subset E_2$ следует $A_h(E_1) \leq A_h(E_2)$, т.е. h -мера Хаусдорфа – монотонно возрастающая функция множества. С использованием h - меры размерность множества определяется следующим образом. Если $0 < A_h(A) < \infty$, то $\langle h \rangle$ называется метрической размерностью (размерностью Хаусдорфа) множества A . Если $h(r) = cr^\alpha$ и $0 = A_h(A) < \infty$, то размерность множества A обозначается через $\langle \alpha \rangle$, здесь c - константа. Множество определенной размерности имеет для каждой высшей размерности h -меру, равную 0, для каждой низшей - h -меру, равную ∞ .

3. Размерности Хаусдорфа-Безиковича и Колмогорова.

Дальнейшим обобщением понятия размерности является размерность Хаусдорфа-Безиковича, которая вводится через неотрицательные числа $\alpha_0 = \alpha_0(E)$ в виде равенства

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) \neq 0\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\} \quad (2.38)$$

для множества E . Размерность Хаусдорфа-Безиковича множества определяется поведением $H_\alpha(E)$ не как функция от E , а как функция от α .

Корректность определения (2.38) подтверждает следующее свойство $H_\alpha(E)$ -меры. Если $H_{\alpha_1}(E) < \infty$, то $H_\alpha(E) = 0$ для любого $\alpha_2 > \alpha_1$. Если мера $H_{\alpha_2}(E)$ отлична от нуля, то $H_{\alpha_1}(E) = \infty$ для любого положительного $\alpha_1 < \alpha_2$. Отсюда следует, что для множества $E \subset M$ или $H_\alpha(E) = 0$ для любого $\alpha > 0$, тогда

$\alpha_0(E) = 0$ по определению или существует точка «перескока» α_0 , такая, что $H_\alpha(E) = \infty$ для $\alpha < \alpha_0$ и $H_\alpha(E) = 0$ для $\alpha > \alpha_0$. Данное число α_0 и есть размерность Хаусдорфа-Безиковича.

Размерность Хаусдорфа компактного множества является очень хорошей характеристикой *степени разреженности* данного множества. В случае ее определения как емкостной размерности она дает информацию об усредненном асимптотическом поведении преобразования Фурье мер, сосредоточенных на множестве.

Из вышесказанного следуют *свойства* размерности Хаусдорфа-Безиковича:

$$\begin{aligned}
 H_\alpha(E) > 0 &\Rightarrow \alpha_0(E) \geq \alpha; \\
 H_\alpha(E) < 0 &\Rightarrow \alpha_0(E) \leq \alpha; \\
 \alpha_0(E) > \alpha &\Rightarrow H_\alpha(E) = \infty; \\
 \alpha_0(E) < \alpha &\Rightarrow H_\alpha(E) = \infty; \\
 H_\alpha(E) = 0 &\Rightarrow \alpha_0(E) \leq \alpha; \\
 H_\alpha(E) = \infty &\Rightarrow \alpha_0(E) \geq \alpha; \\
 \alpha_0(E_1) \leq \alpha_0(E_2), &\text{ если } E_1 \subset E_2; \\
 \alpha_0\left(\bigcup_n E_n\right) &= \sup \alpha_0(E_n); \\
 \alpha_0(E) &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

для любого не более чем счетного множества E ; когда множества E_1 и E_2 метрического пространства M геометрически подобны, то

$$\alpha_0(E_1) = \alpha_0(E_2). \tag{2.40}$$

Если при определении H_α -меры Хаусдорфа покрытия осуществляют шарами одинакового диаметра, то такую меру называют *энтропийной*. Тогда размерность (2.40) называют *энтропийной* или *размерностью Колмогорова*. Для множеств положительной k -мерной меры Лебега обе размерности совпадают и равны K .

Размерность Хаусдорфа-Безиковича характеризует *внешнее свойство множества*. Поэтому целесообразно ввести понятие размерности Хаусдорфа – Безиковича множества в точке, которая характеризовала бы его *внутреннюю структуру*. В этом случае число

$$\alpha_E(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0(E \cap O_n(x_0)) \quad (2.41)$$

называют *локальной размерностью Хаусдорфа-Безиковича* множества E в точке x_0 . Здесь $\{O_n(x_0)\}$ - произвольная последовательность стягивающих окрестностей точки $x_0 \in M$. Предел в (2.41) существует всегда в силу монотонности размерности Хаусдорфа – Безиковича

$$\alpha_0(E \cap O_{n+1}(x_0)) \leq \alpha_0(E \cap O_n(x_0)) \text{ для всех } n \in N. \quad (2.42)$$

Каждое ограниченное замкнутое множество E m - мерного евклидова пространства содержит точку $x_0 \in E$, такую, что

$$\alpha_E(x_0) = \alpha_0(E). \quad (2.43)$$

Функцию $\alpha_E(x)$ называют *функцией локальной размерности* Хаусдорфа-Безиковича, если

$$0 \leq \alpha_E(x) \leq \alpha_0(E) \text{ для любого } x \in M$$

$$\alpha_E(x) = 0 \text{ если множество } E \text{-замкнутое и } x \notin E. \quad (2.44)$$

$$\alpha_E(x) = 0 \text{ для всех изолированных точек множества } E.$$

Размерность Хаусдорфа – Безиковича является метрическим понятием, но существует ее *фундаментальная связь* топологической размерностью $\dim E$, которую установили Л.С. Понтрягин и Л.Г. Шнирельман Л.Г., введя понятие *метрического порядка* (Понтрягин Л.С., Шнирельман Л.Г. Sur une Propriete Metrique de la Dimension //Ann. Math. 1932. V. 33. #1. P. 156-162; см. также прибавление к русскому переводу книги: Понтрягин Л.С. Шнирельман Л.Г. Об одном метрическом свойстве размерности, с. 210-218), а именно: *нижняя грань размерности Хаусдорфа-Безиковича для всех метрик компакта E равна его топологической размерности: $\dim E \leq \alpha(E)$.*

4. Первое упоминание о фракталах. Множества, размерность Хаусдорфа-Безиковича которых является дробным числом, называют *фрактальными множествами* или *фракталами*. Более строго, множество E называется фрактальным (фракталом) в *широком смысле* (в смысле Б. Мандельброта), если его топологическая размерность не совпадает с размерностью Хаусдорфа-Безиковича, а именно, $\alpha_0(E) > \dim E$. Например, множество E всех иррациональных точек $[0,1]$ является фрактальным в широком смысле, так как $\alpha_0(E) = 1$, $\dim E = 0$.

Множество E называется фрактальным (фракталом) в узком смысле, если $\alpha_0(E)$ не является целым. Фрактальное множество в узком смысле является таким и в широком смысле. Как впервые было показано А.С. Безиковичем (*Besicovitch A.S. On Linear Sets of Fractional Dimensions //Ann. Math, 1929. V. 101. №1. P.161-193*), существуют глубокие различия между лебеговскими множествами и фракталами. В первую очередь, эти особенности касаются плотностей. Геометрические свойства фрактального множества E определяются поведением функции

$$D(x, \varepsilon) = \frac{H_\alpha(E \cap O(x, \varepsilon))}{\varepsilon^\alpha} \quad (2.45)$$

для малых ε , где x - произвольная точка множества E . Верхней α -плотностью множества E в точке x называется

$$\overline{D}_\alpha(E, x) = \overline{\lim}_{\varepsilon \leq 0} D(x, \varepsilon), \quad (2.46)$$

соответственно нижняя α -плотность множества E в точке x записывается в виде

$$\underline{D}_\alpha(E, x) = \underline{\lim}_{\varepsilon \leq 0} D(x, \varepsilon). \quad (2.47)$$

Когда $\overline{D}_\alpha(E, x) = \underline{D}_\alpha(E, x)$, то их общее значение называют α -плотностью множества E в точке x и обозначают $D_\alpha(E, x)$. Если $\varepsilon \rightarrow 0_+$, то $\overline{D}_\alpha(E, x)$ и $\underline{D}_\alpha(E, x)$ называют правосторонней, при $\varepsilon \rightarrow 0_-$ - левосторонней, при $\varepsilon \rightarrow 0$ -двусторонней верхней и нижней α -плотностью соответственно.

Можно отметить, что для почти всех (в смысле H_α -Хаусдорфа) точек α -множества на прямой односторонняя верхняя (правая и левая) α -плотность равна 1, односторонняя нижняя α -плотность равна 0 ($0 < \alpha < 1$). Для двухсторонних плотностей почти во всех случаях α -множества на прямой двусторонняя α -плотность не существует, т.е. верхняя α -плотность отличается от нижней.

2.8. Синергетический подход к формированию интегральных размерностей в интеллектуальных системах

В [21] отмечено, что развитие синергетики и нелинейной динамики актуализировали новые возможности для метрологии и

теории измерений. Отмечено также, что изменение количественных характеристик масштабно-инвариантных или близких к ним объектов следует проводить на новой методологической основе, связанной с идеями синергетики, в частности, теории фракталов.

В этой связи необходимость получения качественно нового информационного продукта обусловлено такими характерными особенностями данных как гетерогенность, нестационарность, темпоральность, хаотичность, неопределенность (нечеткость) и т.д. Кроме того, обработка взаимодействующих потоков информации может осуществляться в метрических и неметрических пространствах, что усложняет процесс анализа и принятия решений.

Отсюда, используя принципы синергетики, нелинейной динамики и современные информационные технологии (ИТ-технологии), предлагается рассмотрение интегральных размерностей, характеризующих потоки информации в интеллектуальных системах.

Фрактальная топология

Из обратимой теоремы Бореля-Лебега (или леммы Гейне-Бореля), (Математическая Энциклопедия. Ред.коллегия: И.М.Виноградов. (гл.ред. и др.) том 1, А – Г. М.: «Советская Энциклопедия» 1977. – с.539), следует

Определение. Множество $K \subset X$ называется компактом, если из любого покрытия K открытыми множествами можно извлечь конечное подпокрытие.

Пусть $K \subset X$ самоподобное множество. Используя алгоритм box-counting, определяем фрактальную размерность Хаусдорфа-Безиковича $d_{H\mu}$. На основании теоремы Л.С.Понтрягина-Л.С.Шнирельмана $d_{H\mu}$ есть метрика. Тогда $(K \subset X, d_{H\mu})$ – компактное фрактальное метрическое пространство.

Пусть $K \subset X$ нечеткий компакт, то есть $\mu : X \rightarrow [0,1]$, где μ - функция принадлежности нечеткого компакта к универсальному множеству X . Тогда конструкция $d_{H\mu}$ - нечетко-фрактальная метрика и $(K \subset X, d_{H\mu})$ – компактное нечетко-фрактальное метрическое пространство.

Перейдем непосредственно к рассмотрению нечетко-фрактальной размерности.

Реализация алгоритма

1. Представим временной ряд в виде: $\{t(k), x(k)\}$, $k = 1, \overline{N}$, где $x(k) \in R$, и $t(1), t(2), \dots, t(N)$ - дискретные значения временных моментов.

Пусть исследуемый временной ряд, элементы которого представляют сумму каких-либо событий в единицу времени, дискретизирован на регулярной сетке, ячейки которой называют «боксами», размерностью ε (пространство R^1) (Рис.1). Проблема возникает, когда размерность системы рассматривается в R^n .

2. Фрактальная размерность временного ряда $d_{H\mu}$ определяется как

$$d_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \log N(\varepsilon) / \log(\varepsilon^{-1}), \quad (2.48)$$

где $N(\varepsilon)$ - принимается как минимальное число шаров радиуса ε , необходимых для покрытия компактного множества [22].

3. Получаем гранулированное множество, состоящее из гиперсфер радиуса ε .

4. Определяем $N(\varepsilon)$ для всех сфер

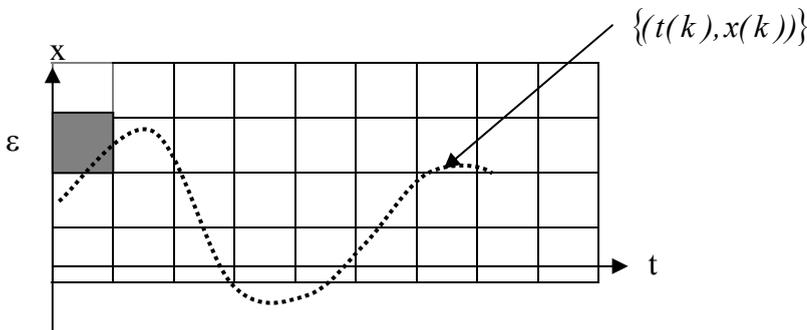


Рис. 2.1 Пример прямого вычисления детерминированной фрактальной размерности

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \theta_{ij}(\varepsilon), \quad (2.49)$$

где θ_{ij} -сфера, определяемая как [23]:

$$\theta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } \sqrt{(t(i) - t(j))^2 + (x(i) - x(j))^2} \leq \varepsilon \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (2.50)$$

5. Конструируем θ_{ij} вокруг точки $(t(i), x(i))$ (Рис.2.2).

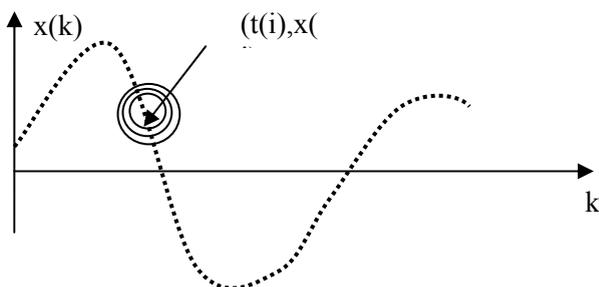


Рис. 2.2 Конструкция сферы θ_{ij} [23]

В общем случае задача о покрытии множества семейством его подмножеств является нечеткой [24]. Тогда выражение для $N(\varepsilon)$ может быть записано в следующем виде [23]:

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \theta_{ij} \mu(\varepsilon). \quad (2.51)$$

Графически это отражено на рис.2.3, где $\mu_{p_j}(\varepsilon)$ - гауссова функция принадлежности, имеющая вид:

$$\mu(\varepsilon) = \exp(-(x(i) - x(j))^2 / \varepsilon^2). \quad (2.52)$$

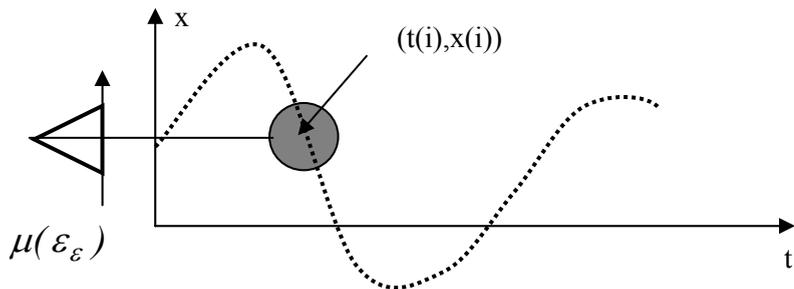


Рис. 2.3. Коррелированное нечетко-фрактальное множество

Подставим выражение (2.51) в (2.48), получим коррелированное соотношение, характеризующее нечетко-фрактальную размерность $d_{H\mu}$.

В целях практического использования ниже представлены таблицы 2.1, 2.2.

Таблица 2.1

Наиболее употребляемые функции принадлежности

Классы F-множеств	Функции принадлежности
Триангулярное	$\theta(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x-m}{\varepsilon^2} & \text{если } x-m \leq \varepsilon \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$
Парабалическое	$\theta(x) = \begin{cases} 1 - \frac{(x-m)^2}{\varepsilon^2} & \text{если } x-m \leq \varepsilon \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$
Гауссово	$\theta(x) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{\varepsilon^2}\right)$

Таблица 2.2

Оценка нечетко-фрактальных размерностей в зависимости от нечетких функций [23]

F-множество	Множество	Парабалическое F-множество	Гауссово F-множество
Фрактальная размерность	1,3546	1,3897	1,3800

Фрактальная размерность минимального покрытия

В [25] на основе минимальных покрытий вводятся новые фрактальные характеристики: размерность минимального покрытия D_{χ} и индекс вариации χ , тесно связанный с D_{χ} . Использование

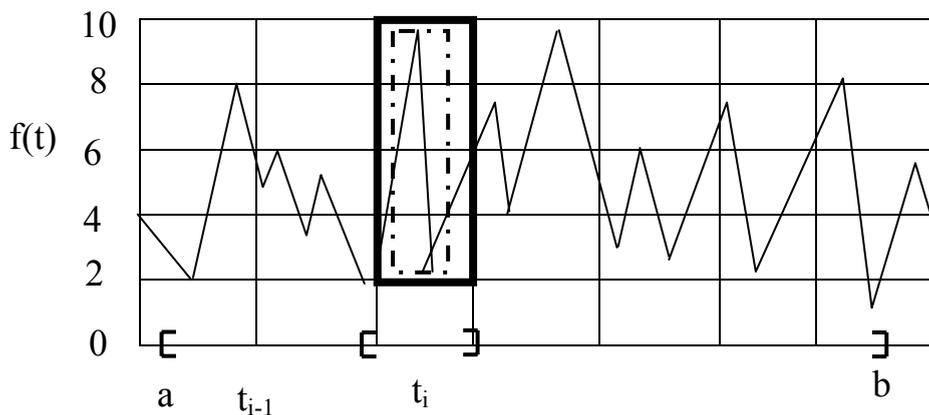
этих показателей расширяет сферу применимости в различных информационных процессах.

Необходимо заметить, что если исходное множество погружено в евклидово пространство, то вместо покрытия этого множества шарами, можно использовать любые другие аппроксимации простыми фигурами (например, клетками) с геометрическим фактором (линейным размером) δ . При этом, наряду с исходной сферической размерностью D , имеют место новые фрактальные размерности (клеточная, внутренняя и т.д.), которые как предельные значения при $\delta \rightarrow 0$, обычно совпадают с D .

Пусть задан график вещественной непрерывной функции $y = f(t)$, определенной на некотором отрезке $[a, b]$. Равномерное разбиение отрезка имеет вид:

$$\omega_m = [a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b], \quad \delta = (b - a) / m \quad (2.53)$$

Минимальное покрытие функции в классе покрытий, состоящих из прямоугольников с основанием δ показано на рисунке 2.4 [25].



t

Рисунок 2.4. Минимальное (пунктирный прямоугольник) и клеточное (серый прямоугольник) покрытия функции $f(t)$ на интервале $[t_{i-1}, t_i]$ длиной δ

Тогда высота прямоугольника на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ будет равна амплитуде $A_i(\delta)$, которая является разностью между максимальным и минимальным значением функции на этом отрезке

Величина

$$V_f(\delta) = \sum_{i=1}^m A_i(\delta) \quad (2.54)$$

будет называться вариацией функции $f(t)$, соответствующей масштабу разбиения δ на отрезке $[a, b]$. Полная площадь минимального покрытия $S_\chi(\delta)$ записывается в виде

$$S_\chi(\delta) = V_f(\delta)\delta. \quad (2.55)$$

На основании размерности Хаусдорфа D следует, что

$$V_f(\delta) \sim \delta^{-\chi} \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0, \quad (2.56)$$

$$\text{где} \quad \chi = D_\chi - 1. \quad (2.57)$$

Показатель χ называется индексом вариации, а размерность D_χ - размерностью минимального покрытия [25].

Размерность D_χ можно использовать при анализе вещественных функций с характерными особенностями, например, всплески различные флуктуации, разрывы.

Фрактальная размерность и вейвлет анализ

Вейвлетный (wavelet) анализ является незаменимым средством для выявления «тонкостей» фрактальных (мультифрактальных) структур, а также нарушений регулярности временных рядов.

Однако эти структуры не могут «обитать» в гильбертовом пространстве, поскольку оно приспособлено для «жизни» хороших, непрерывных функций [26].

Но известно, что фрактальная размерность напрямую связана с показателями Липшица-Гельдера [27]. В свою очередь точечные показатели Гельдера определяются с помощью вейвлетов. Здесь по масштабному поведению вейвлет-коэффициентов удастся получить некоторые сведения о свойстве однородной регулярности функции. Так, линейная зависимость логарифма вейвлет-коэффициентов от масштаба j указывала бы на проявление масштабно инвариантных свойств сигнала, то есть на фрактальное поведение [27].

В этой связи, на основании [14,28,29], имеет место следующая

Постановка задачи

Пусть некоторая $f(x) \in L^2(R)$. Пусть вейвлет преобразование имеет вид

$$f(x) = \sum_{j,k} \underline{\theta}_{j,k} \Psi_{j,k}(x), \quad (2.58)$$

а коэффициенты вейвлет-разложения

$$\underline{\theta}_{j,k} = \int f(x) \Psi_{j,k}(x) dx, \quad (2.59)$$

где $\Psi_{j,k}$ - базовый вейвлет; j, k - целые числа $\{j = 0, 1, \dots, k = 0, \dots, 2^{j-1}\}$.

На основании свойств функциональных пространств Гальдера и теоремы Джаффару [28], требование определенной однородной регулярности функции $f(x)$ на всей вещественной оси при положительных нецелочисленных значениях α выражается в терминах вейвлет-коэффициентов в виде неравенства [28,29]:

$$|\underline{\theta}_{j,k}| \leq C 2^{-j(1/2+\alpha)}, \quad (2.60)$$

где C - положительная константа; α - показатель (или экспонента) Липница-Гельдера, характеризующий иррегулярность функции, $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max}$. Задача состоит в том, чтобы показать определение фрактальной размерности с использованием коэффициентов вейвлет-преобразования.

В [29] показана возможность такой реализации в виде выражения

$$\Delta(f) = \frac{3}{2} + \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log_2(\sum_k |\underline{\theta}_{j,k}|)}{j}, \quad (2.61)$$

где $\Delta(f)$ - фрактальная размерность, варьируется в зависимости от коэффициентов вейвлет разложения $\underline{\theta}_{j,k}$.

Таким образом, выражение (2.61) реализовано в обобщенном компактном метрическом пространстве с фрактальной мерой $\Delta(f)$, $(\mathfrak{R}, \Delta(f))$, образованным вложением фрактального метрического пространства $(K \subset X, d_{H\mu})$ в пространство Гильберта L^2 , то есть

$$(K \subset X, d_{H\mu}) \subseteq L^2 \in (\mathfrak{R}, \Delta(f)), \quad (2.62)$$

где \mathfrak{R} - обобщенное компактное фрактальное метрическое пространство.

Обобщенные фрактальные размерности

Грассбергер, Хэнтчел и Прокаччия ввели в нелинейной динамике семейство обобщенных размерностей D_q , называемые размерностями Реньи [4].

Пусть построено покрытие аттрактора ячейками размера ε , и вероятность пребывания в i -й ячейке покрытия, то есть соответственная инвариантная мера ячейки, есть p_i .

Тогда для любого действительного числа q , $-\infty < q < \infty$, размерность D_q определяется как предел

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q}{\log \varepsilon}. \quad (2.63)$$

Из выражения (2.63) видно, что при $q=0$ оно сводится к определению емкости, при $q=2$ - корреляционной размерности. При $q=1$ возникает неопределенность типа $0/0$, но ее раскрытие по правилу Лопиталья приводит к определению информационной размерности.

Таким образом, емкость, корреляционная и информационная размерности выступают как представители семейства Реньи [4].

Однако для описания гетерогенных фракталов имеет место характеристика, называемая α -спектром. Тогда выражение для D_q имеет вид:

$$D_q = \frac{1}{q-1} [q\alpha(q) - f(\alpha(q))]. \quad (2.64)$$

Зная зависимость $\alpha(q)$, можно вычислить все обобщенные размерности. И наоборот, зная все обобщенные размерности, можно найти α -спектр:

$$\alpha(q) = \frac{d}{dq} [(q-1)D_q]. \quad (2.65)$$

На рисунке 2.5 представлены зависимость величины D_q от q и α -спектр для двухмасштабного канторова множества.

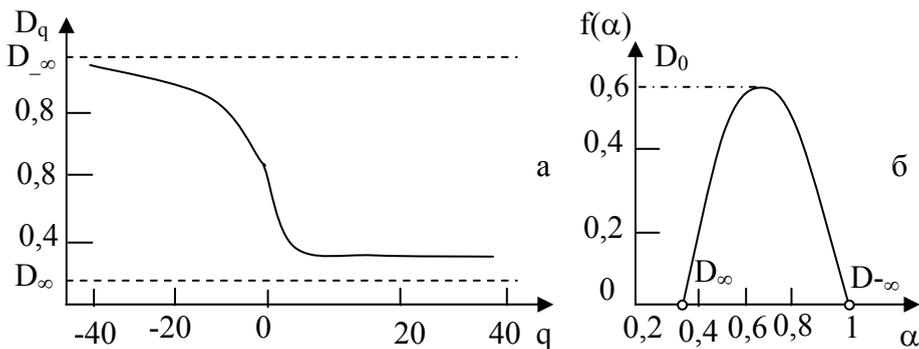


Рис. 2.5. Зависимость обобщенных размерностей D_q от q для двухмасштабного канторова множества; б) α -спектр для этого множества

Обобщенные размерности и α -спектр дают геометрическое описание странных аттракторов. Однако возникает необходимость охарактеризовать динамические свойства системы (процесса). Известно, что существует взаимосвязь между спектром ляпуновских показателей, характеризующих динамические свойства системы (показателей аттрактора) и его фрактальной размерностью [4,30].

Ляпуновская размерность

В [4,30] предложено выражение, характеризующее взаимосвязь между спектром ляпуновских показателей аттрактора и его фрактальной размерностью:

$$D_L = m + \frac{\sum_{i=1}^m \Lambda_i}{|\Lambda_{m+1}|}, \quad (2.66)$$

где Λ_i - ляпуновские показатели, m - размер фазового пространства, D_L - ляпуновская размерность Каплана-Йорке.

Здесь, если аттрактор странный хаотический, то старший показатель положителен, $\Lambda_1 > 0$. С другой стороны, сумма всех ляпуновских показателей отрицательна:

$$S_N = \sum_{i=1}^N A_i < 0.$$

Необходимо отметить, что D_L в выражении (2.66) называют новой фрактальной размерностью. На рис. 2.6 показан спектр ляпуновских показателей.

В частности S_1 есть старший ляпуновский показатель A_1 , $\max S_m$ отвечает КС (Колмогоров-Синай) энтропии h . S_N есть отрицательная величина d , характеризующая сжатие фазового объема при конденсации облака изображающих точек на аттрактор.

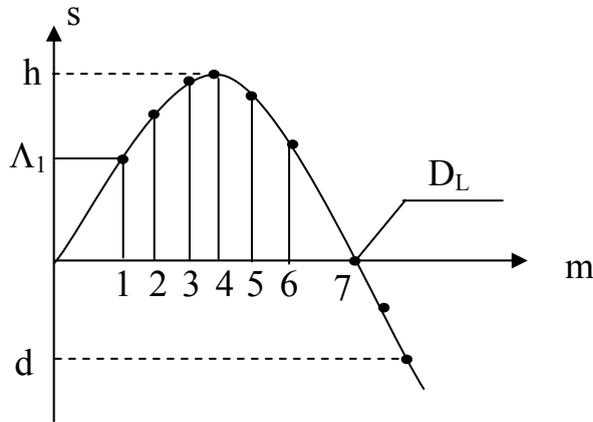


Рис. 2.6. Зависимость суммы ляпуновских показателей

$$S_m = \sum_{i=1}^m A_i \text{ от числа слагаемых}$$

Точка пересечения графика (рис.6), образованного отрезками прямых с осью абсцисс дает ляпуновскую размерность по формуле (2.66).

Таким образом, имеет место выражение, описывающее как геометрическое, так и хаотическое состояния аттрактора, что демонстрирует интегральную составляющую новой фрактальной (ляпуновской) размерности $D_{KY} = D_L$ в N -мерном фазовом пространстве.

Однако численное определение эволюции D_{KY} представляется проблематичной. Поэтому в [31-33] показана полиномиальная интерполяция (на примере параболы) D_{KY} , в результате которой имеет место выражение вида:

$$D_{KY} = \left\{ \ell_2 + 3\ell_3 + [9\ell_2^2 + 6\ell_2\ell_3 - 8\ell_1\ell_3 + 8\ell_1\ell_2 + \ell_3^2]^{1/2} \right\} / 2(\ell_3 - \ell_2), \quad (2.67)$$

где при $\ell_2 = 0$ (2.66) принимает вид:

$$D_{KY} = 1.5 + 0.5[1 - 8\ell_1 / \ell_3]^{1/2}. \quad (2.68)$$

Важно также отметить, что в долгосрочном прогнозе используется выражение из [34-35]:

$$D_{KY} = 2 - \lambda_1 / \lambda_3, \quad (2.69)$$

где λ_1 и λ_3 - старший и младший показатели экспонент; D_{KY} - фрактальная размерность Каплана-Йорке.

Необходимо заметить, что в комплексном фазовом пространстве, характеризующим поведение среды, выделяют состояния, которые притягивают к себе возможные траектории эволюции информационных систем.

Эти состояния определяются как информационные аттракторы, по аналогии с понятием странный аттрактор в теории динамического хаоса.

Таким образом, информационный аттрактор выступает в роли структуры, которая в направлениях, характеризуемых положительными показателями Ляпунова, создает разнообразие, увеличивает погрешности эволюции информационной технологии, то есть порождает порядок, и, наоборот, уменьшает погрешности ее развития в направлениях, характеризуемых отрицательными показателями.

Фрактальность отношения сигнал/помеха

Представляется интересным оценка соотношения сигнал/помеха в виде отношения фрактальных (нечетко-фрактальных) размерностей в контексте оценки динамической информации.

В случае наличия в знаменателе отношения сигнал/помеха хаотической составляющей ее фрактальная размерность определяется выражением (2.66), то есть

$$D_{\text{сигнала}} / D_{ky} = \xi. \quad (2.70)$$

Важно отметить, что динамика информационных процессов вызывает вариацию фрактальных размерностей. Тогда для более «тонкого» анализа распределения фрактальных размерностей можно использовать вейвлет-преобразование.

2.9 Мультифрактальный анализ временных рядов

Анализ временных рядов является основой разработки и верификации макроскопических моделей, позволяющих последовательным образом представить эволюцию сложных систем на основе макроскопических данных. Такой анализ сводится к вычислению корреляционных функций векторов состояний, которые представляют временные последовательности величин, характеризующих систему. Будучи традиционным разделом статистики, анализ временных рядов основывается на классе моделей гармонического осциллятора, которые отвечают простейшему случаю гауссовского случайного процесса. Однако в действительности оказывается, что реальный временной ряд отвечает скорее полетам Леви, нежели гауссовским процессам, которые являются их частным случаем. Известная особенность полетов Леви состоит в их инвариантности относительно масштабных преобразований, в связи с чем проблема исследования временных рядов сводится к анализу самоподобных стохастических процессов, которые представляются (мульти)фрактальными множествами. Статистическое описание самоподобных временных рядов, основанное на термодинамической модели, позволило определить их глобальные характеристики, определяющие предсказуемость изменений случайной величины. Однако при этом выпадают из рассмотрения локальные свойства, представление которых достигается в рамках метода мультифрактального флуктуационного анализа (МФФА), позволившего исследовать временные ряды в экономике, медицине и метеорологии. Предлагаемая работа открывается изложением алгоритма МФФА [36].

Описание метода МФФА

Алгоритм этого метода сводится к следующим шагам. Сначала из ряда $x(k)$, $k=0,1,2,\dots,N$ выделяем флуктуационный профиль

$$y(i) = \sum_{r=1}^i [x(r) - \bar{x}], \quad (2.71)$$

отсчитанный от средней величины \bar{x} . Затем разделяем полученные значения $y(i)$ по непересекающимся сегментам длины s , число которых равно целому значению $N_s = [N/s]$. Так как длина ряда N не всегда кратна выбранной шкале s , то в общем случае последний участок содержит число точек, меньше чем s . Для учета этого остатка следует повторить процедуру деления на сегменты, начиная с

противоположного конца ряда. В результате полное число сегментов, обладающих длиной s , составит $2N_s$.

Поскольку изменение случайной величины $y(i)$ происходит вблизи значения $y_v(i) = 0$, обусловленного определенной тенденцией (трендом) эволюции ряда, что далее следует найти локальный тренд $y_v(i)$ для каждого из $2N_s$ сегментов. При этом проще использовать метод наименьших квадратов, представляя тренд $y_v(i)$ полиномом, степень которого выбирается таким образом, чтобы обеспечить интерполяцию с ошибкой, не превышающей заданный предел. Затем определяем дисперсию

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y(v-1)s + i - y_v(i)\}^2 \quad (2.72)$$

для сегментов $v = 1, \dots, N_s$, следующих в прямом направлении, и соответствующее значение

$$F^2(v, s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \{y[N - (v - N_s)s + i] - y_v(i)\}^2 \quad (2.73)$$

для обратной последовательности $v = N_s + 1, \dots, 2N_s$.

На следующем шаге вводим деформированную дисперсию

$$F_q(s) = \left\{ \frac{1}{2N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} [F^2(v, s)]^{q/2} \right\}^{1/q}, \quad (2.74)$$

полученную возведением выражений (2.72), (2.73) в степень q и последующим усреднением по всем сегментам. Поскольку при $q = 0$ равенство (2.74) содержит неопределенность, то вместо него следует использовать предельное выражение

$$F_0(s) = \exp \left[\frac{1}{4N_s} \sum_{v=1}^{2N_s} \ln [F^2(v, s)] \right]. \quad (2.75)$$

Изменяя временную шкалу s при фиксированном показателе q , находим зависимость $F_q(s)$, представляя ее в двойных логарифмических координатах. Если исследуемый ряд сводится к самоподобному множеству, проявляющему дальнедействующие корреляции, то флуктуационная функция $F_q(s)$ представляется степенной зависимостью

$$F_q(s) \propto s^{h(q)} \quad (2.76)$$

с обобщенным показателем Херста $h(q)$, величина которого определяется параметром q . Из определений (2.74), (2.76) следует что

при $q=2$ этот показатель сводится к обычному значению H . Для временных рядов, которые отвечают монофрактальному множеству, флуктуационная функция $F^2(v,s)$ одинакова для всех сегментов v , и обобщенный показатель Херста $h(q)=H$ не зависит от параметра деформации q . Для мультифрактальных рядов при положительных q основной вклад в функцию $F_q(s)$ дают сегменты v , проявляющие большие отклонения $F^2(v,s)$, а при отрицательных q доминируют сегменты с малыми дисперсиями $F^2(v,s)$. В результате можно заключить, что при отрицательных значениях q обобщенный показатель Херста $h(q)$ описывает сегменты, проявляющие малые флуктуации, а при положительных – большие.

При реализации изложенного алгоритма следует иметь в виду, что с ростом размера сегментов до $s > N/4$ функция $F_q(s)$ теряет статистическую информативность ввиду малости числа $N_s < 4$ сегментов, используемых при усреднении. Таким образом, проведение указанной процедуры предполагает исключение, с одной стороны, больших сегментов ($s > N/4$), а с другой – малых ($s < 10$).

Стандартное представление скейлинговых свойств временного ряда предполагает переход от показателя Херста $h(q)$ к массовому показателю $\tau(q)$ и спектральной функции $f(\alpha)$, которые являются основными характеристиками мультифракталов:

$$\tau(q) = qh(q) - 1, \quad (2.77)$$

$$f(\alpha) = \alpha q(\alpha) - \tau(q(\alpha)). \quad (2.78)$$

Здесь значение $q(\alpha)$ определяется условием $\tau'(q) = \alpha$, где штрих означает дифференцирование по аргументу. При $|q| \gg 1$ зависимость $\tau(q)$ имеет линейно возрастающий вид с криволинейным участком вблизи $q=0$, который обеспечивает замедление роста массового показателя τ с увеличением параметра деформации q . Спектральная функция $f(\alpha)$ определяет набор монофракталов с размерностями α , которые формируют исследуемое множество: при этом относительное число монофракталов с данными α , которые попадают в ячейки размером l , покрывающие это множество, задается соотношением $N(\alpha) \sim l^{-f(\alpha)}$. Согласно этому определению ширина спектра $f(\alpha)$ будет тем больше, чем сильнее выражены мультифрактальные свойства (так, монофрактал характеризуется единственным значением α).

Выводы

Во второй главе дан анализ проблем и возможностей временных рядов при реализации различных задач. Важное место в работе занимает проблема использования временных рядов в задачах нелинейной динамики. Это расчёты фрактальной размерности аттрактора, оценка ляпуновских показателей по временному ряду, идея реконструкции аттрактора – теорема Такенса.

В перспективе важное место занимают временные ряды при реализации задач управления хаотическими системами.

В главе также отмечено направление, связанное с новыми возможностями для метрологии и теории измерения, а именно – влияние синергетических принципов к формированию интегральных размерностей в интеллектуальных системах. Интегральные размерности позволяют получать репрезентативную информацию о системе (процессе) в контексте принятия корректного решения.

Литература

1. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Едиториал УРСС, 2002. - 360 с.
2. Лоскутов А.Ю., Котляров О.Л., Журавлев Д.И. Временные ряды: Анализ и прогноз, Сб. тр. XI межд. конф. Ижевск: Научн. изд. центр «Регулярная и хаотическая динамика», Т. 1. 2004. - с. 9-46.
3. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит. 1992.- 544 с.
4. Кузнецов С.П. динамический хаос (курс лекций). Учеб. Пособие для ВУЗов. М.: Изд-во физ. - мат. лит., 2006. - 356 с.
5. Головкин В.А., Чумерин Н.Ю. Нейросетевые методы определения спектра Ляпунова хаотических процессов. Нейрокомпьютеры: разработка и применение, №1, 2004. - с.1-15.
6. Логов А.Б., Замараев Р.Ю., Тайлаков В.О. Моделирование временных рядов биржевых показателей на фазовых плоскостях. Вычислительные технологии. Т. 13, № 2, 2008. - с. 91-98.
7. Лоскутов А.Ю. Проблемы нелинейной динамики I Хаос. Вестник Московского ун-та, серия 3. Физика. Астрономия, №2, 2003. - с. 3-20.

8. Abarbanel H.D.I., Brown R., Sidorowich J.J., Tsimring L.S. The analysis of observed chaotic data in physical systems // *Rev. Mod. Phys.* 65, 1993. - p.1331-1391.
9. Федер Е. Фракталы. - М.: Мир, 1991.- 254 с.
10. Астафьева И.М. Вейвлет - анализ: основы теории и примеры применения. УФН, №11, 1996.- с. 3-23.
11. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет — преобразования. Военный ун-т связи С.-Петербурга. 1999. - 192 с.
12. Чуи Ч. Введение в вейвлеты. М.: Мир, 2001. - 412 с.
13. Владимирский Э.И. Современные информационные технологии для обработки временных рядов. Тр. II Респ. научн. конф. «Современные проблемы информатизации, кибернетики и информационных технологий» Баку, 26-28 октября 2004. - с. 137-138.
14. Павлов А.Н., Анищенко В.С. Мультифрактальный анализ сложных сигналов //УФН, Т. 177, №8, 2007. - с. 859-876.
15. Нунс Дж. - К., Найт -Али А. Моделирование ЭКГ на основе преобразования Гильберта // *Медицинская техника*, М -2005. -с. 36-39.
16. Крянев А.В., Лукин Г.В. Математические методы обработки неопределенных данных. Изд-во физ. - мат. лит. - 2003. -216 с.
17. Зубков А.В. Предсказание многомерных рядов с помощью нейросетей. Информационные технологии, №2, 2002. - с. 20-26.
18. Дегтярев К. Прогнозирование валютных котировок с использованием модифицированного стационарного метода, основанного на нечетких временных рядах. [www. exponenta.ru/education/news/degtyarev/p.2.pdf](http://www.exponenta.ru/education/news/degtyarev/p.2.pdf)
19. Shyi – Ming Chen and Chio-Ching Hsu. A New Method Forecast Enrollments Using Fuzzy Time Series. *Int. Journal of Applied Science and Engineering*, 2,3, 2004.- p.p.234-244.
20. Песин Я.Б. Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения /Пер. с англ. Под ред. Б.М. Гуревича - М. - Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. - 2002. - 404 с.
21. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. Синергетика и проблемы измерений // *Измерительная техника*. №11, 2008. с. 9-13.

22. Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера, 2006., 488 с.

23. Pedrycz W., Bargiela A. Fuzzy fractal dimensions and fuzzy modeling//Information Sciences,153,2003.p.p.199-216.

24. Толмачев С.А., Григоренко М.Ю. Один подход к решению задачи о нечетком покрытии //Кибернетика и системный анализ.№6,1992.с. 164-165.

25. Дубовиков М.М., Крянев А.В., Старченко Н.В. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов //Вестник РУЭН. Сер. Прикладная и компьютерная математика. 2004. Т.3.№1.с. 30-44.

26. Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. М.: Комкнига. 2005. - 232 с.

27. Дремин И.М., Иванов А.В., Нечитайло В.А., Вейвлеты и их использование //УФН. 2001. Т. 171. №5. с. 465-501.

28. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 464 с.

29. Wang Y. Fractal function estimation via Wavelet Shrinkage//Journal of Royal Statistical Society.1997. Vol. 59. p. 603-613.

30. Тагиев Р.А., Владимирский Э.И. Разработка новых методов определения прямых индикационных признаков при дистанционном зондировании природных объектов //Изв. высших техн. учебн. заведений Азербайджана. Баку. 2002.№6.с.61-64.

31. Муратов И.Х., Владимирский Э.И., Агаев Ф.У. Нечетко-фрактальная мера + вейвлет-преобразование в контексте анализа, реконструкции и принятия решений по сигналам в открытой информационной системе // Тр. IX Межд. научно-техническая конференция «Кибернетика и высокие технологии XXI века». 13-15 мая. 2008, Воронеж. 2008. Т. 1. с. 277-287.

32. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. М.: Университетская книга, 2005. 848 с.

33. Sprott J.C. Time-Series Analysis. Oxford University Press, 2003. - 528p.

34. Chloverakis K.E., Sprott J.C. A comparison of correlation and Lyapunov dimensions. Physica D 200. 2005 – p.156-164.

35. Владимирский Э.И., Тагиев Ф.К. Синергетический подход к формированию интегральных размерностей в интеллектуальных информационно-измерительных системах. Информационные технологии. №6 (166). 2010. – с. 62-67.

36. Олемской А.И., Борисюк В.Н., Шуда И.А. Мультифрактальный анализ временных рядов. Вісник СумДУ Серія «Фізика, математика, механіка», №2,2008.с.70-81.

ГЛАВА 3. ХАОС В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Появление хаотичности в той или иной системе не связано с действием каких-либо априори случайных сил. Природа хаотического поведения полностью детерминированных систем кроется в свойстве приобретать при определенных значениях параметров экспоненциальную неустойчивость траекторий. Фундаментальное значение исследований в этой области состоит в том, что они выявляют природу случайного, дополняя гипотезу молекулярного хаоса гипотезой динамической стохастичности [1].

Впервые на связь между статистикой и неустойчивостью обратил внимание А. Пуанкаре [2]. В то же время статистический подход к описанию систем со многими степенями свободы был предложен Л. Больцманом [2]. Он выдвинул предположение, что движение частиц в разряженном газе следует рассматривать как случайное и каждой частице доступна вся энергетическая разрешенная область фазового пространства. Такое представление о системах многих частиц известно как эргодическая гипотеза [3]. Однако ее строгое обоснование долгое время не находило подтверждения.

А. Пуанкаре показал, что в окрестности неустойчивых неподвижных точек движение имеет чрезвычайно сложный характер. Это явилось первым указанием на то, что нелинейные динамические системы могут проявлять хаотические свойства [4]. Впоследствии Д. Биркгоф [1] показал, что при рациональном отношении частот (резонанс) всегда существуют устойчивые и неустойчивые неподвижные точки.

Первое глубокое исследование природы статистических законов было проведено Н.С. Крыловым [5]. Он показал, что в их основе лежит свойство перемешивания и связанная с ним локальная неустойчивость почти всех траекторий соответствующих динамических систем.

Позднее динамика систем, вызванная такого рода неустойчивостью, стала называться динамической стохастичностью или детерминированным (динамическим) хаосом.

Физически осмысленное понятие детерминированного описания заключается в том, что начальное состояние процесса задается в силу неизбежных флуктуаций некоторым вероятностным распределением. Задача состоит в том, чтобы на основании известного начального распределения предсказать его эволюцию.

Если малые возмущения начального условия с течением времени не нарастают (то есть имеет место устойчивость), то поведение такой

системы предсказуемо. В противном случае процесс может быть описан только вероятностным образом. Именно эти соображения легли в основу современного представления о динамическом хаосе.

Новый этап в развитии понятия хаотичности и ее зарождения в детерминированных системах возник после работ А.Н. Колмогорова и Я.Г. Синая [6-8], где для динамических систем было введено понятие энтропии. Эти работы положили начало созданию теории стохастических динамических систем.

В середине XX в. было доказано, что в классической механике движение в фазовом пространстве не является полностью ни регулярным, ни нерегулярным, а тип траектории зависит от выбора начальных условий. Это утверждение сейчас носит название теоремы КАМ (А.Н. Колмогоров, 1954 г.; В.И. Арнольд, 1963 г.; Ю. Мозер, 1967 г.) [7,9,10].

Экспоненциально высокая чувствительность переменных к начальным условиям оценивается показателями Ляпунова. Наибольший ляпуновский показатель является мерой того, насколько близкие траектории разбегаются в фазовом пространстве.

Положительный показатель Ляпунова свидетельствует о существовании хаотического движения в динамической системе с ограниченными траекториями.

Хаос – это характерная черта именно детерминированных нелинейных систем.

Э. Лоренц (1963г.) нашел один из первых примеров детерминированного хаоса в динамических системах, рассматривая уравнение Навье-Стокса, описывающее движение жидкости. В результате была получена система из трех обыкновенных дифференциальных уравнений [11]. В 1972 вышла известная монография Г. Хакена, возродившая термин «синергетика» для обозначения направления науки, изучающей общие закономерности возникновения упорядоченности в открытых нелинейных диссипативных системах [12].

На формирование фундаментальных идей синергетики сильное влияние оказали работы И. Пригожина [13] по неравновесной динамике. Возникновение синергетики как самостоятельного научного направления связано с тем, что поведение разнообразных физических, химических, биологических и других систем описывается сходными математическими моделями, и для таких систем характерны одни и те же явления самоорганизации.

Во многих экспериментах наблюдается установление в фазовом пространстве различных локализованных структур. Подобным

нестатическим структурам обычно отвечают аттракторы – устойчивые особые точки, предельные циклы или поверхности торов для квазипериодических движений.

Для динамического хаоса характерен нерегулярный характер – так называемый *странный аттрактор*, похожий на клубок траекторий. Данный термин ввели в 1971 г. математики Д. Рюэль и Ф. Такенс [14]. Размерность странного аттрактора всегда фрактальна. Таким образом, имеет место глубинная взаимосвязь между фракталами и хаосом, хотя термин «фрактал» относится к некоторой статичной геометрической конфигурации, а «хаос» – термин динамики.

Таким образом, стало очевидным, что хаотические свойства могут проявлять самые разнообразные нелинейные системы, и если хаос не обнаруживается, то, возможно, лишь потому, что он возникает либо в очень малых областях параметрического пространства, либо при нефизических значениях параметров.

В заключение необходимо отметить, что исследование хаотических колебаний в последнее время сильно разветвилось. Появились новые направления, связанные с теорией инвариантной меры, изучением гомоклинических структур, свойством гиперболичности, теорией показателей Ляпунова [1] и другими характеристиками.

3.1. Свойства хаотических динамических систем

Свойства хаотических систем даются такими инвариантами, как характеристические показатели Ляпунова, размерность странного аттрактора, энтропия динамической системы и рядом других. Кроме того, важными характеристиками динамических систем являются эргодичность и перемешивание, K – свойство, бернуллиевость, удовлетворение центральной предельной теореме теории вероятностей, экспоненциальное убывание корреляций [1]. Установление последних свойств в динамической системе положено в основу современного представления о детерминированном хаосе. Описание хаотических динамических систем возможно также с помощью исследования характеристик их хаотических аттракторов или путем рассмотрения поведения типичных фазовых траекторий.

Показатели Ляпунова и энтропия динамических систем

Пусть $x(t)$ - типичная фазовая траектория системы $x=v(x,a)$ и $x_i(t)$ - близкая к ней траектория, $x_i(t) = x(t) + \xi(t)$. Рассмотрим функцию

$$\Xi(\xi(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\xi(t)|}{|\xi(0)|},$$

которая определена на векторах начального смещения $\xi(0)$ таких, что $|\xi(0)| = \varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда в зависимости от направления вектора $\xi(0)$ функция $\Xi(\xi(0))$ будет принимать конечный ряд значений $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, которые называются *характеристическими показателями Ляпунова*.

Характеристические показатели Ляпунова служат мерой хаотичности динамических систем. В частности, если имеются положительные показатели, то поведение системы будет хаотическим.

Строгое обоснование теории характеристических показателей Ляпунова получила после доказательства известной мультипликативной эргодической теоремы [1], которая устанавливает существование так называемых правильных по Ляпунову траекторий в фазовом пространстве. Рассмотрим измеримый мультипликативный коцикл относительно преобразования T , т.е. измеримую функцию $\psi(m, x)$, $x \in M$, со значениями в пространстве квадратных матриц порядка $j \geq 1$ такую, что выполняется равенство

$$\psi(m+k, x) = \psi(m, T^k x) \psi(k, x).$$

Тогда величина $\lambda^+(x, q) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1/n) \ln \|\psi(m, x)q\|$, $q \in \pi^{-1}(x)$, где $\pi^{-1}(x)$ -слой над $x \in M$, называется *характеристическим показателем Ляпунова* преобразования T с коциклом $\psi(m, x)$.

Теперь, если для некоторого нормального базиса $\{e_i(x)\}$ имеет место равенство $\sum_i \lambda^+(x, e_i(x)) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \ln |\det \psi(m, x)|$, то точка $x \in M$ называется *правильной вперед*.

Соответствующий характеристический показатель λ^- получается заменой верхнего предела при $n \rightarrow -\infty$. Точка x называется *правильной назад*, если она является *правильной вперед* для показателя λ^- . Двусторонние траектории динамических систем (т.е. траектории, существующие для $t > 0$ и $t < 0$) приводят к понятию (при некоторых дополнительных условиях [15]) *правильных точек* по

Ляпунову с согласованными значениями показателей λ^+ и λ^- . Далее можно показать, что если x -правильная по Ляпунову точка, то $T^k x$ будет правильной по Ляпунову траекторией. Пусть $X_0 \subset M$ - множество правильных по Ляпунову траекторий. Мультипликативная эргодическая теорема утверждает, что X_0 имеет полную меру. Таким образом, определяется существование показателей Ляпунова, которые могут быть введены для почти всякого $x \in M$.

Для одномерных отображений, порождаемых функцией f , имеется единственный показатель Ляпунова, который можно записать как

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left| \frac{df}{dx_i} \right|.$$

Другими важными характеристиками служат энтропия [16], которая определяет обратную величину среднего времени предсказуемости поведения хаотической системы и характеризует ее сложность, и размерность инвариантного множества динамической системы.

Формально энтропия h динамической системы (M, S, μ, T) вводится как верхняя грань по всем конечным измеримым разбиениям η : $h(T) = \sup \{h(T, \eta)\}$. Таким образом, энтропия представляет собой наибольшую возможную скорость создания информации преобразованием T с помощью конечных разбиений пространства состояний динамической системы. Поскольку энтропия – количественная характеристика, с помощью которой можно (дополнительно к прочим важным инвариантам) описать отдельные стороны хаотичности, она оказывается тесно связанной с другими характеристиками поведения динамических систем. В частности, энтропия выражается через показателя Ляпунова следующим образом [17]:

$$h(T) = \int \sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i(x) d\mu.$$

Это соотношение может быть в ряде случаев упрощено. Именно: если T - дифференцируемое отображение конечномерного многообразия и μ - эргодическая вероятностная мера для динамической системы (M, S) , то $h \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$ [16]. Равенство в этом выражении имеет место, если рассматривать одну хаотическую компоненту движения, т.е. если мера μ - мера Синая-Рюэля-Боуэна

[16]. Величина энтропии h не зависит от способа разбиения фазового пространства. Кроме того, если две динамические системы имеют равные энтропии, то их статистические законы движения одинаковы.

Размерностные характеристики инвариантных множеств динамических систем могут вводиться по-разному. Пусть M - компактное пространство и $A \subset M$. Допустим, что $N(\varepsilon)$ - минимальное число шаров радиуса ε , необходимых для покрытия множества A . Тогда пределы $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln N(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon) = \overline{C}(A)$ и $\underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln N(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon) = \underline{C}(A)$ называется соответственно *верхней и нижней емкостью* множества A .

Характеристические показатели Ляпунова, энтропия и размерность дают возможность посредством изучения наблюдаемых (т.е. сигнала или определенной реализации, по которым судят о характере процесса в исследуемой физической системе) определить количество независимых переменных, однозначно описывающих состояние системы, и тем самым установить конечномерность рассматриваемого явления. Большинство результатов в этом направлении основаны на теории Такенса [18] и используют тот факт, что свойства аттрактора можно определить из временной последовательности одной составляющей. Именно: если составить векторную функцию $\hat{y} = \{z_i(t), z_i(t+\tau), \dots, z_i(t+2n\tau)\}$, где $z_i(t)$ - произвольная составляющая переменной x , то метрические свойства исходного n -мерного и построенного $(2n+1)$ -мерного пространства будут одинаковы.

Опираясь на теорию Такенса, в принципе можно отличить *динамический процесс от чисто случайного*, т.е. недетерминированного. Наблюдаемая $\hat{y} = \{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ называется *детерминированно порожденной*, если выполнены следующие условия: существуют конечномерная динамическая система $\{T\}$, точка x_0 и липшиц-непрерывная функция ϕ такие, что выполняется соотношение $\phi(T^i(x_0)) = y_i$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$, причем $dist(T^i x, T^i x') \leq const \cdot e^{\lambda i} dist(x, x')$, т.е. максимальный ляпуновский показатель для $\{T\}$ является ограниченным. Введем пространство B всех наблюдаемых как множество последовательностей $\hat{y} = \{y_0, y_1, y_2, \dots\}$, $\sum_{i=0}^{\infty} |y_i| / 2^i < \infty$. Тогда при соответствующем введении

нормы пространство B будет полным нормированным линейным пространством. Зададим в B динамическую систему посредством определения отображения сдвига $\hat{y} \rightarrow T\hat{y}$, где $T\hat{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots)$. Таким образом, получим универсальную динамическую систему, порождающую любую ограниченную наблюдаемую. Рассмотрим предельное множество $A(\hat{y})$ и предельную емкость, т.е. размерность $C(A)$ наблюдаемой. Эти инварианты легко ввести, если рассмотрим произвольную наблюдаемую \hat{y} как начальное состояние универсальной динамической системы в пространстве B . Тогда $A(\hat{y}) = \text{clos}(\{T^k \hat{y}\}_{k=0}^{\infty})$, где $\{T^k \hat{y}\}_{k=0}^{\infty}$ - полутраектория, заданная отображением T . Если $C(A) < \infty$, то данной наблюдаемой соответствует конечномерная динамическая система. При выполнении дополнительного условия об ограниченности максимального ляпуновского показателя наблюдаемая будет детерминированно порожденной. Следовательно, определенная обработка наблюдаемого сигнала может дать ответ на принципиальный вопрос о конечномерности исследуемого процесса.

3.2 Характеристики хаотичности

Опишем теперь иерархию важных свойств динамических систем, которые можно рассматривать как последовательно усиливающие друг друга свойства хаотичности [19].

1. *Существование инвариантной меры* [20]. Множество с введенной на нем мерой может быть рассмотрено как пространство элементарных событий. В этом случае каждая функция, тем или иным образом определенная на этом множестве, является случайной переменной, а последовательность ее итераций, получаемых через некоторое преобразование $\{T\}$, можно представить как последовательность случайных величин. Поэтому существование инвариантной меры для конкретного семейства динамических систем имеет следствием его хаотическое поведение.

2. *Перемешивание* [21,22]. Если автокорреляционная функция $b(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$ для любой функции f , $\int |f|^2 d\bar{P} < \infty$, где \bar{P} - инвариантное распределение, то в системе имеет место перемешивание. Существование перемешивания имеет следствием необратимость и непредсказуемость динамики.

3. *K-свойство* [23]. Если динамическая система является K - системой, то она обладает свойством перемешивания всех степеней и имеет положительную энтропию. K - свойство означает, что детерминированную динамическую систему можно закодировать в регулярный стационарный процесс теории вероятностей.

4. *Бернуллиевость* [15,20]. Поведение динамической системы тем случайнее, чем ближе ее кодировка к последовательности независимых случайных величин. Если кодировка динамической системы в регулярный стационарный процесс представляет собой такую последовательность, то динамическая система называется бернуллиевской.

5. *Выполнение условий центральной предельной теоремы* [20,23]. Для любой функции f , описывающей тот или иной динамический процесс, найдется такая дисперсия $\sigma = \sigma(f)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ x : \sqrt{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^k(x)) - \bar{f} \right] < \alpha \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-u^2/2\sigma} d\mu, \quad \bar{f} = \int f d\mu.$$

Смысл выполнения центральной предельной теоремы состоит в том, что распределение мер таких областей x , временные флуктуации которых не превышают определенного числа α , является гауссовским.

6. *Скорость убывания корреляций* [20,23]. Если для функции f ее среднее $\bar{f} = 0$, то найдутся такие $\rho > 0$, $0 < q < 1$, что

$$\left| \int f(T^k(x)) f(x) d\mu \right| \leq \rho q^{|k|}.$$

В этом случае имеет место экспоненциальное убывание корреляций, что для гладких функций f отвечает близости системы к конечной цепи Маркова.

Хаотические диссипативные динамические системы можно изучать путем исследования свойств и структуры странных аттракторов, являющихся математическим образом хаотических колебаний.

3.3 Понятие аттрактора. Аттракторы динамических систем

Одним из основных методов исследования автоколебательных систем является формулировка и анализ решений уравнений, описывающих их динамику. Автоколебательные режимы могут иметь место исключительно в нелинейных и диссипативных динамических системах [24]. Отличительным свойством диссипативных динамических систем, описываемых системой обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = F(x, \mu)$, $x \in R^N$, является сжатие во времени элемента объема фазового пространства [24]:

$$V(t) = V(t_0) \exp\left[t(\overline{\operatorname{div} F})\right], \operatorname{div} F = \sum_{i=1}^N \frac{d\dot{x}_i}{dx_i} < 0.$$

В силу сжатия фазового объема предельное множество фазовых траекторий всегда будет иметь нулевой объем. Однако структура предельного множества при этом может быть различной: точка, линия или множество поверхностей, имеющее в сечении Пуанкаре структуру типа канторовой.

Длительное время с образом динамического хаоса связывался так называемый странный аттрактор [21]. Позднее выяснилось, что хаотические автоколебания по своим свойствам могут существенно различаться, что обуславливает различия в структуре соответствующих им аттракторов. Оказалось, что наблюдаемое в экспериментах, отвечает режимам квазигиперболического аттрактора или квазиаттрактора [24].

Отличительной особенностью гиперболических, квазигиперболических аттракторов и квазиаттракторов является экспоненциальная неустойчивость фазовых траекторий и дробная размерность. Экспоненциальная неустойчивость является критерием хаотического поведения системы. Дробная метрическая размерность свидетельствует о том, что аттрактор – сложный геометрический объект.

Необходимо отметить, что непериодические колебания могут обладать асимптотической устойчивостью при наличии сложной геометрии аттрактора или, напротив, быть экспоненциально неустойчивыми и соответствовать аттрактору, являющемуся простым геометрическим объектом (многообразием) [25].

Так, например, в [26] предлагается ввести определение «странности» аттрактора, связывая его не с динамикой системы, а с геометрической структурой.

Определение 3.1 Странный аттрактор – это аттрактор, который не состоит из конечного множества точек и не является кусочно –

дифференцируемым. Кусочно-дифференцируемым аттрактором мы называем кусочно – дифференцируемую кривую, поверхность или объем, который ограничен кусочно-дифференцируемой поверхностью.

Таким образом, учитывая важность проблемы анализа сложных неперiodических режимов колебаний в динамических системах, целесообразно классифицировать их определения и основные свойства.

Пусть динамическая система в непрерывном времени имеет вид:

$$\dot{x} = F(x), \quad (3.1)$$

где $x = x(t) \in R^n$ - вектор состояния системы, $0 \leq t < \infty$.

Определение 3.2 [27]. Замкнутое множество $\Omega \subset R^n$ называется аттрактором системы (3.1), если: а) существует открытое множество $\Omega_0 \supset \Omega$ такое, что все траектории $x(t)$ системы (3.1), начинающиеся в Ω_0 , определены при всех $t \geq 0$ и стремятся к Ω при $t \rightarrow \infty$ (то есть $dist(x(t), \Omega) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, если $x(0) \in \Omega_0$, где $dist(x, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|x - y\|$ - расстояние от точки x до множества Ω); б) никакое собственное подмножество Ω этим свойством не обладает.

Всюду под $\|\cdot\|$ понимается евклидова норма, а под $\|\cdot\|_\infty$ - равномерная норма в пространствах векторов и функций. R^n - евклидово пространство n -мерных векторов.

Определение 3.3 [27]. Аттрактор называется хаотическим, если он ограничен и любая траектория, начинающаяся на нем, неустойчива по Ляпунову.

Определение 3.4 [27]. Система называется хаотической, если у нее существует хотя бы один хаотический аттрактор.

В настоящее время имеется несколько определений аттрактора, которые, по-видимому, не сводятся друг к другу. Следуя [28], будем опираться в определении аттрактора на понятие поглощающей области. Область $U \subset M$ называется поглощающей, если $T^t \bar{U} \subset U$ для $t > 0$, где \bar{U} - замыкание U . При этом множество $\bigcap_{t>0} T^t U$ называется *максимальным аттрактором* в поглощающей области U . Множество A называется *аттрактором*, если существует поглощающая область U , в которой A - максимальный аттрактор. Область $B(A)$ называется *областью притяжения* аттрактора A , если она состоит из таких точек, через которые проходят положительные полутраектории, стремящиеся к A . Согласно этому определению,

очевидно, устойчивые положения равновесия, устойчивые предельные циклы и устойчивые торы являются аттракторами системы (3.1).

$$\dot{x} = v(x, a), \quad (3.2)$$

где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $a \in R$, с начальными условиями $x(t_0) \equiv x_0$.

3.3.1 Регулярные аттракторы

Соответствующими аттракторами дифференциальной системы являются точка в фазовом пространстве, предельный цикл и предельный n -мерный тор. Сигнатура спектра ляпуновских характеристических показателей фазовой траектории в этих случаях будет [11,24]:

$$\begin{aligned} & \text{"-" , "-" , ... , "-" - состояние равновесия,} \\ & \text{"0" , "-" , ... , "-" - предельный цикл,} \\ & \underbrace{\text{"0" , "0" , ... , "0" , "-" , ... , "-"}}_{\text{тор, } n \geq 2} \text{ - } n \text{-мерный.} \end{aligned}$$

Что касается других типов аттракторов – гиперболические, квазигиперболические и другие, то они подробно рассмотрены в [1].

Непериодическим решением системы (3.2) могут соответствовать странные хаотические аттракторы сложной геометрической структуры, которые имеют, по крайней мере, один положительный ляпуновский показатель и, как следствие, дробную размерность, определяемую по формуле Каплана-Йорке [29-32]:

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_j + 1|}, \quad (3.3)$$

где j - наибольшее целое число, для которого $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0$. Ляпуновская размерность D , рассчитанная по формуле (3.3), представляет собой одну из фрактальных размерностей множества и служит оценкой снизу для метрической размерности аттрактора. Если применить формулу (3.3) к указанным трем типам аттракторов, то получим нулевую размерность для точки, $D = 1$ для предельного цикла и $D = n$ - для n -мерного тора. Во всех случаях *фрактальная размерность строго совпадает с метрической размерностью аттракторов*. То обстоятельство, что указанные типы решений являются асимптотически устойчивыми, а размерность D дается

целым числом и строго совпадает с метрической, позволяет назвать указанные типы аттракторов регулярными.

3.3.2 Хаотические аттракторы

Аттрактор динамической системы называется *странным*, если он отличен от конечного объединения гладких подмногообразий пространства M [28]. Часто подчеркивается, что динамика системы является хаотической благодаря наличию в ее фазовом пространстве странного аттрактора. В этих случаях понятие «странный аттрактор» имеет собирательный смысл, и его иногда заменяют словосочетанием «*хаотический аттрактор*». Под хаотическим аттрактором может подразумеваться несколько типов аттракторов, однако гиперболические, стохастические (или квазигиперболические), перемешивающие и квазистохастические аттракторы (или квазиаттракторы) являются наиболее распространенными.

Множество A называется *гиперболическим аттрактором*, если оно является аттрактором и одновременно гиперболическим множеством динамической системы, т.е. ее касательное пространство разлагается на два подпространства, E^δ и E^u , которые определяются тем фактом, что бесконечно близкие траектории, соответствующие пространству E^δ , экспоненциально сходятся друг к другу при $t \rightarrow \infty$, а в пространстве E^u экспоненциально сходятся при $t \rightarrow -\infty$. Более точно, следуя [33] определим гиперболическую траекторию $T^n \mathbf{x} = \mathbf{x}_n$ динамической системы следующим образом. Пусть каждая итерация T^n является гладкой в окрестности $\mathbf{x} \in M$. Тогда найдется дифференциал $\partial T_{\mathbf{x}_n}$ отображений касательного пространства $\sum_{\mathbf{x}_n}$ в касательное пространство $\sum_{T\mathbf{x}_n}$. Траектория \mathbf{x}_n называется *гиперболической*, если существуют подпространства $E_{T^k \mathbf{x}_n}^\delta$ и $E_{T^k \mathbf{x}_n}^u$ касательного пространства $E_{T^k \mathbf{x}_n}$, $0 \leq k < \infty$, такие, что $E_{T^k \mathbf{x}_n} = E_{T^k \mathbf{x}_n}^\delta + E_{T^k \mathbf{x}_n}^u$ и $\partial T_{T^k \mathbf{x}_n}(E_{T^k \mathbf{x}_n}^\delta) = E_{T^{k+1} \mathbf{x}_n}^\delta$, $\partial T_{T^k \mathbf{x}_n}(E_{T^k \mathbf{x}_n}^u) = E_{T^{k+1} \mathbf{x}_n}^u$, $\|\partial T_{T^k \mathbf{x}_n} e\| \leq c \|e\|$, $e \in E_{T^k \mathbf{x}_n}^\delta$, $\|\partial T_{T^k \mathbf{x}_n} e\| \geq c^{-1} \|e\|$, $e \in E_{T^k \mathbf{x}_n}^u$, $dist(E_{T^k \mathbf{x}_n}^\delta, E_{T^k \mathbf{x}_n}^u) \geq const$, $0 < k < \infty$, где c - некоторая постоянная. Множество A называется *гиперболическим множеством*, если оно замкнуто и состоит из траекторий, удовлетворяющих условиям гиперболичности. Множество A называется *гиперболическим аттрактором* динамической системы $\{T^t\}$, ($t \in \mathbf{R}$ или $t \in \mathbf{Z}$), если A - замкнутое топологически

транзитивное (т.е. для $U, V \in A$ выполняется соотношение $T^n U \cap V \neq \emptyset$) гиперболическое множество и существует такая окрестность $U \supset A$, что $A = \bigcap_{t \geq 0} T^t(U)$. Таким образом, гиперболический аттрактор A - замкнутое притягивающее множество, инвариантное относительно динамической системы $\{T^t\}$.

Гиперболический аттрактор является структурно устойчивым множеством. Системы с гиперболическим аттрактором имеют наиболее выраженные хаотические свойства. Малые возмущения таких систем не могут привести к качественным перестройкам как самого аттрактора, так и поведения систем в целом. Динамические системы с гиперболическим типом аттрактора являются моделями структурно устойчивых систем со строго хаотическими свойствами [22,34]. Однако в настоящее время гиперболических аттракторов построено немного. Это известный соленоид Смейла-Вильямса (см. напр., [34,35], аттрактор Лози [33,35], аттрактор Плыкина [34,36] и аттрактор Белых [1,37,38].

Аттрактор A является *стохастическим*, если для любой абсолютно непрерывной инвариантной меры μ в U ее смещение $\mu_t(C) = \mu(T^t C)$ при $t \rightarrow \infty$ сходится (слабо) к предельной инвариантной мере ν , которая не зависит от μ , и динамическая система $(A, \nu, \{T^t\})$ обладает свойством перемешивания [22,23,37]. *Стохастический аттрактор является математическим образом наблюдаемого развитого хаотического поведения физической системы.* Известный пример стохастического аттрактора – аттрактор Лоренца при $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 28$ [1,24]. Малые возмущения систем со стохастическим аттрактором могут приводить к модификациям такого аттрактора, но в то же время динамика системы будет оставаться хаотической. Всякое гиперболическое предельное множество является стохастическим аттрактором. В то же время стохастические аттракторы необязательно являются странными [34,37].

Подавляющее большинство аттракторов хаотических динамических систем принадлежат к квазистохастическому типу (т.е. являются квазиаттракторами) [24]. Квазистохастические аттракторы содержат в себе, помимо седловых предельных циклов, еще и устойчивые предельные циклы, период которых достаточно велик, а область притяжения мала. По этой причине для большинства систем их области хаотичности всегда содержат достаточно малые подобласти с регулярной (периодической) динамикой. Слабые

возмущения систем с квазистохастическим аттрактором ведут к сложным качественным перестройкам, как в динамике системы, так и в структуре самого аттрактора. В приложениях, однако, эти обстоятельства не играют существенной роли, поскольку устойчивые предельные циклы, содержащиеся в квазистохастическом аттракторе, не выявляются численно. Динамика системы с квазистохастическим аттрактором также хаотическая. Например, аналитические результаты теории бифуркаций показывают, что в системе Лоренца с параметрами бесконечно близкими к значениям $b = 8/3$, $\sigma = 10.2$, $r = 30.2$, существуют устойчивые предельные циклы [24]. Но никакие численные методы до настоящего времени не выявили этих циклов.

Параллельно с изучением особенностей и типов аттракторов хаотические свойства динамических систем можно исследовать посредством анализа фазовых траекторий. В этом отношении наиболее развитой является теория одномерных отображений.

3.4 Базовые модели динамического хаоса

Начиная с Ньютона, традиционный для физики способ описания динамических систем состоит в использовании дифференциальных уравнений. Однако во многих случаях оказывается столь же естественным и удобным работать с отображениями – разностными уравнениями, определяющими динамику в дискретном времени.

Вначале рассмотрим хаотические системы, описываемые в терминах дифференциальных уравнений.

3.4.1 Система Лоренца

В 1963 году американский исследователь Эдвард Лоренц, занимавшийся проблемами прогноза погоды, опубликовал в журнале «Journal of Atmospheric Sciences» статью «Детерминированное неперiodическое течение».

Физическим процессом, лежащим в основе модели Лоренца, является двумерная тепловая конвекция. Движение жидкости описывается уравнением Навье - Стокса. Используя ряд упрощающих предположений, из уравнений в частных производных для возмущенного потока Лоренц получил систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений вида [24]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xu, \\ \dot{u} &= -bu + xy,\end{aligned}\tag{3.4}$$

где величина x пропорциональна скорости конвекции; y - разности температур между восходящим и нисходящим потоками, u - отклонению вертикального профиля температуры от линейного параметра; σ - число Прандтля; r - приведенное число Рэлея; b - постоянная, характеризующая размеры физической системы.

Уравнения Лоренца явились первой динамической системой, в которой было доказано наличие странного аттрактора. Аттрактор Лоренца в определенной области значений управляющих параметров является гиперболическим и в экспериментах демонстрирует основные свойства странных аттракторов [24].

Далее, исключив из (3.4) переменную y , приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}\ddot{x} + (1 + \sigma)\dot{x} + \sigma(1 - r + u)x &= 0, \\ \dot{u} &= -bu + x^2 + x\dot{x} / \sigma.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Используя замену

$$y = \frac{\varepsilon x}{\sqrt{2\sigma}}, \quad z = \frac{\varepsilon}{\sigma} \left(\sigma u - \frac{x^2}{2} \right), \quad r = \frac{\sqrt{\sigma t}}{\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{r-1}},$$

получим систему

$$\begin{aligned}\ddot{y} + \varepsilon h \dot{y} + y^3 + (z - 1)y &= 0, \\ \dot{z} &= \varepsilon \alpha z + \varepsilon \beta y^2,\end{aligned}\tag{3.6}$$

где $h = (1 + \sigma) / \sqrt{\sigma}$, $\alpha = b / \sqrt{\sigma}$, $\beta = (2\sigma - b) / \sqrt{\sigma}$.

Уравнения (3.6) описывают нелинейный диссипативный параметрически возбуждаемый осциллятор, частота которого инерционным образом управляется амплитудой колебаний.

На рисунке 1 (цветная вкладка) представлена топология аттрактора Лоренца в области, где он является странным.

3.4.2 Система Ресслера

Рассмотрим известную дифференциальную систему – модель Ресслера [24]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b - cz + xz,\end{aligned}\tag{3.7}$$

где a, b, c - параметры системы.

Первоначально эти уравнения были предложены Ресслером в качестве простейшей модели некоторых химических реакций, протекающей в емкости с перемешиванием. Это также трехмерная система, в которой реализуется особая траектория типа петли сепаратрисы седло – фокуса со всеми вытекающими последствиями.

Дифференцируя по времени уравнение (3.7) и исключая переменную y , систему можно привести к обобщенному виду [24]:

$$\begin{aligned} \dot{x} - ax + (1+z)x &= (a+c)z - b, \\ \dot{z} &= b - cz + xz. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В данном виде система интерпретируется как осциллятор под параметрическим и силовым воздействиями, интенсивность которых инерционным образом зависит от амплитуды колебаний осциллятора.

Система Ресслера (3.7) при вариации управляющих параметров демонстрирует универсальный переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода.

Система Ресслера допускает приближенный переход от трехмерного потока к одномерному необратимому отображению [39], рисунок 2 (цветная вкладка), что обусловлено сильным сжатием фазового объема по одному из собственных направлений.

3.4.3 Система Чуа

В ряде задач, связанных с исследованием взаимодействия аттракторов, стохастического резонанса, перемежаемости «хаос – хаос» и других, возникает потребность иметь в распоряжении более сложные специальные модели. Сложность здесь связана с наличием уже не одного, а трех состояний равновесия, симметрии и более сложных типов особых траекторий. С этой точки зрения интересна так называемая цепь Чуа [24], схема которой приведена на рисунке 3.1, включающая только один нелинейный элемент (диод Чуа).

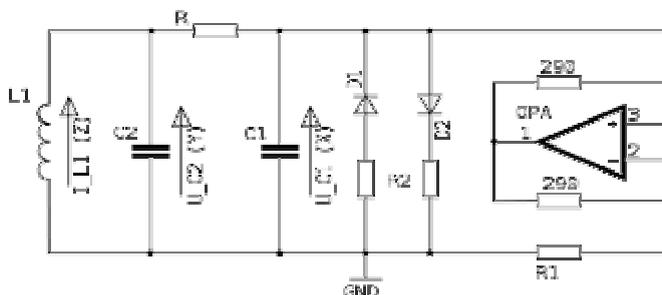


Рисунок 3.1 Схема генератора Чуа.

Уравнения системы имеют следующий вид [24]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha[y - h(x)], \\ \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y,\end{aligned}\tag{3.9}$$

где $x = V_1 / E$, $y = V_2 / E$, $z = i / (EG)$,

$$\alpha = C_2 / C_1, \quad \beta = C_2 / (LG^2), \quad \tau = tG / C_2,$$

$$h(x) = bx + 0.5(a - b)(|x + l| - |x - l|), \quad a = l + G_a / C,$$

$$b = l + C_b / G.$$

Уравнение системы (3.9) также сводятся к обобщенным уравнениям инерционного осциллятора [24]:

$$\begin{aligned}\ddot{z} + \dot{z} + \beta z &= \beta x, \\ \dot{x} &= \frac{-\alpha}{\beta} \dot{z} - \alpha h(x).\end{aligned}\tag{3.10}$$

В системе (3.10) в силу симметрии реализуется двойная петля сепаратрисы седло-фокуса, более сложная фигура, которая порождает и более сложный тип хаотического аттрактора.

Необходимо отметить, что система Чуа является одной из базовых моделей, используемых при изучении различных фундаментальных и прикладных вопросов динамического хаоса [40].

Можно также отметить, что в зависимости от параметров, схема Чуа может демонстрировать различные регулярные и хаотические режимы.

Демонстрация аттрактора системы Чуа представлена рисунком 3 (цветная вкладка).

3.4.4 Система Чена

Система уравнений Чена имеет вид [41]:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = (c - a)x + cy - xz \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases}\tag{3.11}$$

где $a > 0$, $b > 0$ и параметр $c (2c > a)$.

В [42] отмечено, что хаотичность системы Лоренца в нехаотичном режиме демонстрирует новую хаотическую систему – систему Чена.

Системы Лоренца и Чена математически сходные структуры, но топологически они не эквивалентны, так как система Чена имеет более

сложное поведение. Все три положения равновесия системы Чена в ее хаотическом состоянии являются неустойчивыми и динамика этой системы полностью иррегулярна.

Аттрактор Чена численно реализуется при $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$ и представлен на рис. 4 (цветная вкладка). На рис 3.2 представлен хаотический аттрактор и временной ряд системы Чена.

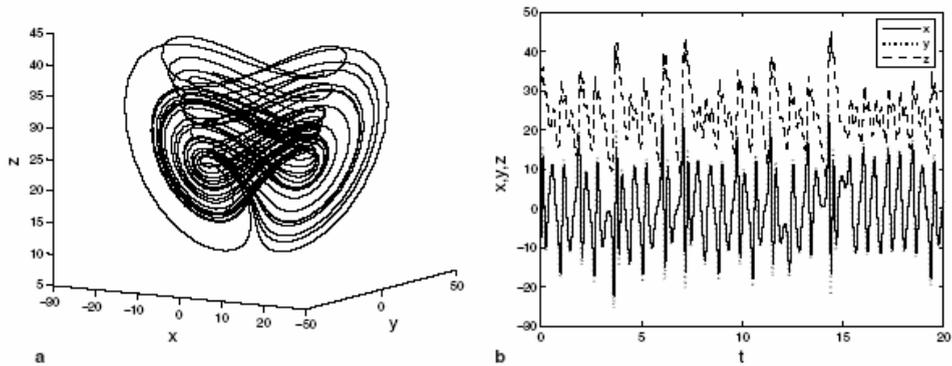


Рисунок 3.2 а – хаотический аттрактор Чена, б – хаотическое поведение системы Чена. Параметры системы : $a=35$, $b=3$, $c=28$. Начальные условия: $x(0)=-10$, $y(0)=0$, $z(0)=37$.

3.4.5 Отображение Икеды

Отображение Икеды - модель возбуждаемого лазером кольцевого резонатора с нелинейной средой. В 1980 г. японские исследователи Икеда, Даидо и Акимото предложили механизм возникновения сложной динамики в нелинейной оптической системе – кольцевом резонаторе, содержащем среду с фазовой нелинейностью (Ikeda, Daido, Akimoto, 1980). Резонатор возбуждается лучом лазера через полупрозрачное зеркало (рис. 3.2) [30, 43].

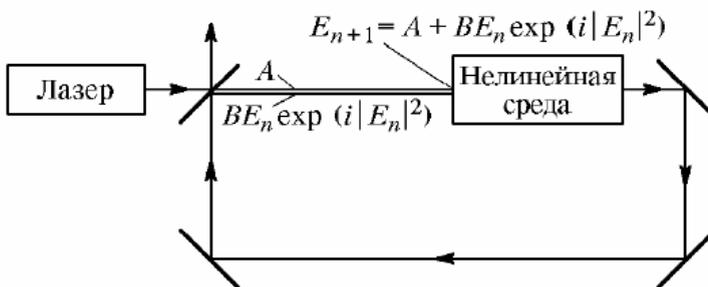


Рис. 3.2 Кольцевой резонатор, возбуждаемый внешним источником когерентного излучения.

Нетривиальные колебательные режимы могут реализоваться благодаря интерференции монохроматического сигнала на входе и модулированного по фазе сигнала, прошедшего через нелинейную среду.

Если пренебречь временем релаксации отклика среды на изменение интенсивности света, то значения комплексной амплитуды поля E на входе в нелинейную среду при n -м и $(n+1)$ -м проходе по кольцевому резонатору связаны следующим соотношением:

$$E_{n+1} = A + BE_n \exp(i|E_n|^2 + i\phi). \quad (3.12)$$

Здесь A - параметр интенсивности света от лазера, B - параметр диссипации поля в резонаторе. Величина, фигурирующая в показателе экспоненты, соответствует набегу фазы при обходе резонатора: параметр ϕ характеризует отстройку частоты излучения лазера от собственной моды резонатора, а добавка $|E|^2$ обусловлена нелинейным сдвигом фазы из-за зависимости показателя преломления от амплитуды поля.

Вычисление якобиана отображения Икеды приводит к результату $J = B^2$, так что при $B < 1$ эта система диссипативная. На рис. 3.3 показаны портреты хаотических аттракторов, реализующихся в отображении Икеды при различных значениях параметра A .

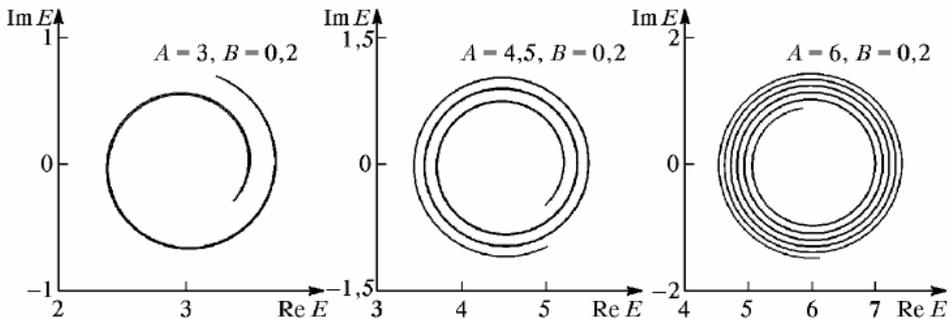


Рис. 3.3 Странный хаотический аттрактор в отображении Икеды при $B=0,2$, $\phi=0$, нескольких различных значениях параметра интенсивности падающего излучения.

На рис. 3.4 представлена карта динамических режимов отображения Икеды на плоскости параметров (A, B) .

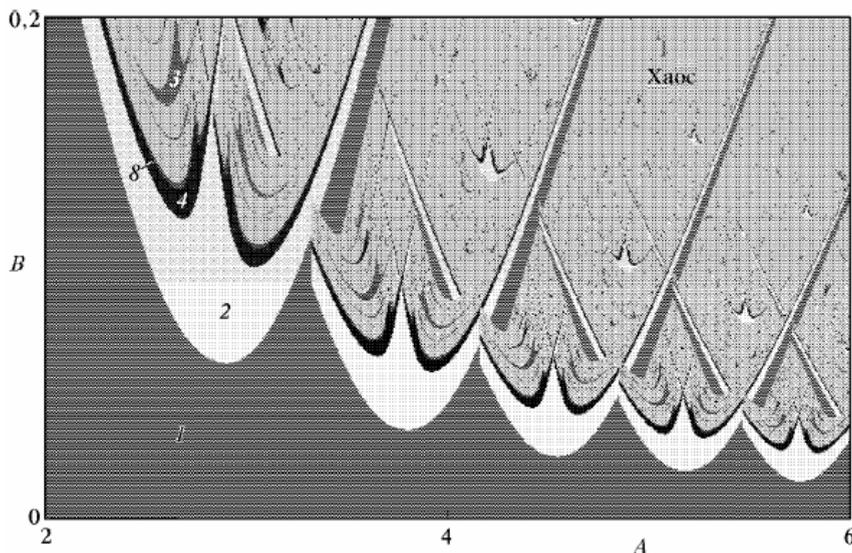


Рис.3.4 Карта динамических режимов отображения Икеды.

Если увеличивать параметр интенсивности излучения A при фиксированном уровне параметра потерь в резонаторе B , то переход к хаосу происходит, как правило, через каскад бифуркаций удвоения периода.

Однако глобальная структура границы хаоса, как видно из рисунка, устроена сложным и нетривиальным образом. В частности, имеются узкие полосы регулярной динамики, простирающиеся далеко в область, занятую хаосом.

Аттрактор Икеды представлен рисунком 5 (цветная вкладка).

3.4.6 Отображение Чирикова

Хаос в гамильтоновых системах. Параметр стохастичности. Критерий Чирикова перекрытия нелинейных резонансов. В теории динамического хаоса в гамильтоновых классических системах полезными понятиями, характеризующими переход к хаосу, является параметр стохастичности и параметр Чирикова перекрытия нелинейных резонансов [44]. Приведем эти понятия, используя простейший пример нелинейной системы – плоский ротатор, взаимодействующий с внешним полем в виде бесконечной периодической последовательности δ -образных импульсов. Гамильтониан системы имеет вид

$$H(J, \theta, t) = \frac{G}{2} J^2 + eT \cos \theta \cdot \delta_t(t), \quad (3.13)$$

$$\delta_t(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(ivt) \quad (v = 2\pi/T),$$

где G - обратный момент инерции ротатора, e - амплитуда внешнего поля, J, θ - действие и фаза ротатора, T - период следования импульсов. Уравнение движения для J, θ имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = eT \sin \theta \cdot \delta_t(t) = \frac{\varepsilon}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\theta - nvt), \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial J} = GJ \equiv \omega(J). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Интегрирование уравнений движения (3.14) на временном интервале $t_{n-1} - 0 \div t_n - 0 (t_n = nT)$ приводит к отображению Чирикова:

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} + K \sin \theta_{n-1}, \\ \theta_n &= \theta_{n-1} + I_n \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $I_n = I(t_n - 0) = GTJ_n$, $\theta_n \equiv \theta(t_n - 0)$, $K \equiv \varepsilon GT$. Дискретное отображение (3.15) сохраняет площадь в фазовом пространстве: $|\partial(I_n, \theta_n) / \partial(I_{n-1}, \theta_{n-1})| \equiv 1$. Каждой начальной точке (I_0, θ_0) согласно (3.15) соответствует некоторая фазовая траектория, зависящая от единственного параметра K , называемого параметром стохастичности. Вид фазового пространства для различных значений параметра стохастичности K приведен на рисунке 3.5.

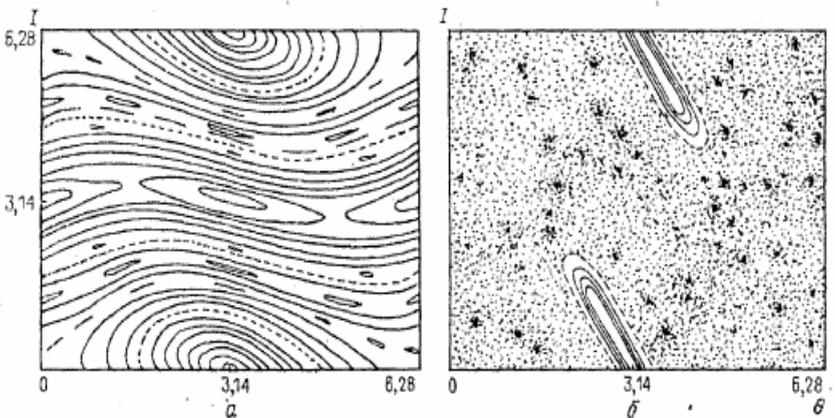


Рисунок 3.5. Фазовая плоскость стандартного отображения
 $a - K = 0.6$, $b - K = 4.2$.

Сразу следует отметить, весьма важное обстоятельство – даже в простейшем случае системы (3.13) с 1,5 степенями свободы фазовое пространство, как видно из рисунка 3.5, является достаточно сложным (точки на рисунке 3.5б соответствуют единственной хаотической траектории) и его детальный анализ возможен лишь с привлечением ЭВМ. Таким образом, в настоящее время теоретический анализ динамического хаоса даже в системах с небольшим числом степеней свободы может быть проведен только в рамках полукачественных методов с последующим привлечением численного эксперимента. Ниже мы рассмотрим более подробно один из таких методов, основанный на понятии взаимодействующих нелинейных резонансов.

Как видно из рисунка 3.5а, при достаточно малых K фазовое пространство (I, θ) в основном содержит два типа траекторий:

- 1) захваченные, соответствующие колебательным движениям в окрестностях резонансов;
- 2) пролетные, отвечающие вращательным движениям.

Захваченные и пролетные траектории разделяются сепаратрисными слоями, содержащими стохастические траектории. Однако при $K \ll I$ размеры таких слоев экспоненциально малы по действию [44]. Анализ отображения (3.15) показывает, что при $K < K_c \approx I$ глобальный хаос в системе (3.13) отсутствует, т.е. хаотические фазовые траектории лежат в ограниченных по действию областях фазового пространства.

Определим размеры областей по действию δI_n первичных резонансов, центры которых J_n^0 находятся из уравнения: $\theta = \omega(J^0) = nv$. Отсюда получаем для $I_n^0 = GTJ_n^0$:

$$I_n^0 = 2\pi n, \quad n \text{ - целое.} \quad (3.16)$$

Пусть система при $t = 0$ находилась в окрестности резонанса с номером n . Тогда при $K \ll I$ для оценки изменения действия $I(t)$ можно пренебречь влиянием остальных резонансов (оставить в сумме (3.14) только член с номером n). Такое приближение соответствует резонансному гамильтониану:

$$H_p = \frac{G}{2} (J - J_n^0)^2 + \frac{\varepsilon}{T} \cos \varphi_n, \quad \varphi_n = \theta - nvt. \quad (3.17)$$

Из (3.17) следует оценка ширины резонанса по действию:

$$\delta I_n = 2 |I_{\max} - I_n^0| = 4(\varepsilon GT)^{1/2}. \quad (3.18)$$

Отметим, что в данном случае δI_n не зависит от n , поскольку все гармоники внешней силы в (3.14) не зависят от действия, что обычно выполняется лишь приближенно.

Приближенный критерий перехода к глобальному хаосу может быть получен из условия взаимодействия (перекрывтия) первичных резонансов. Для системы (3.13) расстояние по действию между ближайшими первичными резонансами есть

$$\Delta I_n \equiv |I_{n+1}^0 - I_n^0| = 2\pi \quad (n = 0, \pm 1, \dots). \quad (3.19)$$

Введем параметр Чирикова перекрывтия нелинейных резонансов [44], который в данном случае может быть представлен в виде

$$\bar{K} = \frac{\delta I}{\Delta I} = \frac{2}{\pi} (\varepsilon GT)^{1/2} = \frac{2}{\pi} K^{1/2}. \quad (3.20)$$

1) При $\bar{K} \ll 1$ ($K \ll 1$) движение локально регулярное, а при $K \geq 1$ происходит переход к глобальному хаосу. Как видно из (3.20), имеет место соотношение $\bar{K}^2 \approx K$ которое, как правило, сохраняется и в более общем случае. Основные свойства системы (3.13) в области сильного развитого хаоса ($K \gg 1$) могут быть представлены в следующем виде [44]:

$$|\delta\theta_n / \delta\theta_0| - K^n = \exp(nh_0). \quad (3.21)$$

Инкремент $h_0 = \ln K$ пропорционален максимальному ляпуновскому показателю, а средняя величина h_0 по фазовому пространству носит название энтропия Колмогорова

2) Затухание фазовых корреляций типа

$$R_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(i\theta_n) d\theta_0 - \exp(-h_0 / 2). \quad (3.22)$$

3) Диффузионный рост средней энергии системы:

$$\bar{I}_n^2 \approx \bar{I}_{n-1}^2 + \frac{K^2}{2} = I_0^2 + \frac{K^2}{2} n, \quad (3.23)$$

где черта означает усреднение по ансамблю траекторий. Аттрактор Чирикова представлен на рисунке 6 (цветная вкладка).

Хаос в диссипативных системах. Странный аттрактор. Фрактальная размерность. В диссипативных системах фазовый объем сжимается. Этим диссипативные системы отличаются от гамильтоновых, в которых согласно теореме Лиувилля фазовый объем сохраняется. Вследствие такого сжатия фазовая траектория стягивается к некоторому множеству точек, называемому аттрактором. Для стационарного состояния аттрактором является точка (узел или фокус), имеющая размерность ноль. При

периодическом движении аттрактор – предельный цикл – имеет размерность один. В случае квазипериодического движения с двумя несоизмеримыми частотами траектория представляет собой незамкнутую спираль и стягивается к двумерному тору. Если несоизмеримых частот π , то аттрактор имеет вид n -мерного тора. Аттрактор, соответствующий стационарному хаотическому движению, называют странным или стохастическим. Рассмотрим, как возникает странный аттрактор (СА), на примере диссипативного стандартного отображения [44].

Уравнения (3.14), обобщенные на случай конечной диссипации, имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= -\gamma(J - J_0) + \varepsilon T \cos \theta \cdot \delta_r(t), \\ \dot{\theta} &= \omega(J), \quad \omega(J) = \omega_0 \left(1 + \alpha \frac{J - J_0}{J_0} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

В (3.24) J_0 - действие, соответствующее устойчивому циклу при $\varepsilon = 0$. Условие $J_0 = 0$ означает, что при $\varepsilon = 0$ в исходной физической системе, кроме диссипации, существует также механизм подкачки энергии. Соответствующее (3.24) дискретное отображение имеет вид:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \exp(-\Gamma)(y_n + \varepsilon \cos 2\pi x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{\omega_0 T}{2\pi} (1 + \alpha \mu y_n) + \frac{K_0}{2\pi} \cos 2\pi x_n \pmod{1}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где $y_n = (J_n - J_0) / J_0$, $x_n = \theta_n / 2\pi$, $\Gamma = \gamma T$, $\mu = [1 - \exp(-\Gamma)] / \Gamma$, $K_0 = \varepsilon \alpha \omega_0 T$. При $\Gamma \rightarrow 0$ отображение (3.25) переходит в стандартное отображение (3.15). Из (3.25) следует, что $|\partial x_{n+1} / \partial x_n - 1| \sim K_0 \mu |\sin 2\pi x_n|$, поэтому условие существования локальной неустойчивости может быть представлено в виде

$$K = K_0 \mu = (K_0 / \Gamma) [1 - \exp(-\Gamma)] \gg 1. \quad (3.26)$$

Необходимо отметить, что для отображения (3.25), как и для стационарного (3.15), имеет место: 1) локальная неустойчивость движения; 2) затухание фазовых корреляционных функций; 3) непрерывный частотный спектр движения. Геометрическая структура СА обладает масштабной инвариантностью, повторяясь на все более мелких масштабах. Такие структуры – фракталы, имеют дробную размерность, называемую фрактальной [11]. Математически корректным определением, допускающим распространение понятия размерности от целых чисел (соответствующих точке, линии,

поверхности и т.д.) на дробные, является определение размерности множества по Хаусдорфу:

$$d_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (3.27)$$

В (3.27) ε - безразмерная длина элемента покрытия множества (например, куба), $N(\varepsilon)$ - число элементов, необходимых для покрытия рассматриваемого множества.

В общем случае динамическая система может иметь не один, а несколько аттракторов различных типов. Характер движения, который установится при этом в системе, будет зависеть от того, к какому аттрактору при данных начальных условиях будет притягиваться траектория. Когда область притяжения (так называемый бассейн аттрактора) простого аттрактора перекрывается частью СА, он становится метастабильным. В этом случае в течение некоторого (как правило, достаточно длительного) времени траектория находится на СА и движение является хаотическим, а затем траектория переходит в область простого аттрактора и устанавливается стационарное регулярное движение. *Подобный эффект получил название кризиса СА [44].*

3.4.7 Отображение Лози

Рассмотрим аттрактор Лози в двумерной дискретной динамической системе [24,30]:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - a|x_n| + y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n, \end{aligned} \quad (3.28)$$

Система представляет собой нелинейное взаимно однозначное диссипативное (для $b < 1$) отображение, которое в силу диффеоморфизма является в строгом смысле отображением Пуанкаре некоторой дифференциальной системы с размерностью фазового пространства $N = 3$. Поэтому свойства, обнаруженные и доказанные для этой системы, будут достоверно применимы к потоку в R^3 . Теоретически установлено, что в системе (3.28), в области значений $1.3 < a < 1.8$, существует единственный хаотический аттрактор, который не содержит устойчивых неподвижных точек.

Этот аттрактор известен в литературе как квазигиперболический аттрактор Лози [24].

Обоснование существования квазигиперболического аттрактора в динамической системе доказывается двумя положениями:

- в аттракторе все фазовые траектории являются неустойчивыми;
- при вариации параметров системы устойчивых траекторий не возникает.

На рисунке 7 (цветная вкладка) представлено отображение Лози.

3.4.8 Аттрактор Уеда

Система уравнений Уеда имеет вид:

$$\begin{aligned} dx / dt &= y, \\ dy / dt &= -x^3 - ky + B \sin z, \\ dz / dt &= 1, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где $B = 7.5$, $k = 0.05$.

Система со странным аттрактором представляет собой «хаотический маятник», впервые исследованный японским математиком Йошисуке Уеда в конце 70-х годов XX века. Это нелинейная электронная схема с внешним питанием. Каждое колебание этого хаотического генератора уникально. Система никогда не повторяет себя и каждый цикл открывает новую область фазового пространства. Несмотря на кажущуюся неустойчивость движения, точки фазового пространства расположены не беспорядочно. Вместе они формируют сложный высокоорганизованный паттерн – странный аттрактор, называемый его именем. Аттрактор Уеда – это траектория в двумерном фазовом пространстве, которая образует почти повторяющиеся друг друга паттерны. Аттрактор Уеда представлен на рисунке 8 (цветная вкладка).

3.4.9 Логистическое отображение

Простейшей динамической системой, демонстрирующей универсальный переход к хаосу через последовательность бифуркаций удвоения периода, является логистическое отображение

$$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2, \quad (3.30)$$

где x_n - значения динамической переменной в дискретные моменты времени $n = 0, 1, 2, \dots$; α - управляющий параметр системы.

Используя замену переменных, данное отображение также можно представить в виде $x_{n+1} = \alpha - x_n^2$ и $x_{n+1} = 4\alpha x_n(1 - x_n)$.

Логистическое отображение использовалось как для изучения общих свойств одномерных отображений, так и в некоторых задачах динамики биологических популяций [11].

Уравнение (3.30) представляет собой отображение единичного отрезка в себя. Оно обладает определенными свойствами симметрии. При увеличении значений параметра α от -0.25 до 2.0 демонстрирует последовательность бифуркаций удвоения периода циклов, завершающуюся возникновением хаоса. В закритической области наблюдается последовательность бифуркаций слияния лент аттрактора. Аттрактор, состоящий из 2^n отрезков, в пределах которых фазовая траектория движется хаотическим образом, переходит в аттрактор, состоящий из 2^{n-1} отрезков. В закритической области параметра хаотические режимы чередуются с «окнами» устойчивости периодических орбит, порядок появления которых описывает теорема Шарковского [24]. На базе возникающих циклов также наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся образованием хаотических аттракторов. Пример логистического отображения представлен на рисунке 9 (цветная вкладка).

3.4.10 Аттрактор Хенона

Аттрактор Хенона представляет собой обратимое двумерное двухпараметрическое отображение вида

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - \alpha x_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= \beta x_n.\end{aligned}\tag{3.31}$$

где x_n , y_n - динамические переменные; α , β - параметры системы.

Отображение Хенона является диссипативным при условии $0 < \beta < 1$. В случае $\beta = 1$ отображение представляет собой консервативную систему. С уменьшением β сжатие фазового объема за одну итерацию начинает возрастать. В итоге при $\beta = 0$ обратимое двумерное отображение (3.31) переходит в одномерное необратимое логистическое отображение (3.30).

Данное двумерное отображение, построенное Хеноном в качестве простейшей модели системы Лоренца, было призвано упростить математический анализ и провести более детальные исследования структуры аттрактора Лоренца. Однако оказалось, что это отображение имеет значительно более общий характер. Подобные

отображения весьма естественным образом возникают при изучении систем, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. Для трехмерных дифференциальных систем с хаосом, порождаемым особенностями седло – фокуса, отображение Хенона является канонической моделью. Оно отражает все принципиальные свойства целого класса дифференциальных систем. Отображение Хенона при параметрах $\alpha=1.4$, $\beta=0.3$ имеет вид представленный на рисунке 10 (цветная вкладка).

3.4.11 Однородная турбулентность

Рассматривается движение несжимаемой жидкости, описываемое уравнениями Навье – Стокса [45]:

$$\partial_i v_i + \nu_j \partial_j v_i = -\rho^{-1} \partial_i p + \nu \partial_{jj}^2 v_i + f_i, \quad (3.32)$$

$$\partial_k v_k = 0. \quad (3.33)$$

Здесь v_i - компоненты скорости, f_i - компоненты силы, ρ - плотность, p - давление, ν - вязкость. При этом не нужно забывать, что сама возможность применения уравнений (3.32) – (3.33) к описанию турбулентных течений при огромных значениях числа Рейнольдса не является очевидной, так как при их выводе использовано предположение о том, что тензор вязких напряжений является линейной функцией только первых производных поля скорости.

Важно также подчеркнуть, что рассматривается развитая турбулентность, характеризуемая наполненными спектрами Фурье (как временными, так и пространственными), что свидетельствует о существовании многомасштабной структуры поля скорости. Именно многомасштабность и является важнейшим признаком развитой турбулентности, приводя к возбуждению гигантского числа степеней свободы.

Необходимо отметить, что до сего времени бытовало утверждение, что турбулентное движение является более хаотическим, чем ламинарное. Однако в [46] высказывается противоположная точка зрения, высказанная И. Пригожиным: «Долгое время турбулентность отождествлялась с хаосом или шумом. Сегодня мы знаем, что это не так... Множество пространственных и временных масштабов, на которых разыгрывается турбулентность,

соответствует когерентному поведению миллионов и миллионов молекул. С этой точки зрения переход от ламинарного течения к турбулентному является процессом самоорганизации. Часть энергии системы, которая в ламинарном течении находилась в тепловом движении молекул, переходит в макроскопическое организованное движение».

Аналогичная точка зрения была высказана ранее в [47]. Этот пример показывает, сколь трудно при сложных движениях отличить «порядок» от «хаоса». По этой причине и возникает необходимость введения количественных критериев относительной степени упорядоченности различных неравновесных состояний открытых систем. Пример отображения турбулентного потока представлен на рисунке 11 (цветная вкладка).

3.4.12 Система Лабиринт

В 1999 году Рене Томас представил систему из трех уравнений вида [48]:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sin y - bx, \\ \dot{y} &= \sin z - by, \\ \dot{z} &= \sin x - bz.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Уравнения представляют собой циклическую симметричную систему относительно переменных x , y и z , где параметр b характеризует затухающую особенность в трехмерной решетке (или лабиринт). Пример отображения системы 3.34 представлен на рисунке 12 (цветная вкладка), на рисунке 3.6 представлен тот же процесс в другом масштабе.



Рисунок 3.6 Масштабированное отображение системы лабиринт.

Выводы

В главе 3 рассмотрены проблемы хаотических явлений в динамических системах. Было отмечено, что фундаментальное значение исследований в этой области состоит в том, что они выявляют природу случайного, дополняя гипотезу молекулярного хаоса гипотезой динамической стохастичности.

Отмечено, что для динамического хаоса характерен нерегулярный характер – так называемый странный аттрактор, похожий на клубок траекторий, размерность которого всегда фрактальна.

Рассмотрены свойства хаотических систем и такие показатели Ляпунова как размерность странного аттрактора, энтропия динамической системы и др.

Важное место в главе занимают базовые модели динамических систем, отраженные как в дифференциальных уравнениях, так и в отображениях (дискретные динамические системы). Отмечены свойства регулярных и хаотических аттракторов.

Литература

1. Лоскутов А.Ю. Проблемы нелинейной динамики I Хаос. Вестник Моск. ун-та. Серия 3. Физика. Астрономия. №2. 2001. – с. 3-20.
2. Poincare A. Calcul des Probabilities. Paris: Gouthier-Villars, 1912.
3. Больцман Л. Статьи и речи. М.: Наука, 1970.
4. Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1. М.: Наука, 1973.
5. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
6. Колмогоров А.Н. //ДАН СССР. 119. 1958. – с. 861.
7. Колмогоров А.Н. //ДАН СССР. 124. 1959. – с. 754.
8. Синай Я.Г. //ДАН СССР. 124. 1959. – с. 768.
9. Арнольд В.И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 1999.
10. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.
11. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 264 с.
12. Хакен Г. Информация и самоорганизация. М.: Мир, 1991. – 240 с.
13. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. М.: Мир, 1990. – 344 с.

14. Малинецкий Г.Г. Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Едиториал УРСС, 2002. – 360 с.

15. Корнфельд И.П., Синай Я.Г. //Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы. М.: ВИНТИ, 1985. – с. 7.

16. Eckmann J. – P., Ruelle D. // Rev. Mod. Phys. 57. Pt. 1, #3. 1985. – p. 517.

17. Песин Я.Б. //Успехи матем. наук. 32., №4. 1977. – с. 55.

18. Takens F //Nonlinear Dynamics and Turbulence /Eds. G.I. Barenblatt. G. Iaas, D. D. Joseph. N.Y.: Pitman, 1983. – p. 314.

19. Синай Я.Г. //Современные проблемы математики: Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы. М.: ВИНТИ, 1985. – с. 115.

20. Синай Я.Г. //Успехи матем. Наук. 46, №3. 1991. – с. 147.

21. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. – 240 с.

22. Синай Я.Г. //Нелинейные волны /Ред. А.В. Гапонов – Грехов. М.: Наука, 1979. – с. 192.

23. Бланк М.Л. //Успехи матем. наук. Ч.II, №6. 1989. – с. 3. математики: Фундаментальные направления. Т. 2. Динамические системы. М.: ВИНТИЦ, 1985. – с.7.

24. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы /Под ред. В.С. Анищенко. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999. – 368 с.

25. Farmer J.D., Att E., Yorke J.A. The dimension of chaotic attractors //Physica D. V. 7. 1983. p. 153.

26. Grebogi C., Att E., Pelikan S., Yorke J.A. Strange attractors that are not chaotic //Physica D. V. 13. 1984. – p. 261.

27. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: Методы и приложения. Часть 1. Методы. АиТ, №5, 2003. – с. 3 – 45.

28. Арнолд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Б.С., Шильников Л.П. //Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5. Динамич. сист. М.: ВИНТИ, 1986. – с. 5.

29. Kaplan J.L., Yorke J.A. Chaotic Behavior of Multi-Dimensional Difference Equations //Lecture Notes in Math, V-730. 1971. pp. 204-227.

30. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). Учебное пособие для ВУЗОВ. М.: Изд-во физико-математической литературы. 2006. – 356 с.

31. Владимирский Э.И., Тагиев Ф.К. Синергетический подход к формированию интегральных размерностей в интеллектуальных

информационно-измерительных системах. Информационные технологии. №6 (166). 2010. – с. 62-67.

32. Chloveracis K.E., Sprott J.C. A comparison of correlation and Lyapunov dimensions. *Physica D*. 200. 2005. pp. 156-164.

33. Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории. – М.: Наука, 1995.

34. Афраймович В.С. //Нелинейные волны. Динамика и эволюция /Ред. А.В. Гапонов – Грехов, М.И. Рабинович. М.: Наука, 1989. – с. 16.

35. Смейл С. //Успехи матем. наук. 25, №1. 1970. – с. 113.

36. Плыкин Р.В. // Успехи матем. наук. 39 №6. 1984. – с. 75.

37. Сатаев Е.А. // Успехи матем. наук. 47, №1. 1992. – с. 147.

38. Белых В.Н. Системы фазовой синхронизации. М.: Радио и связь., 1982. – с. 161.

39. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.

40. Chua's circuit: A paradigm for chaos /Ed. By Madan R.N. Singapore: World Scientific, 1993.

41. Chen G. & Zhou. Classification of Chaos in 3-D Autonomous Quadratic Systems – I Basic Framework and Methods //Int. J. of Bifurc. Chaos, V. 16, №96 2006. –p. 2459 – 2480.

42. Chen G, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *Int. J. Bifurcat. Chaos* (1999, 97): 1465 – 6.

43. Ikeda K. Multiple – valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system, *Opt. Comm*. V. 30. 1979. – p. 257-261.

44. Чириков Б.В. Резонансные процессы в магнитных ловушках. //Атомная энергия. Т. 6, №6. 1959. – с. 630-638.

45. Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Перм.гос.техн.ун-т.ЧастьII, Пермь, 1999. – 136с.

46. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986 – 432 с.

47. Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса: Новый подход к статистической теории открытых систем М.: КомКнига, 2007. – 328 с.

48. Thomas R. Deterministic chaos seen in terms of feedback circuits: analysis, synthesis, “Labyrinth chaos”, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 9, 1999. – pp. 1889-1905.

ГЛАВА 4. УПРАВЛЕНИЕ ХАОТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Развитие теории динамических систем внесло новое в понимание происхождения хаотичности и привело к ряду важнейших открытий. Так, обоснование эргодической гипотезы Больцмана для определенного класса систем, доказательство сохранения квазипериодического движения при возмущении интегрируемых систем (теорема Колмогорова – Арнольда – Мозера), КАМ [1-3], введение энтропии Колмогорова, подковы Смейла и У- систем Аносова, стимулировало развитие новых направлений современной математики и математической физики. В результате было показано, насколько типичным и всеобщим явлением оказывается хаотическое поведение в системах с небольшим числом степеней свободы. Таким образом, проблема предсказуемости, появившись в сложных системах, стала общей для многих направлений науки. В связи с этим стало интенсивно развиваться новое направление в нелинейной динамике и синергетике, посвященное проблемам предсказуемости поведения хаотических систем, управления их динамикой и возможности подавления хаоса.

Эволюционирующая система всегда проявляет только определенную (заданную) динамику.

Управление этим процессом может осуществляться с помощью слабых воздействий, которые влияют на выбор того или иного конкретного состояния. Таким образом, была обнаружена возможность управлять динамикой хаотических систем, то есть посредством достаточно слабых воздействий переводить первоначально хаотические системы из режима хаотических колебаний на требуемый динамический режим и тем самым стабилизировать их поведение. Стабилизация хаотического поведения может быть осуществлена двумя различными способами. Первый из них обеспечивает выведение системы из хаотического на регулярный режим посредством внешних возмущений, реализованных без обратной связи. То есть этот метод не учитывает текущее состояние динамических переменных системы. Качественно отличный от данного метод реализуется посредством корректирующего воздействия в соответствии с требуемым значением динамических переменных и, таким образом, вовлекает обратную связь как необходимую компоненту динамической системы. Первый способ стабилизации хаотической динамики называется подавлением хаоса или контролированием хаотической динамики без обратной связи. Второй – контролирование хаоса с обратной связью [4].

Таким образом, развитие этих методов, а также знание закономерностей самоорганизации дает возможность вмешиваться в деятельность систем и управлять их динамикой.

Общие положения

Пусть M - метрическое пространство с определенным расстоянием между точками и $\{T^t\}$ - множество однопараметрических преобразований пространства M в себя такое, что $T^{t_1+t_2} = T^{t_1} \circ T^{t_2} = T^{t_2} \circ T^{t_1}$ для любых t_1, t_2 . Тогда T^t , M и $\{T^t\}$ называются отображением сдвига, фазовым пространством и динамической системой соответственно. В метрической теории динамических систем рассматривается также пространство с мерой, т.е. тройка $\{M, S, \mu\}$, где S - σ -алгебра подмножеств M и μ - мера, определенная тем или иным образом на S . При этом мера μ называется инвариантной мерой относительно преобразования T , если $\mu(C) = \mu(T^{-1}C)$ для любого $C \in S$. Когда $\{t\}$ имеет дискретный ряд значений, $t \in Z$, $t \equiv k$, то $\{T^k\}$ называется динамической системой с дискретным временем или отображением. Известным примером такой системы является преобразование интервала I в себя: $T_\alpha : I \rightarrow I$, $I = [\alpha, \beta]$, $T_\alpha = f(x, \alpha)$, где α - некоторый параметр и $[\alpha, \beta] = M$. Тогда траектория отображения T_α^k определится так $T_\alpha^k = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{k \text{ раз}}$ для каждого k . В общем случае задание закона

преобразования $T_\alpha = f(x, \alpha)$ определяет траекторию точки x из M по отношению к f как подмножество $\{T_\alpha^k | k \in Z\}$.

Если множество $\{t\}$ принимает непрерывный ряд значений, то преобразование $\{T^t\}$ называется динамической системой с непрерывным временем или потоком. В этом случае рассматривается преобразование $T : \mathbf{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$, $t \rightarrow T^t$. Поток $T^t : M \rightarrow M$ определяет на M касательное векторное поле, т.е. для любого $\mathbf{x} \in M$ равенство $(dT^t(\mathbf{x})/dt)|_{t=0} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \alpha)$ определяет касательный вектор $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \alpha) \in \sum_x(M)$ в точке $\mathbf{x} \in M$, где

$\sum_x(M)$ - касательное к M пространство. Следовательно,

динамическая система с непрерывным временем задает систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно записать в более привычном виде как:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, \alpha), \quad (4.1)$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, с начальными условиями $\mathbf{x}(t_0) \equiv \mathbf{x}_0$. Для такой системы действие отображение сдвига T^t заключается в том, что любая точка $\mathbf{x}_0 \in M$ под действием T^t преобразуется в точку $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$, которая, очевидно, является решением системы (1). Таким образом, $T^t \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$.

Исследования в области управления хаотическими системами показали, что эти системы чрезвычайно чувствительны к внешним воздействиям и благодаря этому развивающаяся структура характеризуется возможностью перехода в одно из большого числа допустимых равноправных состояний. Кроме того, как оказалось, для распределенных сред внешнее воздействие при некоторых условиях приводит к рождению сложных пространственно протяженных структур с заданными свойствами.

В этой ситуации возрастает роль управления хаотическими системами в синергетическом аспекте.

Так, управляющее воздействие процессами развития нелинейной системы может быть эффективным тогда и только тогда, когда оно когерентно с внутренними свойствами данной системы, то есть является резонансным.

В прекрасной работе А.Ю. Лоскутова [4] рассмотрены аддитивный и мультипликативный методы резонансных возбуждений в контексте управления хаотическими динамическими системами.

4.1 Метод резонансных возбуждений

Для управления поведением хаотических динамических систем в [4] рассмотрен метод так называемых резонансных возбуждений. Этот метод основан на наблюдении, что вследствие нелинейных модовых взаимодействий периодически возбуждаемая система не будет проявлять периодического поведения. Поэтому для получения предписанного (т.е. заранее заданного) режима движения представляется естественным возмущать систему специальным образом. Основную роль в данном методе играет допущение, что

уравнение движения, на которое выходит система после введенного возмущения, заранее известно.

Для достижения контроля посредством резонансных возбуждений в динамическую систему, находящуюся в хаотическом режиме, аддитивно включают внешнее возмущение $F(t)$:

$$\dot{x} = v(x, \alpha) + F(T), \quad \alpha \in R. \quad (4.2)$$

Далее, пусть требуемая динамика задается функцией $v(t)$, которая удовлетворяет так называемому уравнению предписанного движения

$$\dot{y} = g(y). \quad (4.3)$$

Теперь, выбирая возмущение в виде $F = g(y(t)) - v(y(t), \alpha)$ и подставляя его в (4.2), получим уравнение контролирования [4]:

$$\dot{x} = v(x, \alpha) + g(y) - v(y, \alpha). \quad (4.4)$$

Таким образом, если устремить $x \rightarrow y$ при $t \rightarrow \infty$, то в конечном счете динамика будет представлена уравнением (4.4).

Искусственное создание в системе устойчивых колебаний посредством внешних мультипликативных возбуждений требует рассмотрения динамической системы вида [4]:

$$\dot{x} = v(x, a), \quad (4.5)$$

где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $a \in R$, $x(t_0) \equiv x_0$.

Мультипликативное управление заключается в модификации функции v в соотношении (4.5), чтобы новая система $\dot{x} = v'(x, a', t)$ имела требуемое (выбранное заранее) поведение.

Здесь

$$v'(x, a', t) = v(x, a_0 + a_1 t), \quad (4.6)$$

где параметр $a_1(t)$ является периодической функцией.

Иногда введение мультипликативных возбуждений в систему невозможно. Тогда фазовый поток $F'(x, G)$ разлагается на две составляющие: часть, соответствующую невозмущенному фазовому потоку, $F'(x)$ и компоненту $F'(G)$, которая инициируется возмущениями вида [4]:

$$F'(x, G) = F'(x) + F'(G). \quad (4.7)$$

В этом случае имеет место аддитивное возмущение, то есть

$$v'(x, a', t) = v(x, a) + g(t),$$

где $g(t)$ - внешнее воздействие.

Отсюда управление динамикой системы подразумевает приложение силовой компоненты к векторной функции. Поэтому данный тип управления поведением динамической системы называется силовым. В свою очередь, если в силовом контроле учитывается обратная связь, то функция ν модифицируется как

$$\nu'_i = \nu_i(x, a) + g_k(x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad 1 \leq k \leq n \quad (4.8)$$

Для задач управления существенное значение имеет свойство траекторий хаотических процессов, называемое рекуррентностью: со временем эти траектории попадают в сколько угодно малую окрестность своего положения в прошлом.

Определение 1. Функция $x : R^1 \rightarrow R^n$ называется рекуррентной (recurrent), если при любом $\varepsilon > 0$, существует такое $T_\varepsilon > 0$, что для любого $t \geq 0$ имеется $T(t, \varepsilon)$, $0 < T(t, \varepsilon) < T_\varepsilon$ такое, что $\|x(t + T(t, \varepsilon)) - x(t)\| < \varepsilon$.

Рекуррентные траектории обладают двумя важными свойствами, которые выражаются леммами С.С. Пью (С.С. Pugh) и Д.В. Аносова [3,5].

Лемма 1 (Пью). Пусть $\bar{x}(t)$, $t \geq 0$ рекуррентная траектория системы $\dot{x} = F(x)$, имеющей гладкую правую часть $F(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеется гладкая функция $F_1(x)$ такая, что $\|F_1(x)\|_\infty + \|DF_1(x)\|_\infty < \varepsilon$ и решение $x(t)$ системы $\dot{x} = F(x) + F_1(x)$ с тем же начальным условием $x(0) = \bar{x}(0)$ является периодическим.

Как отмечено в [4], параметрический метод имеет определенные преимущества перед силовым.

Таким образом, проблема управления поведением системы вида (4.5) заключается в том, чтобы найти такое внешнее возмущение G , при котором фазовый поток $F'(x, G)$, порождаемый возмущенной динамической системой $\dot{x} = \nu'(x, a, G)$, стремился бы к выбранному подмножеству $X(G)$ ее фазового пространства.

Подмножество $X(G)$ может быть как аттрактором, так и неустойчивым множеством. В последнем случае возмущения G модифицируют систему (x) таким образом, что фазовые траектории подходят к подмножеству $X(G)$ и остаются в достаточно малой его окрестности $\bigcup \supset x(G)$ под действием G . Как правило, в

приложениях в качестве подмножества $X(G)$ выбирается цикл определенного периода.

Лемма 2 (Аносов). Пусть $\bar{x}(t)$, $t \geq 0$ - рекуррентная траектория системы (2), имеющей главную $F(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеется x^* такое, что $\|x^* - \bar{x}(0)\| < \varepsilon$ и решение $x(t)$ системы (2) с начальным условием $x(0) = x^*$ является периодическим.

Эти леммы показывают, что хаотический аттрактор является замыканием всех содержащихся в нем периодических траекторий. Понятие аттрактора связано и со следующим сформулированным Г. Биркгофом в 1927 году критерием рекуррентности [6].

Теорема 1 (Биркгоф). Любая траектория принадлежащая компактному минимальному инвариантному множеству является рекуррентной. Любое компактное инвариантное минимальное множество является замыканием некоторой рекуррентной траектории.

Из этой теоремы следует, что любое решение, начинающееся из своего ω - предельного множества является рекуррентным. При выполнении дополнительного предположения, что ω - предельное множество $\bar{x}(t)$ является аттрактором, следует, что любая хаотическая траектория, начинающаяся в его ω -предельном множестве рекуррентна.

4.2 Нечеткое управление хаотическими системами

Описание неопределенности системы посредством нечетких моделей приводит к специфическим версиям алгоритмов управления.

Наиболее удобным для синтеза управления является описание в виде нечетких систем Такаги – Сугено (Takagi-Sugeno) (T-S- нечетких систем), представленных в виде набора правил нечеткого условного вывода

$$IF z_{ji}(t) \in F_{ji} AND \dots AND z_p(t) \in F_{ip} THEN$$

$$\dot{x} = Ax_i + B_i u, \quad y = C_i x + D_i u, \quad i = \overline{1, r}, \quad (4.9)$$

$x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$ - векторы состояния, входа и выхода системы соответственно;

$z_j(t)$ - переменные посылки, являющиеся функциями состояния системы, ее входных переменных $u(t)$ и времени;

F_{ji} - нечеткие множества.

Матрицы A_i, B_i могут зависеть от переменных $z_j(t)$, что позволяет описывать в форме (4.9) нелинейные системы. Выход системы определяется путем дефаззификации по методу центра тяжести

$$y = \sum_{i=1}^z h_i(z) C_i x. \quad (4.10)$$

где $h_i(z) = \frac{\omega_i(z_i)}{\sum_{i=1}^2 \omega_i(z_i)}$, $\omega_i(z) = \prod_{j=1}^n F_{ij}(z_j)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

При таком представлении нелинейность «прячется» в правилах дефаззификации (4.10), что позволяет строить нечеткие модели широкого класса динамических, в том числе хаотических систем.

Рассмотрим в качестве примера систему Лоренца [7]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 = \beta x_3 + x_1 x_2 \end{cases}$$

и представим ее в терминах (4.9), если $z_1 = z_2 = x_1$, $F_1(x_1) = 0.5(1 + x_1/d)$, $F_2(x_1) = 0.5(1 - x_1/d)$, где $d > 0$ - оценка предельного множества системы: $|x_1| \leq d$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & -d \\ 0 & -d & -\beta \end{bmatrix}; A_2 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & -d \\ 0 & d & -\beta \end{bmatrix}; b_1 = b_2 = 0 \quad (4.11)$$

Алгоритм управления имеет следующий вид:

$$IF z_1(t) \in F_{1i} \text{ AND } \dots \text{ AND } z_p(t) \in F_{1p} \text{ THEN}$$

$$u = -K_{ij}, i = \overline{1, 2}. \quad (4.12)$$

где K_i - матрицы коэффициентов нечеткого линейного регулятора. Использование правила дефаззификации (4.10) приводит к представлению замкнутой нечеткой системы в виде:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^z \sum_{j=1}^z \sum_{k=1}^z h_i(z) h_j(z) h_k(z) (A_i - B_i K_j C_k) x. \quad (4.13)$$

Заслуживает интерес работа [8], в которой рассматривается импульсное или дискретное управление нечеткими хаотическими системами, осуществляемое в терминах $T-S$ метода.

Пусть $\{\tau_j\}$ - дискретное множество временных значений
 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_j < \tau_{j+1} < \dots, \tau_j \rightarrow \chi$ как $j \rightarrow \chi$. Пусть
 $\Delta x \Big|_{r=\tau_j} \equiv x(r_j^+) - x(r_j^-)$ есть всплеск во временном ряду.

Тогда импульсное управление в терминах $T - S$ имеет вид:

$$\begin{aligned} & \text{If } z_i(t) \text{ is } M_{i_l} \text{ and } \dots \text{ and } z_p(t) \text{ is } M_{i_p} \\ & \text{THEN } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) \quad t \neq \tau_j, \\ \Delta x = k_{ij} x(t) \quad t = \tau_j, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $M_{ij}, A_j \in R^{n \times m}$, $x(t) \in R^m$, $z_1(t), \dots, z_p(t)$, $K_{ij} \in R^{n \times m}$ - обозначает управление текущими импульсными значениями τ_j

Алгоритм дефазификации на выходе системы имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad t \neq \tau_j, \\ \Delta x = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_{ij} x \quad t = \tau_j, \end{cases} \quad (4.15)$$

где

$$\begin{aligned} z(t) &= [z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)]^T, \\ W_i(z(t)) &= \prod_{j=1}^p M_{i,j}(z_j(t)), \quad \sum_{i=1}^r W_i(z(t)) = 0, \\ h_i(z(t)) &= W_i(z(t)) / \sum_{i=1}^r W_i(z(t)), \quad \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \\ h_i(z(t)) &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

В дальнейшем выражение (4.15) будет называться нечеткой импульсной моделью. В качестве примера рассмотрим осциллятор Чуа в контексте применения нечеткого импульсного управления. Пусть осциллятор Чуа представлен в виде системы уравнений [8]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 10(-x_1(t) + x_2(t) - f(x_1(t))), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = 14.87x_2(t) \\ f(x_1(t)) = -0.68x_1(t) - 0.295(|x_1(t) + 1| - |x_1(t) - 1|). \end{cases}$$

На основании выражения (4.14) модель импульсного нечетко управления запишется как:

$$\begin{aligned} & \text{Правило } i : \text{If } x_i(t) \text{ is } M_{i_s}, \quad \text{then } \dot{x}(t) = A_i x(t) \quad t \neq \tau_j, \quad i = 1, 2 \\ & \quad \quad \quad \Delta x = K_{ij} x(t) \quad t = \tau_j, \quad u \quad j = N, \end{aligned}$$

где $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10(d-1) & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14,87 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -10(d+1) & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -14,87 & 0 \end{bmatrix},$$

$$y(x_i(t)) = \begin{cases} f(x_i(t)/x_i(t) & x_i(t) \neq 0, \\ -0.27 & x_i(t) = 0, \end{cases}$$

$$M_1(x_i(t)) = 0.5(1 - Y(x_i(t)/d)),$$

$$M_2(x_i(t)) = 1 - M_1(x_i(t)).$$

В работе [8] представлено, что

$$d = 3, \quad \sigma = 0.005, \quad \xi = 1.2, \quad k = 200,$$

тогда

$$P = [2.6269, -2.6208, -1.0936, -1.6108, 12.4114, 5.8169, 183.7264],$$

$$|J + K < 0.007|.$$

В отношении K_j имеет место равенство

$$K_j = \text{diag}([-0.999, -0.999, -0.999]) \quad (j \in N)$$

и $\ln(\xi\beta) + j\sigma = -1.9509 < 0$.

В таблицах 4.1 и 4.2 представлены хаотические системы в терминах выражения (4.9).

В ряде работ нечеткие модели нелинейных систем сочетаются с сетевой нейроподобной структурой регуляторов.

Таблица 4.1

Хаотич. сист	Уравнения	Нечеткие множества	Матрицы системы
1	2	3	4
Система Чуа	$\dot{x}_1 = \alpha(-x_1 + x_2 - f)$ $\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3$ $\dot{x}_3 = -\beta x_2$ $f = g_1 x_1 + \frac{1}{2}(g_2 - g_1) \times$ $\times (x_1 + 1 - x_1 - 1)$	$F_1 = \frac{1}{2}(1 - \Phi(x_1)/d)$ $F_2 = 1 - F_1(x_1)$ $\Phi = \begin{cases} f(x_1)/x_1, & x_1 \neq 0 \\ g_2, & x_1 = 0 \end{cases}$	$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha-1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} -\alpha(\alpha+1) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix}$
Система Ресслера	$\dot{x}_1 = -x_1 - x_3$ $\dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2$ $\dot{x}_3 = \alpha + x_1 x_3 - \beta x_3$	$F_1 = \frac{1}{2}(1 + x_1/d)$ $F_2 = \frac{1}{2}(1 - x_1/d)$	$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & d-\beta \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -d-\beta \end{bmatrix}$
Преобразованная система Ресслера	$\dot{x}_1 = -x_2 - f_1$ $\dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2$ $\dot{x}_3 = x_1 + \alpha f_2 - \beta$ $f_1 = \exp(x_3)$ $f_2 = \exp(-x_3)$	$F_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_1(x_3)}{d} \right) \left(1 + \frac{f_2(x_3)}{d} \right)$ $F_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{f_1(x_3)}{d} \right) \left(1 - \frac{f_2(x_3)}{d} \right)$ $F_3 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{f_1(x_3)}{d} \right) \left(1 + \frac{f_2(x_3)}{d} \right)$ $F_4 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{f_1(x_3)}{d} \right) \left(1 - \frac{f_2(x_3)}{d} \right)$	$A_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $i = 1, 2, 3, 4$

1	2	3	4
Отображение Хенона	$x_1(t+1) = \alpha - x_1^2(t) + \beta x_2(t)$ $x_2(t+1) = x_1(t)$ $x_2(t+1) = \gamma x_1(t)$	$F_1 = \frac{1}{2}(1 + x_1/d)$ $F_2 = \frac{1}{2}(1 - x_1/d)$ $x_1(t+1) = \alpha - \beta x_1(t) $ $F_1 = x_1 /d$ $F_2 = 1 - x_1 /d$	$A_1 = \begin{bmatrix} -d & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} d & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix}$

Таблица 4.2

Хаот ич. сист	Сдвиг	Выход	Управл. вход
1	5	6	7
Система Чуа	$b_1 = b_2 = 0$	$y = x_1$	
Система Ресслера	$b_1 = b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$	$y = x_1$	

4.3 Синхронизация в хаотических системах

Эффект синхронизации периодических колебаний был открыт Гюйгенсом [9] еще в XVII веке. В настоящее время проблема синхронизации регулярных (периодических и квазипериодических) колебаний достаточно хорошо исследована [10-12]. В спектре регулярных колебаний можно выделить основные частоты, однозначно связанные с характерными временами (периодом, квазипериодом) и фазами колебаний. При захвате частот происходит стабилизация фазового сдвига между взаимодействующими модами. В случае регулярных колебаний взаимодействующих осцилляторов фазовому захвату соответствует седло-узловая бифуркация циклов на двумерном торе, в результате которой аттрактор на границе синхронизации претерпевает качественную перестройку: вместо эргодического движения на двумерном торе, возникает устойчивый предельный цикл. В настоящее время известно несколько концепций синхронизации хаоса. Одной их первых была концепция, согласно которой синхронизация хаоса понимается как явление возникновения периодического режима под влиянием воздействия на хаотические автоколебания или в результате взаимодействия хаотических осцилляторов.

Согласно часто встречающейся в литературе [13-14] концепции, синхронизация хаоса, имеющая место при взаимодействии идентичных осцилляторов, состоит в том, что с ростом связи временные реализации соответствующих динамических переменных парциальных систем полностью повторяют друг друга без какого-либо сдвига во времени. То есть осцилляторы колеблются «синфазно».

В последнее время эффекты, подобные синхронизации, были обнаружены в системах с более сложной хаотической динамикой, включающей нерегулярные переходы траектории из окрестности одного седло-фокуса в окрестность другого [15].

Эффекты синхронизации в хаотических системах с переключениями схожи с обнаруженным явлением стохастической синхронизации в мультистабильных системах с переключениями, вызванными действием случайных сил [16].

Таким образом, понятие синхронизации может быть распространено на широкий круг явлений, наблюдаемых не только в динамических, но и в стохастических режимах.

Хаотическая синхронизация является одним из фундаментальных нелинейных явлений, активно изучаемых в последнее время [17].

В настоящее время традиционно различают фазовую, обобщенную, лаг, полную синхронизацию и синхронизацию временных масштабов [17].

Одним из интересных и важных типов синхронного поведения хаотических осцилляторов является обобщенная синхронизация. Режим обобщенной синхронизации [18-20], означает, что после завершения переходного процесса между состояниями взаимодействующих однонаправлено связанных ведущей $x_d(t)$ и ведомой $x_r(t)$ хаотических систем устанавливается функциональное соотношение $x_r(t) = F[x_d(t)]$.

Механизм возникновения режима обобщенной синхронизации может быть выявлен при помощи модифицированной системы [18].

Пусть поведение двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов со слегка различающимися параметрами имеет вид [18,19]:

$$\dot{x}_d = H(x_d, g_d), \quad \dot{x}_r = H(x_r, g_r) + \varepsilon A(x_d - x_r), \quad (4.16)$$

где $x_{d,r}$ - вектора состояний ведущей и ведомой систем соответственно, H - определяет векторное поле рассматриваемых систем, g_d и g_r - вектора параметров, $A = \{\delta_{ij}\}$ - матрица связи ($\delta_{ii} = 0$ или 1, $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$)), ε - параметр связи. В этом случае ведомую систему $x_r(t)$ рассматривают как некоторую неавтономную модифицированную систему под внешним воздействием $\varepsilon A x_d(t)$.

$$\dot{x}_m = H'(x_m, g_r, \varepsilon) + \varepsilon A x_d, \quad H'(x, g) = H(x, g) - \varepsilon A x. \quad (4.17)$$

Слагаемое $\varepsilon A x$ вносит дополнительную диссипацию в модифицированную систему.

Режим обобщенной синхронизации, возникающий в системе (4.17) при увеличении параметра связи ε , может быть рассмотрен как следствие двух взаимосвязанных процессов, протекающих одновременно: увеличения диссипации в модифицированной системе и возрастания амплитуды внешнего сигнала. Как отмечено в [18,19], оба процесса связаны друг с другом посредством параметра ε и не могут быть реализованы в ведомой системе (4.16) независимо.

Тем не менее отдельное рассмотрение этих процессов позволяет понять механизмы, приводящие к установлению режима обобщенной синхронизации.

Управление и синхронизация хаоса

Вопросы управления хаосом во взаимодействующих системах непосредственно связаны с задачами управляемой (или принудительной) синхронизации. С помощью целенаправленных воздействий определенные хаотические подмножества, соответствующие синхронным движениям идентичных осцилляторов, можно преобразовать в устойчивые по одним собственным направлениям при сохранении неустойчивости по другим. В результате будет осуществлен управляемый переход от несинхронных хаотических колебаний к режиму полной синхронизации хаоса [19,20].

Рассмотрим управление и синхронизацию хаоса в системе взаимно связанных осцилляторов. Примером такой системы может служить два связанных через емкость идентичных генератора Чуа [18,19]:

$$\dot{x}_{1,2} = \alpha [y_{1,2} - x_{1,2} - h(x_{1,2})], \quad (4.18)$$

$$\dot{y}_{1,2} = x_{1,2} - y_{1,2} + z_{1,2} + \gamma [x_{2,1} - x_{1,2}] - (y_{2,1} - y_{1,2}) + (z_{2,1} - z_{1,2}) \quad (4.19)$$

$$\dot{z}_{1,2} = -\beta y_{1,2}. \quad (4.20)$$

где $x_{1,2}$, $y_{1,2}$, $z_{1,2}$ - динамические переменные первой и второй подсистем;

$$h(x_{1,2}) = bx_{1,2} + 0.5(a - b)(|x_{1,2} + 1| - |x_{1,2} - 1|);$$

α, β, a, b - параметры генератора; γ - коэффициент связи уравнения (4.18) - (4.20) соответствуют случаю, когда элемент связи C_c подключен между конденсаторами $C_{1,2}$ (см. рис.3.1) генератора.

В данной системе с помощью малых управляющих воздействий на одну из подсистем хаотическую фазовую траекторию можно стабилизировать в различных симметричных подпространствах объединенного фазового пространства взаимодействующих генераторов.

При этом осуществляются управляемые переходы от несимметричных хаотических колебаний к периодическим движениям и к режиму синхронизации хаоса в виде как синфазных, так и противофазных хаотических колебаний. Следует отметить, что в системах, подобных связанным идентичным генератором Чуа, имеющих несколько видов симметрии, хаотическую траекторию можно стабилизировать в различных симметричных подпространствах.

Управление хаосом в решетках связанных отображений

Решетки связанных отображений являются наиболее простыми моделями пространственно-распределенных систем. Они способны демонстрировать многие типичные пространственно – временные явления, наблюдаемые в системах различной природы.

Эффективное управление пространственно–временным хаосом в цепочках и решетках можно обеспечить посредством малых пространственно-распределенных возмущений параметра системы. Такое локальное управление по элементам решетки («pinning control») позволяет осуществлять стабилизацию предварительно выбранных неустойчивых пространственно-временных структур. Пусть имеет место цепочки связанных логистических отображений с двумя типами связи [17,18]:

$$x_{n+1}(i) = \alpha - x_n^2(i) + \gamma \left[2x_n^2(i) - x_n^2(i-1) - x_n^2(i+1) \right] \quad (4.21)$$

$$x_{n+1}(i) = \alpha - x_n^2(i) + \gamma \left[2x_n(i) - x_n(i-1) - x_n(i+1) \right], \quad (4.22)$$

где α - параметр нелинейности; γ - коэффициент связи; $x_n(i)$ - значение динамической переменной в точке с с дискретной координатой i в дискретный момент времени n ; N - число элементов цепочки ($i = \overline{1, N}$; $n = 1, 2, \dots$). С целью осуществления управляемых переходов из режима пространственно – временного хаоса к различным регулярным в пространстве и во времени структурам, управляющие воздействия в ансамбле взаимодействующих осцилляторов должны обеспечивать не только стабилизацию определенных периодических движений в каждом осцилляторе, но и синхронизацию этих движений в определенных фазах по всему ансамблю.

Пусть при значениях управляющих параметров, соответствующих развитию пространственно-временному хаосу, в цепочке существует неустойчивое пространственно-однородные состояния с временным периодом $T = s$ и неустойчивые пространственно-периодические структуры с длиной волны λ .

Как отмечено в [17,18] наиболее простыми являются пространственно-однородные режимы с некоторым временным периодом $T = s$.

Пусть i -й элемент цепочки (4.23) попал в малую окрестность неподвижной точки \bar{x}_k орбиты периода s и динамическая переменная представлена в виде:

$$x_{n+k-1}(i) = \bar{x}_k + \tilde{x}_{n+k-1}(i), \quad x_{n+s}(i) = \bar{x}_l + \tilde{x}_{n+s}(i), \quad k = \overline{1, s},$$

где $\tilde{x}_{n+k-1}(i)$ - малое возмущение динамической переменной в окрестности неподвижной точки \bar{x}_k . Предположим, что существует возможность малых изменений параметра нелинейности элементов цепочки относительно некоторого номинального значения α_0 :

$$\alpha = \tilde{\alpha}_{n+k-1}(i) = \alpha_0 + \bar{\alpha}_{n+k-1}(i) \quad k = \overline{1, s}$$

С учетом сделанных предположений, перепишем уравнение (4.21) следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1} + \tilde{x}_{n+k}(i) = & \alpha_0 + \tilde{\alpha}_{n+k-1}(i) - [\bar{x}_k + \tilde{x}_{n+k-1}(i)]^2 + \\ & + \gamma \left[2(x_k + \tilde{x}_{n+k-1}(i))^2 - 2\bar{x}_k^2 \right] - \gamma \left[(x_{n+k-1}^2(i+1) - x_n^2) + \right. \\ & \left. + (x_{n+k-1}^2(i-1) - x_n^2) \right], \quad k = \overline{1, s}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Полагая, что на этом этапе координат соседних $(i-1)$ -го и $(i+1)$ -го элементов цепочки отличаются от координаты неподвижной точки \bar{x}_k на такие значения, что последнее слагаемое в уравнении (4.23) является величиной того же порядка малости, что и $\tilde{x}_{n+k-1}(i)$, запишем уравнение для неподвижной точки и уравнение для эволюции возмущения динамической переменной i -го элемента:

$$\bar{x}_{k+1} = \alpha_0 - \bar{x}_k^2, \quad \bar{x}_{k+1} = x_l, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{n+k}(i) = & \tilde{\alpha}_{n+k-1}(i) - 2\bar{x}_k(1 - 2\gamma)\tilde{x}_{n+k-1}(i) - \\ & - \gamma \left[(x_{n+k-1}^2(i+1) - x_n^2) + (x_{n+k-1}^2(i-1) - x_n^2) \right], \quad k = \overline{1, s}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Будем считать, что возмущения параметра i -го элемента зависят от его координаты и координат двух соседних элементов следующим образом:

$$\tilde{\alpha}_{n+k-1}(i) = a_1 \tilde{x}_{n+k-1}(i) + a_2 \left[x_{n+k-1}^2(i+1) - \bar{x}_n^2 + (x_{n+k-1}^2(i-1) - x_n^2) \right] \quad (4.26)$$

Подставляя (4.26) в (4.25), можно получить коэффициенты a_1 и a_2 , при которых возмущения динамической переменной i -го элемента будут затухать во времени.

Отсюда вид возмущений по параметрам элементов цепочки (4.21), с помощью которых возможен управляемый переход из режима

пространственно-временного хаоса к пространственно-однородным режимам с временным периодом $T = s$, будет следующим:

$$\tilde{\alpha}_{n+k-1}(i) = 2(1 - 2\gamma)\bar{x}_k(x_{n+k-1}(i) - \bar{x}_n + \\ + \gamma[x_{n+k-1}^2(i+1) - \bar{x}_k^2] + (x_{n+k-1}^2(i-1) - \bar{x}_k^2)), \quad k = \overline{1, s}. \quad (4.27)$$

Таким образом, отмечено, что для двух симметрично связанных автоколебательных систем с помощью малых управляющих воздействий на один из генераторов, хаотическую фазовую траекторию можно стабилизировать в различных симметричных подпространствах полного фазового пространства взаимодействующих систем, то есть, осуществляя:

- 1) управляемые переходы из режима несинхронного хаоса в режимах периодических колебаний, и
- 2) режим синхронизации хаоса в виде синфазных, так и противофазных хаотических колебаний генераторов.

4.4 Основные типы хаотической синхронизации связанных динамических систем

Как упоминалось выше, основными типами хаотической синхронизации, лежащими в основе современных систем связи, являются режимы полной, фазовой и обобщенной синхронизации. Для создания целостной картины кратко остановимся на описании этих типов синхронного поведения.

Режим *полной синхронизации* означает точное совпадение векторов состояния взаимодействующих (однонаправлено или взаимно связанных) систем $x(t) = u(t)$, и, следовательно, этот режим возможен лишь в случае их идентичности по управляющим параметрам. Если управляющие параметры слегка различаются, возможно возникновение режима синхронизации с запаздыванием, в котором взаимодействующие системы демонстрируют близкие к идентичным, но сдвинутые на некоторый временной интервал τ колебания, т.е. $x(t) \approx u(t + \tau)$. С увеличением силы связи между слегка распространенными осцилляторами, временной сдвиг τ стремится к нулю, а режим синхронизации с запаздыванием – к режиму полной хаотической синхронизации. Для диагностики режима полной синхронизации достаточно часто проводят непосредственное сравнение векторов состояний взаимодействующих систем $x(t)$ и $u(t)$, рассчитывая ошибку синхронизации [18]:

$$\langle e \rangle = \int_0^{\infty} \| \mathbf{x}(t) - \mathbf{u}(t) \| dt. \quad (4.28)$$

Следует отметить, что в литературе достаточно часто, наряду с полной хаотической синхронизацией, рассматривают синхронизацию хаотических систем, полученных в результате декомпозиции автоколебательной системы, или «хаотический синхронный отклик». В результате декомпозиции автоколебательная система приобретает вид кольцевой структуры, в которой подсистемы образуют единое кольцо обратной связи. На следующем шаге используются две идентичные системы, полученные в результате одинаковой декомпозиции, одну из которых оставляют в первоначальном виде (ведущая автоколебательная, или активная, система), а в другой кольцо обратной связи разрывают (ведомая, или пассивная система). Если сигнал с выхода одной из подсистем ведущей системы подать на вход другой подсистемы ведомой системы, то при определенных условиях разность между входным и выходным сигналами ведомой системы будет стремиться к нулю, т.е. возникает полная синхронизация между состояниями ведущей и ведомой систем.

Обобщенная синхронизация, которая вводится в рассмотрение для системы двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов – ведущего $\mathbf{x}(t)$ и ведомого $\mathbf{u}(t)$, означает, что после завершения переходного процесса устанавливается функциональная зависимость между их состояниями, т.е. $\mathbf{u}(t) = F[\mathbf{x}(t)]$. При этом вид зависимости $F[\cdot]$ может быть достаточно сложным, а процедура ее нахождения весьма нетривиальной.

Предложено несколько методов для диагностирования режима обобщенной синхронизации между хаотическими осцилляторами, такие как метод ближайших соседей, метод расчета условных ляпуновских экспонент и часто используемый и относительно легко осуществимый на практике метод вспомогательной системы.

Суть метода вспомогательной системы сводится к следующему. Наряду с ведомой системой $\mathbf{u}(t)$ рассматривается идентичная ей вспомогательная система $\mathbf{v}(t)$.

Начальные условия для вспомогательной системы $\mathbf{v}(t_0)$ выбираются отличными от начальных условий ведомой системы $\mathbf{u}(t_0)$, однако лежащими в бассейне притяжения того же аттрактора (на практике это обозначает небольшую расстройку начальных условий, которая реализуется автоматически из-за наличия флуктуаций). При отсутствии режима обобщенной синхронизации между взаимодействующими системами векторы состояния ведомой

$u(t)$ и вспомогательной $v(t)$ систем принадлежат одному и тому же хаотическому аттрактору, но являются различными. В том случае, когда имеет место режим обобщенной синхронизации, после завершения переходного процесса состояния ведомой и вспомогательной систем должны стать идентичными, $u(t) = v(t)$, в силу выполнения соотношений $u(t) = F[x(t)]$ и соответственно $v(t) = F[x(t)]$. Таким образом, эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса является критерием наличия обобщенной синхронизации между ведущим и ведомым осциллятором [19].

Анализ режима обобщенной синхронизации может быть проведен также с помощью вычисления условных ляпуновских экспонент [20]. Если размерности фазовых пространств ведущей (drive system) и ведомой (response system) систем соответственно равны N_d и N_r , то поведение однонаправлено связанных хаотических осцилляторов может быть охарактеризовано с помощью спектра ляпуновских показателей $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_d+N_r}$. Ввиду независимости поведения ведущей системы от состояния ведомого осциллятора спектр ляпуновских показателей может быть разделен на две части: ляпуновские показатели ведущей системы $\lambda_1^d \geq \dots \geq \lambda_{N_d}^d$ и условные ляпуновские показатели $\lambda_1^r \geq \dots \geq \lambda_{N_r}^r$. Критерием существования обобщенной синхронизации в однонаправлено связанных динамических системах является отрицательность старшего условного ляпуновского показателя λ_1^r . Отметим, что для однонаправлено связанных хаотических осцилляторов режимы полной синхронизации и синхронизации с запаздыванием являются частными случаями режима обобщенной синхронизации.

Фазовая синхронизация означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, в то время как амплитуды этих сигналов остаются несвязанными между собой и выглядят хаотическими. В основе концепции хаотической фазовой синхронизации лежит понятие мгновенной фазы $\phi(t)$ хаотического сигнала. Следует отметить, что не существует универсального способа введения фазы хаотического сигнала, который бы давал корректные результаты для любых динамических систем. Так, существует несколько способов введения фазы, подходящих для систем с достаточно простой топологией хаотического аттрактора, которые в литературе называют «системами с хорошо определенной фазой» или «системами с фазово-

когерентным аттрактором». Хаотический аттрактор таких систем должен быть таким, чтобы проекция фазовой траектории на некоторую плоскость состояний (x, y) все время вращалась вокруг некоторого центра, не пересекая и не огибая его. Тогда мгновенная фаза $\phi(t)$ хаотического сигнала может быть введена в рассмотрение одним из следующих способов: как угол в полярной системе координат, с помощью преобразования Гильберта временной реализации сигнала или с использованием поверхности сечения Пуанкаре. Однако для систем с плохо определенной фазой эти методы не работают. Тем не менее, в ряде случаев фазовая синхронизация подобных систем может быть выявлена с помощью косвенных наблюдений и измерений.

Фазовая синхронизация возникает в том случае, когда разность мгновенных фаз хаотических сигналов $x_{i,2}(t)$, введенная одним из вышеперечисленных способов, является ограниченной во времени:

$$[\phi_1(t) - \phi_2(t)] < const. \quad (4.29)$$

Отметим, что понятие «фазовая синхронизация» может быть обобщено введением в рассмотрение множества временных масштабов s и ассоциированных с ними фаз $\phi_s(t)$ хаотического сигнала с помощью непрерывного вейвлетного преобразования с комплексным базисом. Если существует диапазон (или набор диапазонов) временных масштабов $s_m < s < s_b$, для каждого из которых выполняется условие захвата фаз, аналогичное (4.29), и доля энергии вейвлетного спектра, приходящейся на этот диапазон, отлична от нуля, то временные масштабы s оказываются синхронизированными, а хаотические осцилляторы находятся в режиме синхронизации временных масштабов. Если хотя бы один временной масштаб оказывается синхронизированным, то в некоторых случаях можно говорить о наличии фазовой синхронизации. Однако в случае системы с фазово-некогерентным аттрактором, в которых фазовую синхронизацию диагностировать традиционными методами не представляется возможным, говорят о возникновении синхронизации временных масштабов.

Следует также отметить, что синхронизация временных масштабов позволяет рассматривать с единых позиций все вышеописанные типы хаотической синхронизации. Характер синхронного режима при этом определяется лишь диапазоном синхронизированных временных масштабов.

Способы скрытой передачи информации, основанные на явлении полной хаотической синхронизации

Использование полной хаотической синхронизации для скрытой передачи информации подразумевает наличие, как минимум, двух одинаково связанных идентичных хаотических генераторов. Предложено достаточно много таких способов скрытой передачи данных. Это, в первую очередь, хаотическая маскировка, переключение хаотических режимов, нелинейное подмешивание информационного сигнала к хаотическому, модулирование управляющих параметров передающего генератора полезным цифровым сигналом и др. На основе этих методов было предложено множество способов скрытой передачи данных. Поэтому рассмотрение основных принципов работы таких схем является очень важным. Остановимся на них более подробно.

Хаотическая маскировка

Хаотическая маскировка – один из первых и наиболее простых способов скрытой передачи данных. Принципиальная схема реализации этого способа приведена на рис. 4.1.

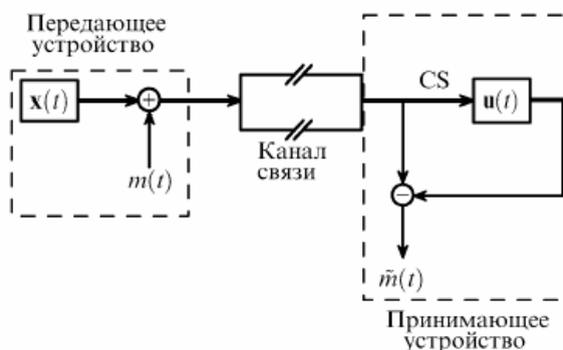


Рисунок 4.1 Схема скрытой передачи информации с помощью хаотической маскировки.

На передающей стороне информационный сигнал $m(t)$ подмешивается в сумматоре к несущему сигналу, генерируемому передающей хаотической системой $x(t)$, и далее передается по каналу связи. В приемнике осуществляется полная хаотическая синхронизация находящегося в нем хаотического генератора $u(t)$ с

помощью принимаемого сигнала, в результате чего динамика принимающего генератора становится идентичной динамике передающего. Детектированный сигнал $\tilde{m}(t)$ получается после прохождения через вычитающее устройство как разность между принимаемым сигналом и синхронным откликом генератора хаоса в приемнике [21].

Переключение хаотических режимов

В начале 90-х годов XX в. было предложено, помимо хаотической маскировки еще больше способов скрытой передачи данных, объединенных общим названием «переключение хаотических режимов». Одна из схем переключения хаотических режимов приведена на рис. 4.2.

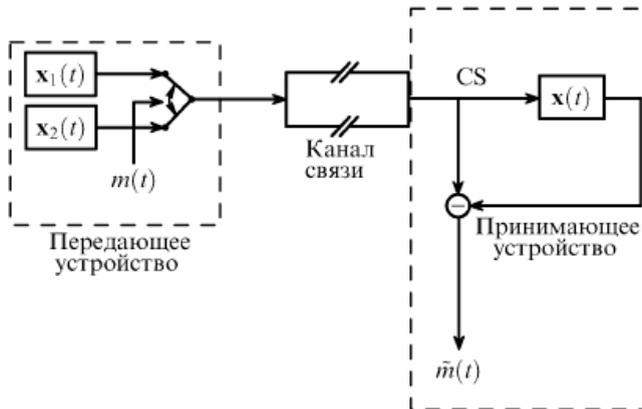


Рисунок 4.2 Схема скрытой передачи информации на основе переключения хаотических режимов.

Передающее устройство содержит два хаотических генератора, $x_1(t)$ и $x_2(t)$, которые могут быть разными или одинаковыми, но с различающимися параметрами, однако в интересах конфиденциальности передачи данных предпочтительнее использовать последние; более того, сигналы, генерируемые этими системами должны иметь сходные спектральные и статистические свойства. Полезный цифровой сигнал $m(t)$, представленный последовательностью бинарных битов 0/1, используется для переключения передаваемого сигнала, т.е. сигнал, производимый первым хаотическим генератором, кодирует, например, бинарный бит

0, а сигнал от второго генератора хаоса соответственно – бинарный бит 1. Полученный таким образом сигнал передается по каналу связи на принимающее устройство. В зависимости от числа генераторов, находящихся на принимающей стороне канала связи, различают несколько схем скрытой передачи данных на основе переключения хаотических режимов. В схеме, представленной на рис. 4.2, принимающее устройство содержит один хаотический генератор $x(t)$, идентичный любому из передающих, например первому. Параметры генераторов должны быть выбраны таким образом, чтобы генерируемые ими сигналы приводили к возникновению режима полной хаотической синхронизации лишь в том случае, если передается только бинарный бит 0 (или только бинарный бит 1). Так же как и при хаотической маскировке, восстановленный сигнал $\tilde{m}(t)$ получается после прохождения через вычитающее устройство сигнала, передаваемого по каналу связи, и синхронного отклика хаотического генератора принимающего устройства.

Принципиальным недостатком таких схем является возникновение переходных процессов при переключении (длительность которых может быть весьма продолжительной), что проявляется во временной задержке включения в синхронный режим принимающего генератора. Поэтому такие схемы являются достаточно медленными. Кроме того, степень секретности (конфиденциальности) таких схем является довольно низкой.

Нелинейное подмешивание информационного сигнала к хаотическому

Усовершенствования метода хаотической маскировки были направлены на повышение секретности и конфиденциальности передачи информации. В результате было предложено несколько способов, которые можно объединить общим названием «нелинейное подмешивание информационного сигнала к хаотическому». Особенностью работы таких схем является непосредственный ввод информационного сигнала в передающую систему и его участие в формировании выходного сигнала.

Среди схем, в которых применяются различные операции «сложение - вычитание», «деление – умножение», «сложение по модулю с основанием», «преобразование напряжение – ток» и др., наибольшее распространение сейчас получили схемы, использующие «сложение – вычитание». В таких схемах информационный сигнал подмешивается к хаотическому и участвует тем самым в

формировании сложного поведения системы. Наиболее простым и технически реализуемым способом обеспечения «нелинейного подмешивания» является установка на передающей стороне канала связи дополнительного хаотического генератора, идентичного первому передающему и взаимно связанного с ним. Принципиальная схема реализации такого способа скрытой передачи данных приведена на рис. 4.3 [21].

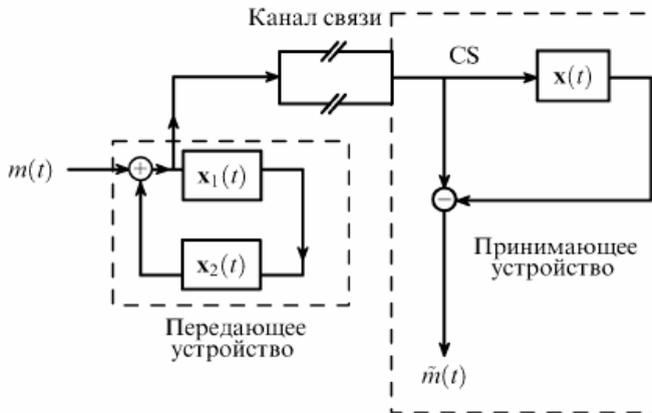


Рисунок 4.3 Схема скрытой передачи информации посредством нелинейного подмешивания информационного сигнала к хаотическому.

Итак, передающая сторона содержит два идентичных по управляющим параметрам хаотических генератора, $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Информационный сигнал $m(t)$ подмешивается к сигналу, производимому одним из генераторов передающего устройства (или к обоим сигналам одновременно). В результате прохождения по кольцу обратной связи (обеспечиваемого взаимной связью генераторов передающего устройства) сигнал претерпевает нелинейные изменения. Таким образом, по каналу связи будет передаваться сигнал, полученный в результате нелинейного подмешивания информационного сигнала к хаотическому. Принимающее устройство, как и в рассмотренных выше схемах, содержит хаотический генератор $x(t)$, идентичный по управляющим параметрам передающим генераторам. Сигнал, поступающий по каналу связи на принимающее устройство, синхронизует принимающий генератор в случае передачи бинарного бита (и не синхронизирует при передаче бинарного бита 1). После прохождения через вычитающее устройство сигналов от

передающего и принимающего генераторов детектируется восстановленный сигнал $\tilde{m}(t)$.

Важным преимуществом таких схем перед схемами, основанными на хаотической маскировке, является возможность варьирования уровня вводимого информационного сообщения, что позволяет управлять качеством передачи информации (т.е. варьировать точность дешифрации исходного информационного сообщения принимающей стороной). Однако увеличение качества передачи информации влечет за собой потерю ее конфиденциальности, что является существенным недостатком. Кроме того, такие схемы характеризуются достаточно низкой устойчивостью к шумам в канале связи и расстройке управляющих параметров изначально идентичных хаотических генераторов. Необходимость обеспечения идентичности трех генераторов хаоса, два из которых находятся на разных сторонах канала связи, представляет собой труднорешаемую техническую задачу, а следовательно, является еще одним недостатком такой схемы.

Модулирование управляющих параметров передающего генератора информационным сигналом

Схемы на основе модулирования управляющих параметров, или адаптивные методы, - естественный этап при переходе от дискретной модуляции управляющего параметра передающего генератора в схеме с переключением хаотических режимов к модуляции непрерывным сигналом. При этом роль модулирующего сигнала играет информационный сигнал. Необходимым условием реализации таких схем является предварительное определение допустимого диапазона изменения параметра и нормирование модулирующего информационного сигнала. Частным случаем является использование бинарного цифрового сигнала в качестве информационного и модулирование им управляющего параметра передающего генератора. Схема скрытой передачи информации таким способом приведена на рис. 4.4.

Принцип ее работы аналогичен принципу работы схемы на основе переключения хаотических режимов. Полезный цифровой сигнал $m(t)$ модулирует один из параметров передающего генератора $x(t)$ таким образом, чтобы в зависимости от передаваемого бинарного бита 0 (1) между передающим $x(t)$ и принимающим $u(t)$ генераторами существовал (отсутствовал) режим полной хаотической

синхронизации. Тогда после прохождения через вычитающее устройство сигналов передающего и принимающего устройств детектируется восстановленный сигнал $\tilde{m}(t)$. Для возможности реализации режима полной синхронизации управляющие параметры принимающего генератора должны быть выбраны идентичными управляющим параметрам передающего (точнее, одному из наборов параметров передающего генератора, отвечающему, например, бинарному биту 0).

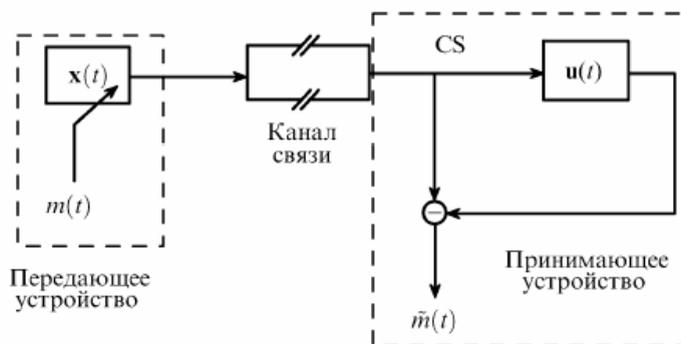


Рисунок 4.4 Схема скрытой передачи информации путем модулирования управляющего параметра передающего генератора информационным сигналом.

4.5 Модели хаотической синхронизации для скрытой передачи информации

В разделе 4.4 мы рассмотрели основные типы схем скрытой передачи информации на основе полной хаотической синхронизации. Схемы, рассмотренные в разделе 4.4, являются простейшими системами, представляющими собой основу для использования хаотической синхронизации для скрытой передачи данных. Понятно, что ни одна из них не лишена недостатков. Дальнейшие исследования идут в направлении создания новых схем, в которых делаются попытки устранить указанные недостатки, повышая в некоторых случаях конфиденциальность схем, в некоторых – устойчивость к шумам, в некоторых – избавляясь от необходимости идентичности генераторов и обеспечивая тем самым возможность более простой технической реализации схем. Естественным путем в этом случае является переход от полной хаотической синхронизации к другим типам синхронного поведения. Так, например, в работе [21]

предложено использовать фазовую синхронизацию для скрытой передачи данных.

Принципиальная схема реализации такого способа приведена на рис. 4.5.

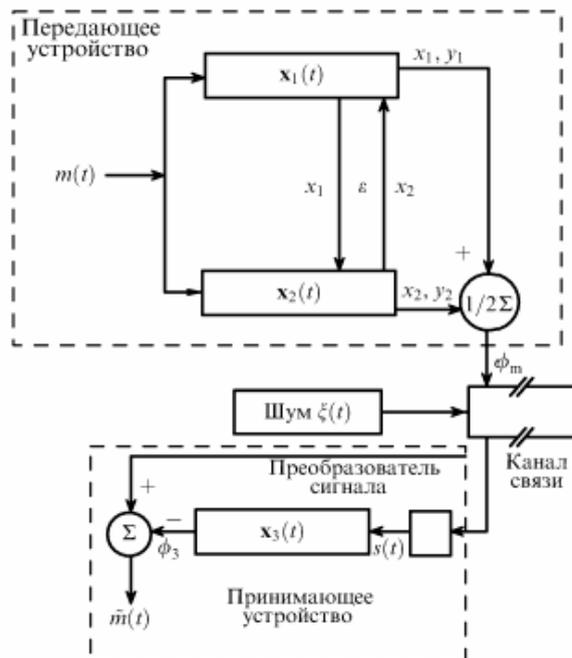


Рисунок 4.5 Схема скрытой передачи информации на основе фазовой хаотической синхронизации.

На передающей стороне канала связи находятся два идентичных взаимосвязанных хаотических генератора с 1,5 степенями свободы, характеризующихся векторами состояний $x_{i,2}(t) = (x_{i,2}, y_{i,2}, z_{i,2})$. Связь между генераторами является диссипативной, что позволяет обеспечить фазовую синхронизацию при достаточно малом параметре связи ε . Один из управляющих параметров этих генераторов (один и тот же в обеих системах) модулируется полезным цифровым сигналом $m(t)$. В качестве передаваемого сигнала используется мгновенная фаза $\phi_m(t)$ сигнала $x_m(t) = (x_m, y_m, z_m)$, представляющего собой среднее значение сигналов $x_{i,2}(t)$, генерируемых этими системами (фаза вводится в рассмотрение на плоскости (x_m, y_m) , где $x_m = (x_1 + x_2)/2$, $y_m = (y_1 + y_2)/2$). Полученный таким образом

сигнал $\phi_m(t)$, содержащий полезную информацию, передается по каналу связи (в котором он подвергается влиянию шумов) на принимающее устройство, содержащее хаотический генератор $\mathbf{x}_3(t) = (x_3, y_3, z_3)$, идентичный генераторам передающего устройства, что обеспечивает возникновение режима фазовой синхронизации между ними. В качестве сигнала, непосредственно воздействующего на принимающий генератор хаоса, используется сигнал $s(t) = \eta(r_3 \cos \phi_m - x_3)$, где $r_3 = (x_3 + y_3)^{1/2}$, η - амплитуда сигнала. Восстановленный сигнал $\tilde{m}(t)$ получают в результате анализа поведения разности фаз $\Delta\phi = \phi_m - \phi_3$ соответствующих сигналов.

Как видно из приведенного описания схемы скрытой передачи информации на основе фазовой синхронизации, принцип ее работы существенно отличается от принципа работы схем, рассмотренных в разделе 4.4. Этот способ обладает существенными дополнительными сложностями с точки зрения технической реализации. Поэтому на этой схеме мы более подробно останавливаться не будем.

Имеются также попытки использовать для скрытой передачи данных, наряду с фазовой синхронизацией, обобщенную синхронизацию [22]. Использование этого типа синхронного поведения открывает ряд новых возможностей, нехарактерных, например, для полной и фазовой синхронизации.

Способ скрытой передачи информации на основе обобщенной синхронизации

Одной из работ, в которых используется режим обобщенной синхронизации для скрытой передачи информации, является работа [18]. Принципиальная схема реализации такого способа скрытой передачи данных приведена на рис.4.6.

Передающая сторона содержит два хаотических генератора, ведущий $\mathbf{x}(t)$ и ведомый $\mathbf{u}(t)$, которые могут быть неидентичными. Сигнал с ведущего генератора передается на ведомый, причем его интенсивность модулируется полезным цифровым сигналом $m(t)$ таким образом: если передается бинарный бит 0, то между ведущим и ведомым генераторами устанавливается режим обобщенной синхронизации, а если передается бинарный бит 1, то режим обобщенной синхронизации между ними разрушается. На принимающей стороне канала связи находится так называемый вспомогательный хаотический генератор $\mathbf{v}(t)$, идентичный ведомому

по управляющим параметрам. Сигнал с ведущего генератора по каналу связи передается на вспомогательный, что обеспечивает возникновение режима обобщенной синхронизации между ними, причем интенсивность передаваемого по каналу связи сигнала должна совпадать с интенсивностью сигнала, поступающего к ведомой системе при передаче бинарного бита 0.

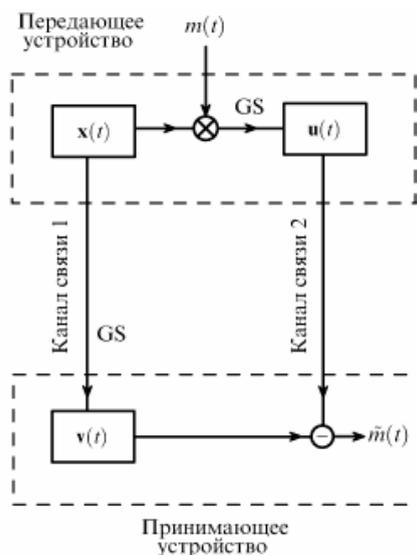


Рисунок 4.6 Схема скрытой передачи информации с помощью обобщенной хаотической синхронизации.

Сигнал с ведомого генератора уже по другому каналу связи передается принимающей стороне. Так же как и в способах скрытой передачи данных, основанных на режиме полной хаотической синхронизации, принимающая сторона имеет в своем распоряжении как хаотический сигнал, содержащий полезную информацию, так и сигнал без нее. Поэтому можно легко выделить полезный цифровой сигнал $\hat{m}(t)$ простым вычитанием одного сигнала из другого.

В такой схеме скрытой передачи информации активно используется метод вспомогательной системы, что требует наличия двух идентичных по управляющим параметрам хаотических генераторов. Так же как и в схемах, основанных на режиме полной хаотической синхронизации, эти генераторы располагаются на разных сторонах канала связи, что представляет собой существенную проблему с точки зрения технической реализации данного метода. Небольшая рассройка значений управляющих параметров в этих

системах приводит к появлению шумов десинхронизации, делая такую схему неработоспособной. Кроме того, реализация двух каналов связи является существенным недостатком, способствует появлению дополнительных шумов в канале связи, искажающих передаваемый сигнал. Поэтому такая схема скрытой передачи данных характеризуется достаточно низкой устойчивостью к шумам в канале связи и является труднореализуемой на практике.

Возникают также проблемы с конфиденциальностью передачи информации. Так же как и в схемах на основе нелинейного подмешивания информационного сигнала к хаотическому, повышение качества передаваемой информации влечет за собой потерю конфиденциальности.

Использование нескольких типов синхронного поведения для скрытой передачи информации

В работах [23, 24] предложены способы скрытой передачи данных, использующие одновременно режимы обобщенной и полной хаотической синхронизации.

Схема, предложенная в работе [23] (рис.4.7), является модификацией схемы, рассмотренной в разделе 4.4.

Принцип работы передающего устройства аналогичен принципу работы передающего устройства схемы, описанной в разделе 4.4. Модификация заключается в том, что на принимающей стороне каналов связи находится дополнительный хаотический генератор $x_2(t)$, идентичный ведущему $x_1(t)$ по управляющим параметрам (далее – второй ведущий генератор). Сигнал, генерируемый ведущей системой, передается по первому каналу связи, переводя второй ведущий генератор в режим полной синхронизации. Конфиденциальность можно повысить за счет того, что сигналы, поступающие на ведомый и второй ведущий генераторы, могут быть различными (например, ведомой системе передается сигнал, представляющий собой x - координату ведущей системы, а второй ведущей – сигнал, представляющий собой y - координату).

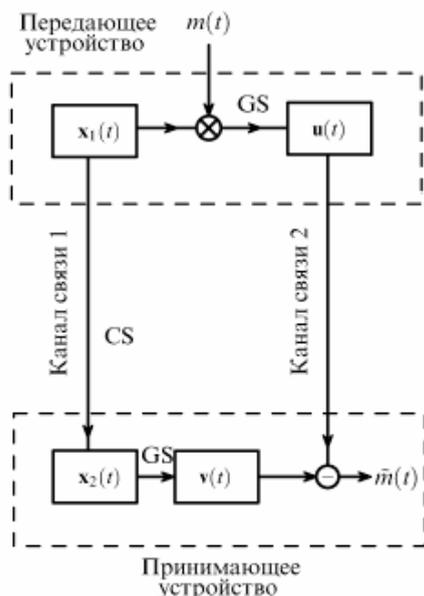


Рисунок 4.7 Схема скрытой передачи информации с помощью обобщенной и полной хаотической синхронизации.

На принимающей стороне канала связи сигнал от второго ведущего генератора, воздействуя на вспомогательный, обеспечивает возникновение режима обобщенной синхронизации между ними. Сигнал с ведомого генератора поступает по второму каналу связи на принимающую сторону. Вследствие идентичности сигналов, воздействующих на ведомый и вспомогательный генераторы, как и в предыдущем случае, принимающая сторона имеет в своем распоряжении как сигнал, содержащий полезную информацию, так и сигнал без нее. После прохождения через вычитающее устройство полезный сигнал может быть легко детектирован.

Такая схема является более эффективной с точки зрения конфиденциальности, т.е. снижается вероятность детектирования информационного сообщения третьей стороной. Наличие идентичных генераторов в передающем и принимающем устройствах (теперь это уже две пары идентичных генераторов), реализация двух каналов связи, низкая устойчивость к шумам в канале связи, которая становится еще ниже вследствие разрушения полной хаотической синхронизации, - все эти недостатки делают подобные схемы скрытой передачи данных малоприменимыми на практике.

В работе [24] был предложен другой способ скрытой передачи информации, в котором также используются два типа синхронного поведения – обобщенная и полная хаотическая синхронизация, но схема является модификацией одной из схем для скрытой передачи данных, основанных на нелинейном подмешивании информационного сигнала к хаотическому.

Принципиальная схема реализации такого способа скрытой передачи данных приведена на рис.4.8.

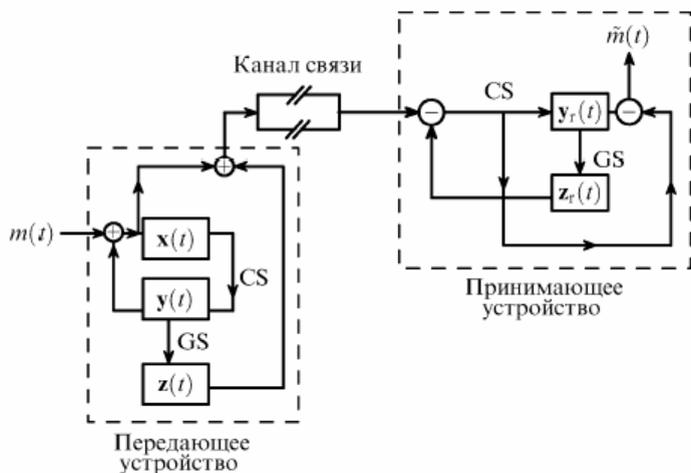


Рисунок 4.8 Схема скрытой передачи информации с использованием комбинированного хаотического сигнала.

Передающее устройство, так же как и в схеме на основе нелинейного подмешивания информационного сигнала к хаотическому, содержит два взаимосвязанных идентичных хаотических генератора $x(t)$ и $y(t)$ (далее – первый и второй). Информационный сигнал $m(t)$ подмешивается к сигналам, производимым этими генераторами, и тем самым претерпевает нелинейные изменения. Кроме того, на передающей стороне канала связи находится еще один генератор $z(t)$ (будем называть его третьим), неидентичный первому и второму по управляющим параметрам и однонаправленно связанный со вторым. Значения управляющих параметров генераторов передающего устройства должны быть выбраны таким образом, чтобы второй и третий генераторы находились в режиме обобщенной хаотической синхронизации, в то время как первый и второй являлись бы

полностью синхронизованными, т.е. находились в режиме полной синхронизации. Третий генератор используется для повышения конфиденциальности: он формирует сигнал, который в простейшем случае просто добавляется к сигналу, содержащему полезную информацию, что формирует уже комбинированный сигнал, создавая тем самым дополнительную маскировку.

Такой способ передачи информации в оригинальной работе был назван «скрытая передача информации с использованием комбинированного сигнала хаотических систем в режиме обобщенной синхронизации» (secure communication using a compound signal from generalized synchronizable chaotic systems). Комбинированный сигнал по каналу связи передается на принимающее устройство, содержащее два генератора: четвертый - $y_r(t)$, идентичный первому и второму по управляющим параметрам, и пятый - $z_r(t)$, идентичный в том же самом смысле третьему. Четвертый и пятый генераторы должны находиться в режиме обобщенной синхронизации. Тогда согласно методу вспомогательной системы, вследствие идентичности четвертой и второй систем, третий и пятый генераторы будут совершать идентичные колебания. Сигналы из канала связи и пятого генератора поступают на вычитающее устройство. На четвертый генератор и второе вычитающее устройство будут уже поступать сигналы, свободные от дополнительных составляющих. В случае воздействия на четвертый генератор этот сигнал синхронизирует его при передаче бинарного бита 0 и не синхронизирует при передаче бинарного бита 1. На выходе будет получен восстановленный сигнал $\tilde{m}(t)$, представляющий собой последовательность участков с синхронным (бинарный бит 0) и несинхронным (бинарный бит 1) поведением.

Из приведенного выше рассмотрения следует, что такая схема является достаточно конфиденциальной: по комбинированному сигналу, передаваемому по каналу связи, в большинстве случаев даже в отсутствие шумов, диагностировать информационное сообщение третьей стороной не представляется возможным. Однако как и в схемах на основе нелинейного подмешивания, качество передачи информации, а следовательно, и возможность восстановления качественной информации, сильно зависит от конфиденциальности, а именно: чем выше конфиденциальность, тем ниже качество. В то же время понятно, что за счет создания комбинированного сигнала эта зависимость будет не столь резкой, что является некоторого рода преимуществом этой схемы перед другими.

Однако «экстенсивный» путь совершенствования способов скрытой передачи данных – использование нескольких типов синхронного поведения для передачи информации – по всей видимости, является неоптимальным.

Сверхустойчивый к шумам способ скрытой передачи информации

Анализ схем, рассмотренных в разделах 4.4 и 4.5 показывает, что, несмотря на использование различных типов синхронного поведения для скрытой передачи информации, специфические особенности этих способов, их характерные различия, достоинства и недостатки в той или иной степени присущи всем известным сейчас схемам. Это в первую очередь:

- требование высокой степени идентичности к хаотическим генераторам, располагающимся на разных сторонах канала связи;
- низкая устойчивость к шумам в канале связи;
- низкая конфиденциальность, т.е. возможность в ряде случаев реконструкции параметров передающего генератора по сигналу, передаваемому по каналу связи (особенно для схем на основе полной хаотической синхронизации), с последующим восстановлением информационного сигнала.

В этом разделе мы рассмотрим способ скрытой передачи информации [22], который во многом лишен всех вышеупомянутых недостатков.

Прежде чем перейти к описанию самого способа скрытой передачи данных, кратко остановимся на причинах структурной устойчивости режима обобщенной синхронизации к шумам.

4.6 Устойчивость режима обобщенной синхронизации к шумам

Известно, что режим обобщенной синхронизации может наблюдаться в системах с диссипативным и недиссипативным типами связи [25]. Для систем с диссипативной связью уравнения, описывающие динамику взаимодействующих систем в присутствии шума, могут быть представлены в виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t), \mathbf{g}_d),$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{u}(t), \mathbf{g}_r) + \varepsilon A(\mathbf{x}(t) - \mathbf{u}(t)) + D\xi(t), \quad (4.30)$$

где $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{u}(t)$ - векторы состояния ведущей и ведомой систем соответственно, $\xi(t)$ - шумовой сигнал, \mathbf{G} и \mathbf{H} - векторные поля взаимодействующих систем, \mathbf{g}_d и \mathbf{g}_r - векторы управляющих

параметров, $A = \{\delta_{ij}\}$ - матрица связи, $\delta_{ii} = 0$ или $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$), ε - параметр связи, D - интенсивность шума.

Механизмы возникновения режима обобщенной синхронизации могут быть выявлены с помощью метода модифицированной системы, впервые предложенного в наших работах. Согласно этому методу, ведомая система $\mathbf{u}(t)$ может быть рассмотрена как некоторая модифицированная система:

$$\dot{\mathbf{u}}_m(t) = \mathbf{H}'(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{g}_r, \varepsilon), \quad (4.31)$$

находящаяся под внешним воздействием $\varepsilon(\mathbf{Ax}(t) + D\xi(t))$,

$$\dot{\mathbf{u}}_m(t) = \mathbf{H}'(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{g}_r, \varepsilon) + \varepsilon(\mathbf{Ax}(t) + D\xi(t)), \quad (4.32)$$

где $\mathbf{H}'(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{H}(\mathbf{u}(t)) - \varepsilon \mathbf{Au}(t)$. Слагаемое $-\varepsilon \mathbf{Au}(t)$ вносит дополнительную диссипацию в модифицированную систему (4.32).

Режим обобщенной синхронизации, возникающий в системе (4.30), может быть рассмотрен как следствие двух взаимосвязанных процессов, протекающих одновременно: увеличения диссипации в модифицированной системе (4.31) и возрастания амплитуды внешнего (хаотического и шумового) сигнала. Оба процесса связаны между собой посредством параметра ε и не могут быть реализованы в ведомой системе (4.30) по отдельности. Однако увеличение диссипации в модифицированной системе (4.32) приводит к упрощению ее поведения и переходу от хаотических колебаний к периодическим (или к стационарному состоянию). Внешнее воздействие, наоборот, стремится усложнить поведение модифицированной системы и навязать ей свою динамику. Очевидно, что возникновение режима обобщенной синхронизации возможно только тогда, когда собственная хаотическая динамика в ведомой системе оказывается подавленной вследствие диссипации.

Таким образом, устойчивость режима обобщенной синхронизации определяется прежде всего свойствами самой модифицированной системы. Поэтому порог возникновения режима обобщенной синхронизации не должен сильно зависеть от интенсивности шума $D\xi(t)$, воздействующего на однонаправленно связанные хаотические системы. Если шум не изменяет характеристики модифицированной системы (4.31), то он должен и влиять на порог возникновения режима обобщенной синхронизации.

Действительно, как упоминалось ранее, диагностирование режима обобщенной синхронизации возможно как с помощью метода вспомогательной системы, так и путем расчета условных ляпуновских экспонент. Понятно, что ведомая и вспомогательная системы могут

быть рассмотрены как две идентичные системы с близкими начальными условиями. Вычисление производной от разности их состояний $\Delta(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{u}(t)$ при наличии ($D > 0$) и отсутствия шума ($D = 0$), вследствие идентичности детерминированных и стохастических сигналов, воздействующих на эти системы, приводит к одному и тому же уравнению:

$$\dot{\Delta}(t) = (\mathbf{JH}(\mathbf{u}(t)) - \varepsilon A) \Delta(t) = \mathbf{JH}'(\mathbf{u}(t))\Delta(t), \quad (4.33)$$

где \mathbf{J} - матрица Якоби. Так как уравнение (4.33) может быть рассмотрено как уравнение в вариациях при вычислении условных ляпуновских экспонент, можно заключить, что старшие условные ляпуновские показатели (определяющие порог возникновения режима обобщенной синхронизации) будут вести себя схожим образом, как в отсутствие, так и при наличии шума. Поэтому порог возникновения режима обобщенной синхронизации не должен зависеть от интенсивности шума, а сам тип синхронного поведения должен обладать значительной устойчивостью к шумам.

Как показывают результаты исследований, режим обобщенной синхронизации обладает структурной устойчивостью к шумам как в системах с малым числом степеней свободы, так и в пространственно распределенных средах. Экспериментальное подтверждение данного факта было получено в рамках радиотехнического эксперимента с низкочастотными генераторами хаоса.

Описание способа

Принципиальная схема реализации такого способа приведена (рис.4.9).

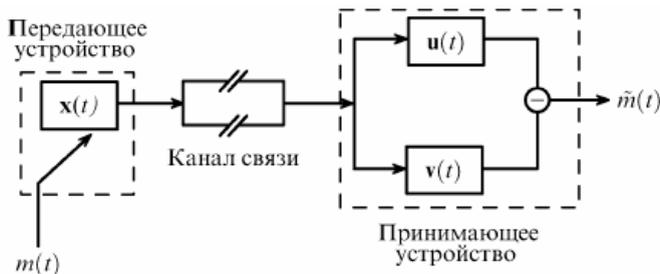


Рисунок 4.9 Схема реализации сверхустойчивого к шумам способа скрытой передачи информации на основе обобщенной хаотической синхронизации.

Способ скрытой передачи информации заключается в следующем [22]. Информационный сигнал $m(t)$ кодируется в виде бинарного кода. Один или несколько управляющих параметров передающего генератора $x(t)$ модулируются бинарным сигналом таким образом, чтобы характеристики передаваемого сигнала изменялись незначительно. Полученный таким образом сигнал передается по каналу связи. Здесь он подвергается искажению под влиянием шумов. Приемник, который находится на другой стороне канала связи, представляет собой два идентичных генератора $u(t)$ и $v(t)$, способных находиться в режиме обобщенной синхронизации передающим генератором. Принцип работы приемника основан на диагностике режима обобщенной синхронизации с помощью метода вспомогательной системы. Сигнал с канала связи поступает на генераторы приемника. Полученные на выходе сигналы проходят через вычитающее устройство, и затем детектируется восстановленный полезный сигнал $\tilde{m}(t)$.

Принципиальным достоинством рассматриваемого способа скрытой передачи данных является отсутствие требования идентичности генераторов на разных сторонах канала связи. Два идентичных генератора располагаются на принимающей стороне. Следует отметить, что наличие идентичных генераторов на одной стороне канала связи позволяет легко осуществить юстировку, что снижает требование к степени идентичности генераторов, а следовательно, упрощает техническую реализацию схемы.

Кроме того, сигналы, поступающие на генераторы принимающего устройства, всегда будут одинаковыми, даже при наличии шума в канале связи. Следовательно, как обсуждалось в разделе 4.6, при диссипативной связи между генераторами передающего и принимающего устройства шум не должен оказывать сильного влияния на порог возникновения режима обобщенной синхронизации. Эта особенность позволяет говорить о возможности создания устойчивых к шумам способов скрытой передачи данных на основе режима обобщенной синхронизации. В [21] было проведено сравнение известных способов скрытой передачи информации и представлена численная реализация сверхустойчивого к шумам способа скрытой передачи информации.

Что касается метода управления пространственно-временным хаосом в решетках связанных отображений, то показаны переходы из режима пространственно-временного хаоса к заданным регулярным пространственно-временным структурам.

Однако, большинство методов такого подхода требуют довольно длительных и стационарных рядов данных, что не является типичным свойством для серии измерений реального процесса. Кроме того, данные методы удовлетворительно работают только в случаях определенных (сильно идеализированных, упрощенных) моделей реальной системы. Таким образом, появилась потребность разработки нового инструмента, основанного на фундаментальных свойствах диссипативных динамических систем, не предъявляющего особых требований к данным и дающего удовлетворительные результаты. Таким инструментом нелинейного анализа стали рекуррентные диаграммы. Заметим, что это не есть диаграммы в классическом их понимании, а это скорее визуализация рекуррентности.

Кроме того, данный инструментарий применим к коротким и нестационарным рядам, что является неоспоримым преимуществом перед другими традиционными способами нелинейного анализа.

Прежде чем перейти к постановке задачи управления в терминах нелинейного рекуррентного анализа, кратко остановимся на элементах теории.

Выводы

В настоящей главе отмечена актуальность и важность проблемы управления хаотическими системами. В контексте проблемы были рассмотрены общие методы резонансных возбуждений, используемые для решения задач управления хаотическими системами. Использование этих методов обусловлено широкими возможностями о приложении к решению таких задач как обработка информации, самоорганизация, искусственное создание когерентных структур в распределенных системах, стабилизация хаотического поведения систем.

Показана возможность использования эффекта синхронизации в задачах управления хаотическими системами. С этой целью были рассмотрены модели синхронизации в хаотических системах.

Что касается метода управления пространственно – временным хаосом в решетках связанных отображений, то показаны переходы из режима пространственно – временного хаоса к заданным регулярным пространственно – временным структурам.

Кроме того, были затронуты теоретические аспекты использования методов хаотической синхронизации в задачах скрытой передачи информации и отмечена их актуальность.

Литература

1. Арнольд В.И., Авец А. Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 1999.
2. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973.
3. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
4. Лоскутов А.Ю. Проблемы нелинейной динамики II. Подавление хаоса и управление динамическими системами. Вестник Моск. ун-та. серия 3. Физика. Астрономия. №3. 2001. – с. 3-21.
5. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом. Методы и приложения. Часть 1. Методы. АИТ, №5, 2003. – с. 3-45.
6. Kuang – Yow lian, Peter Liu, Tsu-Cheng Wu and Wel-chi lin Chaotic control using fuzzy model – based methods. Int. Journal of Bifurcation and Choos, vol. 12, №8. 2002. – 1827-1841.
7. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. N.Y.: American Mathematical Society, 1927.
8. Xiagong Zhang, Anmar Kharda, Dong Li, Dan Yang. Impulsive stability of chaotic systems reperedented by $T-S$ method, Chaos, Solitons and Fractals. 2008. – p. 1-7.
9. Huqqueni C. Horoloqium Oscilatorium. Parisis, France, 1673.
10. Ланда П.С., Ларионцев Е.Г. Режимы биений и синхронизации встречных волн во вращающемся кольцевом газовом лазере //Радиотехника и Электроника. Т. 15, №6, 1970. – с. 1214.
11. Романовский Ю.М. О взаимной синхронизации многих автоколебательных систем, связанных через общую среду //Известия ВУЗов. Сер. Радиофизика. Т. 15, №5, 1972. –с. 718.
12. Скупой В.Ф., Копылов В.П. О синхронизации ЧМ-автогенератора //Радиотехника и Электроника. Т. 24, №7, 1979ю – с. 1374.
13. Ланда П.С., Рендель Ю.С., Шер В.Ф. Синхронизация колебаний в системе Лоренца //Известия ВУЗов. Сер. Радиофизика. Т. 32, №9, 1989. – С. 1172-1174.
14. Dykman G., Landa P., Neimark Y. Synchronizing of chaotic oscillations by external force //Chaos, Solitons and Fractals. V. 1., №4, 1992. – p. 339-353.
15. Anishchenko V.S., Sikchenko A.N., Khovanov I.A. Synchronization of switching processes in coupled Lorenz systems //Phys. Rev. E. V. 57, №1, 1998. – p. 316-322.

16. Shulgin B.V., Neiman A.B., Anishchenko V.S. Mean switching Frequency Locking in Stochastic Bistable Systems Driven by Periodic Force //Phys. Rev. Letters V. 75, 1995. – p. 4157-4160.

17. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 199. – 368 с.

18. Короновский А.А., Москаленко О.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом – единый тип поведения связанных хаотических систем. Доклады Ан. Т. 407, №6, 2006. – с. 1-5.

19. Lay Y., Grebogi C. Synchronization of chaotic trajectories using control //Phys. Rev. E. V. 47, №4, 1993. – p. 2357-2360.

20. Yang J., Hu G., Xiao J. Chaos synchronization in coupled oscillators with multiple positive Lyapunov exponents //Phys. Rev. Letters, V. 80, №36 1998 –p. 496-499.

21. Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации. УФН. Т. 179, №12, 2009. – с. 1281-1310.

22. Короновский А.А., Москаленко О.И., Попов П.В., Храмов А.Е. Способ скрытой передачи информации, основанный на явлении обобщенной синхронизации. Известия РАН. Серия физическая, Т. 72, №1, 2008. – с. 143-147.

23. Terry J.R., Van Wiggezen G.D. Chaotic communication using generalized synchronization. Chaos, Solitons & Fractals. V. 12, issue 1, 2001. – p. 145-152.

24. Murali K., Lakshmanan M. Secure communication using a compound signal from generalized synchronizable chaotic systems. Physics Lett. A. V. 241, №6, 1998. – p. 303-310.

25. Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. О механизмах, приводящих к обобщенной синхронизации //ЖТФ, Т. 76, №2, 2006.- с. 1-9.

ГЛАВА 5. НЕЛИНЕЙНЫЙ РЕКУРРЕНТНЫЙ АНАЛИЗ

Математическое моделирование по временным рядам активно развивающееся направление моделирования. Так, исследование временных рядов играет важную роль при работе с уже построенными математическими моделями.

Корректность конкретизации модели зависит от того, насколько полно была проанализирована сама модель. В случае выявления недостаточной адекватности модели процесс повторяется заново с одного из этапов, что выливается в дополнительные временные, материальные затраты. При динамическом моделировании основным критерием адекватности математической модели является адекватность прогноза поведения исходной реальной системы.

Таким образом, средства анализа временных рядов являются одним из важнейших инструментов исследователя при моделировании по временным рядам. Оценивающий априорные данные исследователь, как правило, решает следующие основные задачи: определение характера процессов (стохастичность, хаотичность, периодичность, квазипериодичность и т.д.), выявление особенностей эволюции (смена режима, изменения уровня шума, изменения трендов и т.д.), сравнение процессов (выявление подобия, отклонений от эталона, синхронизация и т.д.).

В последние десятилетия набор традиционных (линейных) методов исследования временных рядов был существенно расширен нелинейными методами, полученными из теории нелинейной динамики и хаоса; многие исследования были посвящены оценке нелинейных характеристик и свойств естественных и искусственных систем. Однако большинство методов нелинейного анализа требуют либо достаточно длинных, либо стационарных рядов данных, которые далеко не всегда возможно получить на практике при исследовании реальных систем. Более того, Манука (Manuca) и Савит (Savit) показали, что данные методы дают удовлетворительные результаты как правило для идеализированных моделей реальных систем.

Лишенным указанных недостатков и одним из наиболее интересных современных методов являются рекуррентные диаграммы, получившие в последнее десятилетие широкое теоретическое развитие и практическое признание.

Предварительно рассмотрим некоторые положения, способствующие доступному пониманию материала.

5.1. Реконструкция фазового пространства. Фазовая траектория

Динамическая система характеризуется состоянием системы в некоторый момент времени и ее динамикой (правила, описывающего эволюцию системы во времени). Эволюцию можно наблюдать в фазовом пространстве – абстрактном пространстве, в котором координатами служат компоненты состояния. При этом координаты выбираются в зависимости от контекста. В случае механической системы это могут быть положение и скорость, в случае, например, экологической модели – популяции различных биологических видов.

Как известно, состояние системы описывается параметрами состояния:

$$x^1(t), x^2(t), \dots, x^d(t), \quad (5.1)$$

где верхние индексы указывают на нумерацию компонент. Набор параметров состояния в момент t формирует вектор $x(t)$ в d -мерном пространстве, называемым фазовым. Этот вектор изменяется во времени и направлении:

$$\dot{x}(t) = dx(t)/dt = F(x), \quad (5.2)$$

а временной ход векторов фазового пространства определяет так называемую фазовую траекторию, причем поле скоростей $F(t)$ будет касательно к этой траектории. Для автономных систем такая траектория является самонепересекающейся. Подобная графическая реализация во времени дает непосредственную информацию о динамике системы, т.е. указывает на аттрактор системы. Зная $F(t)$, состояние системы в данный момент времени может быть определено интегрированием системы уравнений (5.2). Однако графическая визуализация фазовой траектории позволяет определить состояние системы без интегрирования уравнений, указывая, например, на периодическое или хаотическое поведение.

Имея дело с реальным процессом и реальным его наблюдением, зачастую приходится иметь дело только с одним наблюдением $u(t)$ или одним дискретным временным рядом u_i , где $t = i\Delta t$ и Δt – минимальный шаг по времени. Стоит заметить, что на практике не всегда удается провести измерения через равные промежутки времени Δt . Это усложняет анализ получаемых временных рядов или вовсе сводит на нет целый ряд стандартных методов анализа, требующих равномерной временной шкалы. Однако при этом не накладывается существенных ограничений на использование рекуррентного анализа,

применимого также и для нестационарных рядов данных. Поскольку сложные системы содержат много компонент и их поведение определяется большим числом взаимодействий, то даже одна из этих компонент и их поведение определяется большим числом взаимодействий. *Следовательно, посредством построения фазовой траектории (основываясь только на одном измерении) можно восстановить топологию полной фазовой траектории, как если бы мы использовали для этого все компоненты системы.* Такой подход был впервые предложен в 1980 году группой американских ученых [1], которые показали, что можно получить удовлетворительную картину странного аттрактора небольшой размерности, если вместо переменных x , входящих в уравнение динамической системы, использовать m - мерные вектора, получаемые из элементов временного ряда. В том же году голландский математик Такенс доложил о своей знаменитой теореме, опубликованной годом позже [2]. Именно эта теорема лежит в основе всех алгоритмов анализа временных рядов методами нелинейной динамики, как способ реконструкции фазовой траектории по методу отображения запаздывающих аргументов:

$$\mathbf{x}_i = (u_i, u_{i+\tau}, \dots, u_{i+(m-1)\tau}), \quad (5.3)$$

где m - размерность вложения и τ - запаздывание по времени (реальное запаздывание по времени определяется как $\tau \Delta t$). Сохранение топологических структур исходной траектории гарантировано, если $m \geq 2d + 1$, где d - размерность аттрактора [2, 3].

Существует целый ряд методик по определению размерности вложения. В частности, в работе Марвана использована методика по выявлению «ложных» точек в заданной окрестности какой-либо точки фазового пространства, а именно отслеживание изменений числа близлежащих точек при изменении величины размерности вложения.

Простейший метод, основанный на таком подходе, подсчитывает число «ложных» точек в выбранной окрестности фазовой точки, как функцию размерности вложения. Поскольку уменьшение величины размерности вложения приводит к увеличению числа «ложных» точек, то необходимо определять размерность вложения так, чтобы число «ложных» точек стремилось к нулю. Другие методы используют отношения расстояний между теми же близлежащими точками при различных величинах размерности вложения. Существуют и другие методы по определению размерностей аттракторов, например, корреляционные суммы, методы по определению величины запаздывания, такие как определение автокорреляционной функции

или взаимной информации, а также методы сингулярного разложения или анализа независимых компонент.

На пороге XXI века был предложен метод определения размерностей вложения уже с использованием рекуррентных диаграмм (РД) [4-6].

5.2. Методология рекуррентных диаграмм

Понятие «рекуррентности» известно довольно давно и обсуждалось в научных публикациях еще с XXI века, когда одним из основных объектов исследований были движения планет, описываемые уравнениями небесной механики. Так, еще в 1880-х годах Анри Пуанкаре был получен ряд важных результатов, составивших впоследствии основу современной теории динамических систем. В частности, им была отмечена сложность поведения системы в окрестности так называемой гомоклинической траектории, (траектория стремится к некоторой неподвижной точке или периодической траектории как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$) [7], что в 1890 году было опубликовано, как «теорема рекуррентности» [8].

Данная теорема лежит в основе современного учения о преобразованиях, сохраняющих меру, известного как эргодическая теория. При ее доказательстве Пуанкаре предвосхитил как понятие меры, так и понятие категории.

Рассмотрим ограниченную открытую область X в n -мерном пространстве с гомеоморфизмом T для X на себя, сохраняющим объем, то есть для любого открытого множества $G \subset X$ вводится предположение равенства объемов G и $T(G)$. При многократном применении T любая точка x порождает последовательность $x, Tx, T^2x, \dots, T^i(x), \dots$, называемую положительной полуорбитой x . Когда $x \in G$ для бесконечного множества целых положительных значений i , то говорят о возвращающейся точке x открытого множества G .

Тогда, на содержательном уровне, теорема Пуанкаре гласит, что для любого открытого множества $G \subset X$ точками, возвращающимися относительно G , являются все точки G , кроме некоторого множества первой категории меры нуль.

Итак, рекуррентность состояний в том понимании, что они (состояния) являются повторяющимися по прошествии некоторого времени, есть фундаментальное свойство диссипативных динамических систем.

Формально имеет место

Теорема [8]. Пусть T - сохраняющее меру преобразование пространства с конечной мерой (X, μ) и пусть $A \subset X$ - измеримое множество. Тогда для любого натурального $N \subset \mathbf{N}$

$$A(\{x \in A : \{T^n(x)\}_{n \geq N} \subset (X \setminus A)\}) = 0, \quad (5.4)$$

где T - рекуррентное время; X - произвольное измеримое множество; $\mu(\cdot)$ - вероятностная мера; x - параметр нормализованного ряда; N - множество натуральных чисел.

□ Заменяем T на T^n в формуле (5.4) и в достаточности выражения при $N = 1$.

Множество

$$\tilde{A} := \{x \in A \mid \{T^n(x)\}_{n \in \mathbf{N}} \subset X \setminus A\} = A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(X \setminus A) \right) \text{-измеримо.}$$

Запишем

$$T^{-n}(\tilde{A}) \cap \tilde{A} = \emptyset$$

для всех n , так как предполагается противоположность $T^{-n}(\tilde{A}) = B$ с $B \neq \emptyset$, подразумевая $T^n(B) \subset A$.

Это несовместимо с определением \tilde{A} , так как $B \subset \tilde{A}$.

К тому же

$$T^{-n}(\tilde{A}) \cap T^m(\tilde{A}) = \emptyset \quad \forall m, n \in \mathbf{N},$$

так как принимается $T^{-n}(\tilde{A}) \cap T^{-m}(\tilde{A}) = B$ с $B \neq \emptyset$, учитывая, что $T^n(B) \subset \tilde{A}$ и $T^m(B) \subset \tilde{A}$.

Не теряя общности, принимается $m > n$. Тогда $T^n(B) = C \subset \tilde{A}$ и $T^m(B) = T^{m-n}(T^n(B)) = T^{m-n}(C) \subset \tilde{A}$, которое с другой стороны противоречит определению \tilde{A} .

Кроме того, $\mu(T^{-n}(\tilde{A})) = \mu(\tilde{A}) \subset T$, сохраняющим μ , Таким образом, $\mu(\tilde{A}) = 0$, так как

$$I = \mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(\tilde{A})\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(\tilde{A})) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(\tilde{A}).$$

Таким образом, имеем сохраняющее меру преобразование, где траектория при известных обстоятельствах стремится вернуться в режим достаточно близкий к предыдущему или проходит через похожие ступени развития.

Дальнейшее развитие теории, сохраняющих меру преобразований, привело к существенному улучшению теоремы Пуанкаре. Например, эргодическая теорема Дж. Д. Биркгофа (1931 г.)

утверждает, что при сохраняющих меру отображениях множества конечной меры на себя, почти все точки любого измеримого множества не только возвращаются в данное множество бесконечно много раз, но это происходит с частотой, стремящейся к определенному положительному пределу.

Однако возможности такого анализа сильно ограничены, так как зачастую системы обладают многомерными фазовыми траекториями, что делает возможным изображать только проекции таких траекторий в двух или трехмерных пространствах.

Диагностический инструмент, разработанный в 1987 году Экманом, Камхорстом и Рюэллем, так называемые РД (Recurrent Plots – RP), позволяет работать практически с любыми рядами [9]. Кроме того, преимущество используемого графического инструмента состоит в том, что он позволяет исследовать m -размерную траекторию фазового пространства посредством двумерного представления его рекуррентности и, следовательно, видеть динамическую картину в целом.

5.2.1. Конструирование рекуррентной диаграммы

Пусть точка $x(i)$ соответствует i -ой точке фазовой траектории, описывающей выбранную динамическую систему в m -мерном пространстве, для $i = 1, \dots, N$, тогда рекуррентный график есть массив точек $N \times N$, где ненулевой элемент с координатами (i, j) соответствует случаю, когда $x(j)$ достаточно близко к $x(i)$.

Другими словами, на современном языке можно дать следующее определение [10]:

• Рекуррентность состояния в момент i при различных значениях времени j воспроизводится внутри двумерной квадратной матрицы с черными и белыми точками, где черные точки обозначают наличие рекуррентности, а по обеим осям откладывается время. Такое представление называется рекуррентной диаграммой. Математически это может быть выражено следующим образом:

$$R_{i,j} = \Theta(\varepsilon_i - \|x_i - x_j\|), \quad x_i \in R^m, \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (5.5)$$

где N - число рассматриваемых состояний x_i , ε_i - граничное расстояние или расстояние от центра выбранной окрестности (точка $x(i)$) до ее границы, $\|\cdot\|$ - норма, и $\Theta(\cdot)$ - функция Хевисайда.

Согласно определению основная диагональ $R_{i,j} = I$ ($i = 1, \dots, N$) (под углом $\pi/4$) полностью состоит из черных точек и называется линией тождественности. Стоит подчеркнуть, что отдельные рекуррентные точки (i, j) не несут никакой информации о текущих состояниях в моменты i и j , однако в совокупности позволяют реконструировать свойства процесса

На практике бесполезно, да и почти невозможно обнаружить абсолютно рекуррентные состояния в том смысле, что $x_i \equiv x_j$. По этой причине состояние x_i рекуррентно состоянию x_j , если они оказываются достаточно близкими друг к другу. Это означает, что вектора x_j , попадающие в m -мерную окрестность (например, шар в L_2 -норме или квадрат в L_∞ -норме) радиуса ε_i с центром на значении x_i , являются рекуррентными, а такие x_j называются рекуррентными точками.

Еще в первой работе, посвященной РД [9], было отмечено, что при определении окрестности в форме шара фиксированного радиуса, РД будут демонстрировать симметричные структуры относительно главной диагонали, поскольку, если x_i близко к x_j , то верно и обратное: x_j близко к x_i . Однако картина усложнится, если не накладываться условие на равенство радиусов i -ой и j -ой окрестностей. Другими словами, математически это можно пояснить следующим образом [10]:

- При определении окрестности в форме шара с таким радиусом, что он охватывает строго фиксированное количество состояний x_j . Иными словами ε_i выбирается для каждого x_i ($i = 1, \dots, N$) в отдельности. $R_{i,j} \neq R_{j,i}$, поскольку окрестность, определенная для x_i необязательно совпадает с окрестностью для x_j . Это и приводит к асимметрии РД, однако все его колонки (колонки массива) имеют одинаковую плотность рекуррентности.

Итак, используя такой критерий как ε_i можно легко определить плотность рекуррентности в том смысле, что, выбрав $\varepsilon = 0,15$, локально определяемый радиус ε_i вводится таким образом, что соответствующая ему окрестность покрывает 15% всех векторов фазового пространства. Следовательно, плотность рекуррентности равна 0,15. Такой подход именуется, как фиксирование числа

ближайших точек (ФБТ), (fixed amount of nearest neighbors – FAN), то есть, обусловлен фиксированным количеством векторов фазового пространства, попадающих в выбранную окрестность. Таким образом, есть два подхода к определению окрестности:

- $\varepsilon_i = \varepsilon, \forall_i, \mathbf{R}_{i,j} = \mathbf{R}_{j,i}$
- $\varepsilon_i \neq \varepsilon, \mathbf{R}_{i,j} \neq \mathbf{R}_{j,i}$

Тот или иной тип окрестности выбирается исследователем в зависимости от его предпочтений или какой – либо специфики прикладного использования РД.

Следующим шагом в построении РД является выбор нормы, наиболее известными среди которых являются L_1 - норма, L_2 - норма (Евклидова норма) и L_∞ - норма (Максимальная норма). В зависимости от нормы будут различаться и формы окрестности (Рис. 5.1).

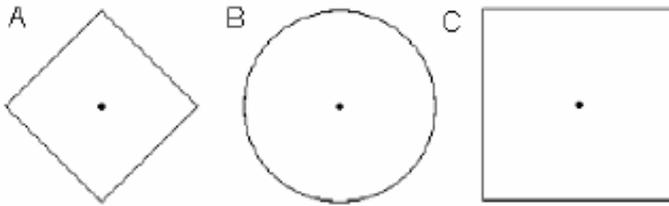


Рисунок 5.1 Типы норм: А - L_1 , В - L_2 , С - L_∞

При построении РД с фиксированным значением ε , в окрестность с L_∞ - нормой может попасть наибольшее количество близлежащих векторов фазового пространства по сравнению с L_1 - и L_2 -нормами, а при выборе L_2 - нормы наоборот – меньше. Предпочтения по выбору нормы опять же зависят от целей, которые преследует исследователь в своей работе. В частности, L_∞ - норма не зависит от размерности фазового пространства и легка в вычислении, по сравнению с двумя другими, потому особенно подходит для теоретического исследования самого инструмента РД [10]. L_1 - норма обеспечивает наиболее устойчивую рекуррентность состояний, поскольку если вектора фазового пространства рекуррентны для L_1 -

нормы, то они будут рекуррентны и при использовании двух других норм [11].

Стоит остановить внимание и на выборе значения пороговой величины ε . Безусловно, желательно подобрать самое маленькое из возможных значений. Однако на практике, в условиях присутствия шумовой компоненты, приходится несколько увеличивать пороговую величину. В случае, когда $\varepsilon_i = \varepsilon, \forall i$, рекомендуется выбирать пороговое значение не более 10% от значения максимального диаметра фазового пространства - σ , если же $\varepsilon_i \neq \varepsilon$, то пороговое значение рассчитывается по отношению к плотности рекуррентности [5, 10]. В случае использования нестационарных данных величина ε может уменьшаться до 1%.

5.2.2. Кросс-рекуррентные диаграммы

В параграфах, посвященных РД, мы, имели дело с вырожденным случаем кросс-рекуррентных диаграмм (КРД), поскольку рассматривался только один процесс и анализировалось расстояние между всеми точками одной и той же фазовой траектории. Графический инструмент КРД (Cross Recurrent Plot – CRP) позволяет проводить подобный анализ уже для двух временных рядов. Впервые обобщение РД на их «двумерный аналог» был сделан Збилутом в 1998 году [12] и независимо от него Марваном [10].

Очевидно, что поскольку мы рассматриваем два ряда, то не можем говорить о рекуррентности их состояний относительно друг друга, а лишь от конъюнкции (совпадения по времени) состояний обеих сторон, тем не менее, термин «кросс-рекуррентная диаграмма» используется в данном случае в силу удобства и наглядности аналогии с РД.

Итак, пусть имеется одна траектория \mathbf{x}_i длины N_x и вторая \mathbf{y}_i - длины N_y , тогда математически КРД определяется следующим образом:

$$CR_{i,j}^{m,\varepsilon_i} = \Theta(\varepsilon_i - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j\|, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \in R^m, i = 1, \dots, N_x, j = 1, \dots, N_y) \quad (5.6)$$

Система обозначений аналогична той, что использовалась при определении РД. Если состояние первой системы в момент i близко к состоянию второй системы в момент j , то на КРД с координатами (i, j) появляется точка. Поскольку не ставятся требования на

равенство длин векторов x и y , то и массив КРД не обязан быть квадратным.

Обе траектории, представленные КРД, должны отображать одну и ту же динамическую систему при одинаковых параметрах состояния, поскольку анализ производится в одном и том же фазовом пространстве. Это особенно важно, если временные ряды относятся к разным сериям измерений (например, температурный временной ряд и данные по измерению давления). Применение же инструмента КРД для полностью сторонних друг другу измерений (например, биржевые индексы и коды молекулярной биологии), не имеют физического смысла.

В случае разномасштабных амплитуд анализируемых траекторий и, если пороговое значение ε фиксировано, возникает проблема сведения этих фазовых траекторий к одному разряду величин, например посредством нормализации по стандартному отклонению. Однако использование метода ФБТ, при котором фиксируется количество векторов фазового пространства x_j , попадающих в окрестность вектора x_i , решает эту проблему автоматически и необходимость модифицирования ряда данных отпадает. Такой подход особенно выигрышен при анализе медленно меняющихся траекторий (например, адиабатический дрейф).

Поскольку величины $CR_{i,j}$ ($i = 1 \dots N$), как правило, не равны единице, линия тождественности деформируется, (для КРД она называется линией синхронизации) и, в конечном счете, может не лежать под углом $\pi/4$, тем не менее, все структурные единицы и их физическое значение сохраняются. Так линии, ориентированные более или менее диагонально, представляют не меньший интерес, чем в случае РД, а частота и длина этих линий, очевидно, связана с некоторым сходством между динамиками рассматриваемых систем. Длинные диагональные структуры на полотне КРД выявляют аналогичные эволюции во времени обеих фазовых траекторий в том смысле, что увеличение сходства двух процессов, вызывает рост плотности рекуррентных точек вдоль главной диагонали $CR_{i,j}$ ($i = 1 \dots N$). Таким образом, по скоплению рекуррентных точек вдоль основной диагонали или наличию иных диагональных линий судят о схожести и синхронизованности процессов.

Интерес вызывает совместное изучение хаотических процессов.

Совместные рекуррентные диаграммы (joint recurrence plot, JPR) предназначены для совместного изучения двух процессов $\{x_i^{d_x}\}_i^N$ и $\{y_i^{d_y}\}_i^N$ путем объединения РД каждого из исследуемых процессов:

$$\mathbf{JR}_{i,j}^{(x),(y)} = \Theta(\varepsilon^{(x)} - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \cdot \Theta(\varepsilon^{(y)} - \|y_i - y_j\|), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Данное выражение может быть обобщено для большого количества систем: более того, выражение для РД является его частным случаем. Когда точке траектории $\{\mathbf{x}\}$ в некоторое время i соседствует другая точка этой же траектории во время j , и одновременно с этим точке траектории $\{y\}$ в некоторое время i соседствует другая ее точка во время j , на диаграмме появляется рекуррентная точка в соответствующей позиции: $\mathbf{JR}_{i,j} = 1$.

Размерности d_x и d_y могут не совпадать. Переменные состояния обеих систем могут иметь различную физическую природу и не должны быть синхронизированы между собой. Совместные рекуррентные диаграммы (СРД) инвариантны относительно перестановки координат.

Диаграмма невязок. Совместные диаграммы отображают только те рекуррентные точки, что порождаются всеми рядами, участвующими в построении. Таким образом выявляется общее в структуре рекуррентностей исследуемых рядов. В задачах, например, поиска синхронизации или настройки моделей находит применение определение несоответствия одного ряда другому. Несоответствие рекуррентного поведения одного процесса рекуррентному поведению другого процесса математически может быть записано следующим образом: $\mathbf{RR}_{i,j} = (1 - \Theta(\varepsilon^{(x)} - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)) \cdot \Theta(\varepsilon^{(y)} - \|y_i - y_j\|)$, $i, j = 1, \dots, N$. Данная матрица именуется диаграммой рекуррентных невязок (recurrence residuals plot). Иными словами, матрица \mathbf{RR} отображает несоответствие рекуррентных структур траектории $\{y\}$ рекуррентным структурам траектории $\{x\}$. LOI на диаграмме невязок всегда представляет собой белую линию, т.к. $(1 - \mathbf{R}_{i=j}^{(x)}) \cdot \mathbf{R}_{i=j}^{(y)} = 0$ по определению.

5.3. Меры сложности геометрических структур рекуррентных диаграмм

Как уже отмечалось, главнейшим преимуществом инструмента РД является способность визуализировать многомерные фазовые траектории, даже в случае коротких и нестационарных данных, а по виду геометрических структур можно проследить эволюцию во времени выбранного процесса.

Поскольку РД являются графическим инструментом, то можно выявить ряд основных структур, отвечающих за тот или иной характер развития системы. Еще в своей первой работе по РД Экманом [9] были выделены два основных класса структур:

- топология
- текстура

Топология отвечает крупномасштабным структурам на диаграммах и подразделяется на следующие подвиды:

1. Характеристические времена (времена релаксации) малы в отношении длины ряда (то есть по сравнению с интервалом времени, задействованном в построении РД). Пример такой топологии (Рис. 5.2).

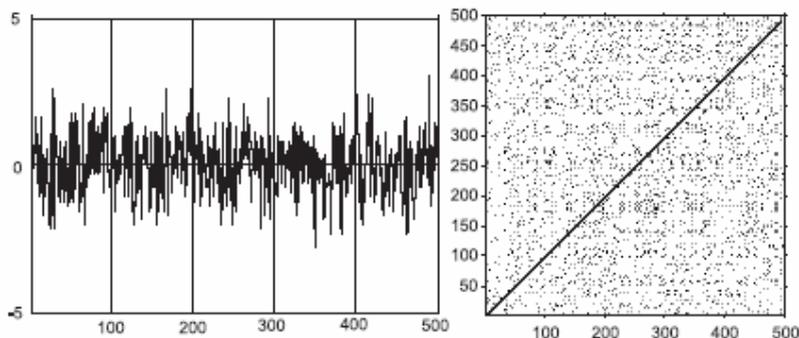


Рисунок 5.2 Структура РД в случае однородной топологии

2. Дрейф

- характерен для динамических систем, не обладающих однородностью, но содержащих адиабатически (медленно) меняющиеся параметры. На рекуррентном графике данный факт отмечается характерным изменением яркости изображения от нижнего правого и верхнего левого углов (Рис. 5.3).

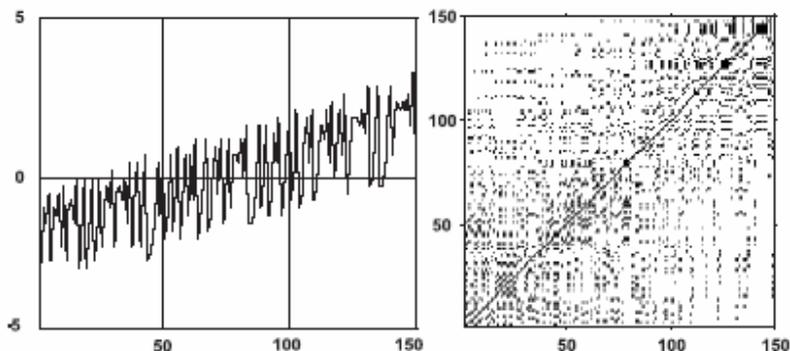


Рисунок 5.3 Топология дрейфа для логистического отображения

3. Осциллирующие системы на РД отображаются через диагонально ориентированные, периодические структуры – диагональные линии и структуры, напоминающие шахматную доску, которые для наглядности выделены другим цветом на нижеследующей иллюстрации (Рис. 5.4).

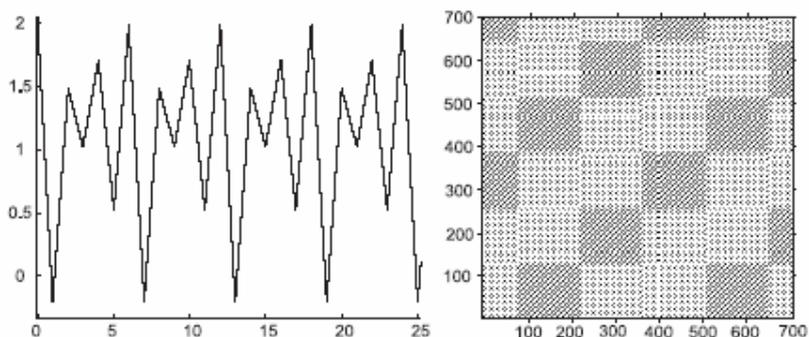


Рисунок 5.4 Топология рекуррентности в случае осциллирующего поведения структуры

Данная структура получена для отображения вида $X[n+1] = \alpha + X[n] - \alpha X^2[n]$, которое при $\alpha = 1,7289$ демонстрирует периодичность равную шести, что можно выявить и на рекуррентном графике, кроме того, временной масштаб циклических структур отвечает периоду процесса.

4. Контрастная топология

- характеризует резкие изменения динамики процесса, нестационарность, вследствие чего появляются характерно выраженные белые зоны в структуре рекуррентного графика (Рис. 5.5).

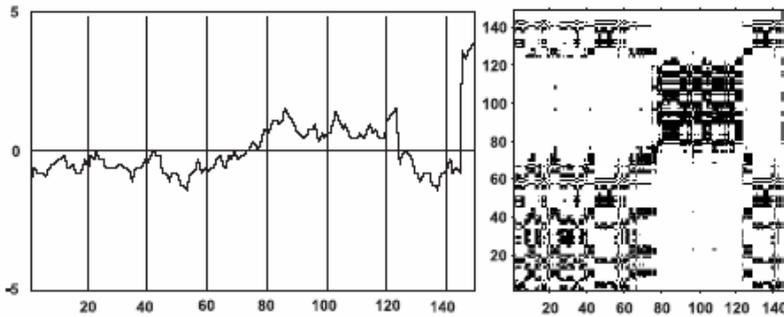


Рисунок 5.5 Контрастная топология разрывного броуновского движения

Основываясь на частоте рекуррентности таких экстремальных и редких событий, по диаграмме можно отследить и оценить их.

Геометрические структуры РД, относящихся к классу текстур, характеризуются малыми масштабами. К ним относятся:

1. Отдельные точки в структуре РД характеризуют «редкие состояния», непродолжительно существующие во времени или если они подвержены сильным флуктуациям. Если диаграмма полностью состоит из отдельных точек, то процесс является случайным (Рис. 5.2).

2. Диагональные линии

-математически определяются следующим образом:

$$R_{i+k, j+k} = l, k = 1, \dots, l, \quad (5.7)$$

где l - длина диагональной линии.

Такая текстура соответствует ситуации, когда некая часть фазовой траектории пролегает параллельно другой. Другими словами, рассматриваемая траектория повторяет саму себя, проходя по одной и той же области фазового пространства в различные отрезки времени. Характер диагональной линии определяет эволюцию процесса. Так длина ее соответствует временному масштабу локальной близости участков траектории, а наклон временному разнесению, направлению последовательности состояний данных участков временного ряда и характеризует внутреннее время данных подпроцессов. Если диагональные линии параллельны главной диагонали, значит части траектории параллельны друг другу данных частей траектории (Рис. 5.4).

Если же они перпендикулярны главной диагонали, то направление их развития противоположно (то есть один из подпроцессов будто отражен в зеркале). Однако нерегулярное

проявление диагональных линий характеризует хаотический процесс (Рис.5.6).

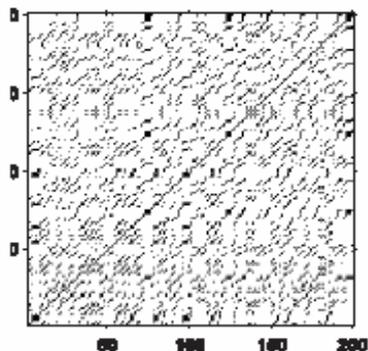


Рисунок 5.6 Текстура рекуррентности в случае хаотического поведения системы

3. Вертикальные (и горизонтальные) линии и их скопления:

$$R_{i,j+k} = 1, k = 1, \dots, \nu, \quad (5.8)$$

где ν - длина горизонтальной линии.

- соответствуют интервалам времени, в течении которых состояние системы не меняется или меняется, но очень незначительно, будто система остается замороженной на некоторое время, другими словами ламинарность (Рис. 5.7).

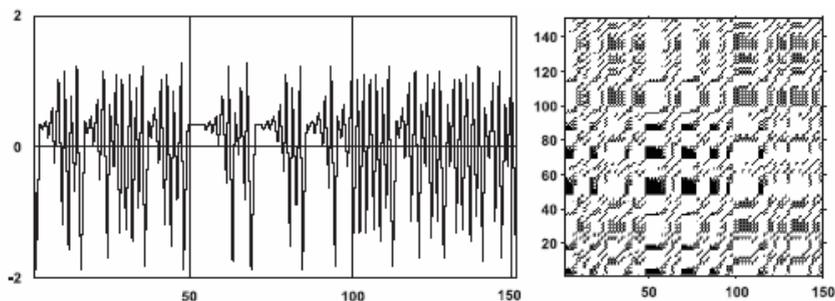


Рисунок 5.7 Ламинарный характер поведения системы

Кроме того, нерегулярное появление черных зон, соответствующих скоплениям вертикальных и горизонтальных линий, а также белых зон, указывает на нерегулярность процесса, который может означать, например, коррелированность шумов (Рис. 5.5).

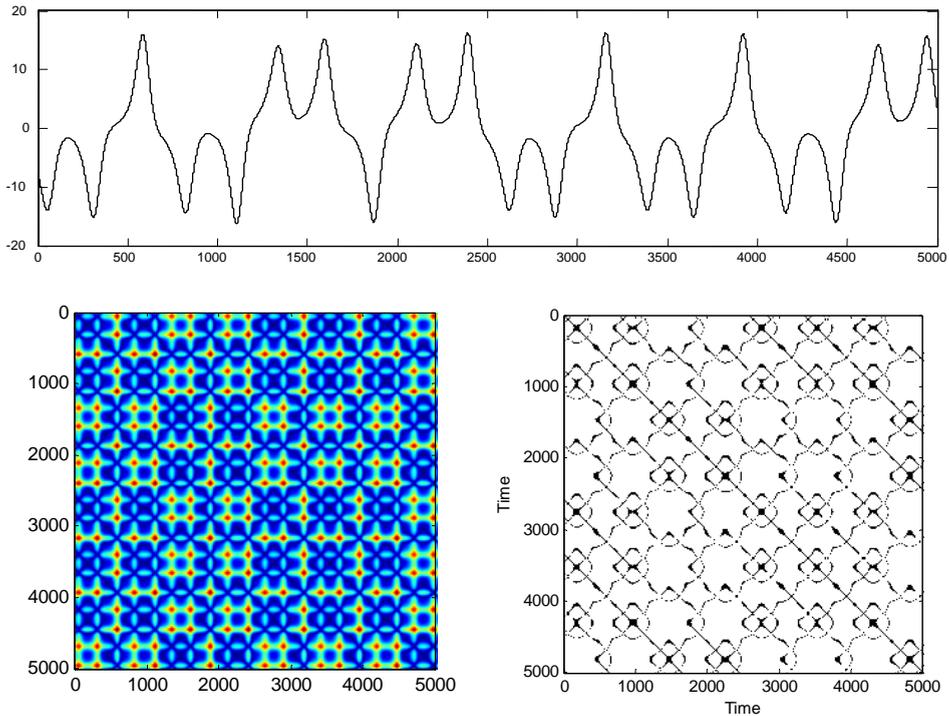
В общем случае линейные структуры РД представляют собой локальную временную связь между текущими сегментами траектории.

Кроме того, стоит добавить, что, несмотря на предложенную довольно четкую классификацию, в реальных данных всегда присутствует шум, зачастую столь значительный, что анализ картины РД требует определенного опыта и приобретает уже оттенок искусства.

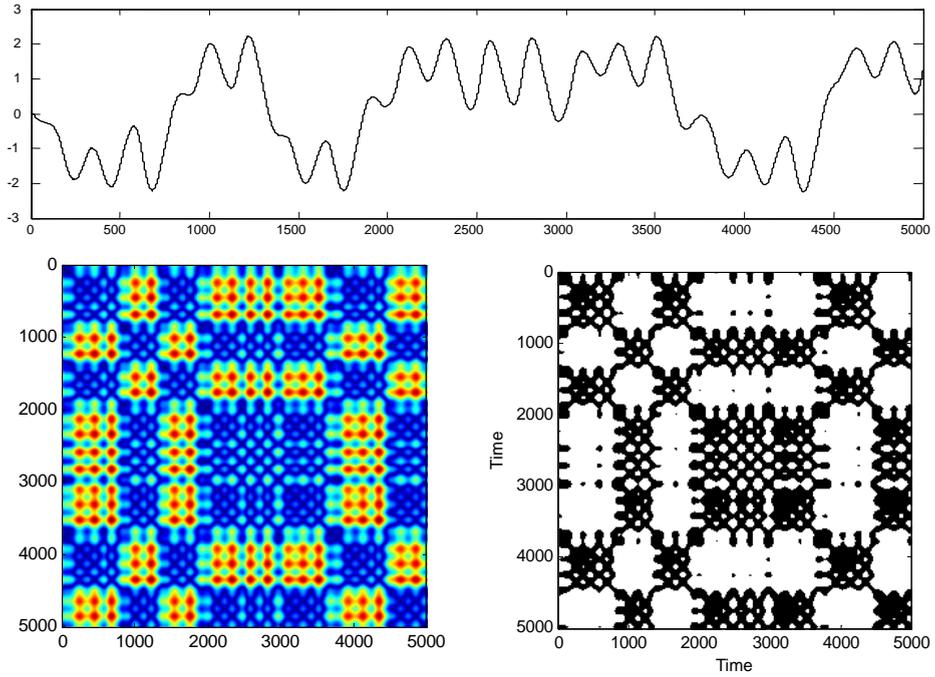
5.4. Галерея рекуррентных диаграмм хаотических систем

На рис. 5.6 представлены визуальные образы различных хаотических систем состоящих из временных рядов, матриц расстояний (Евклидова норма) и РД построенных авторами в программной среде МАТЛАБ. Фрагменты временных рядов использованных для обработки хаотических систем взяты из [14].

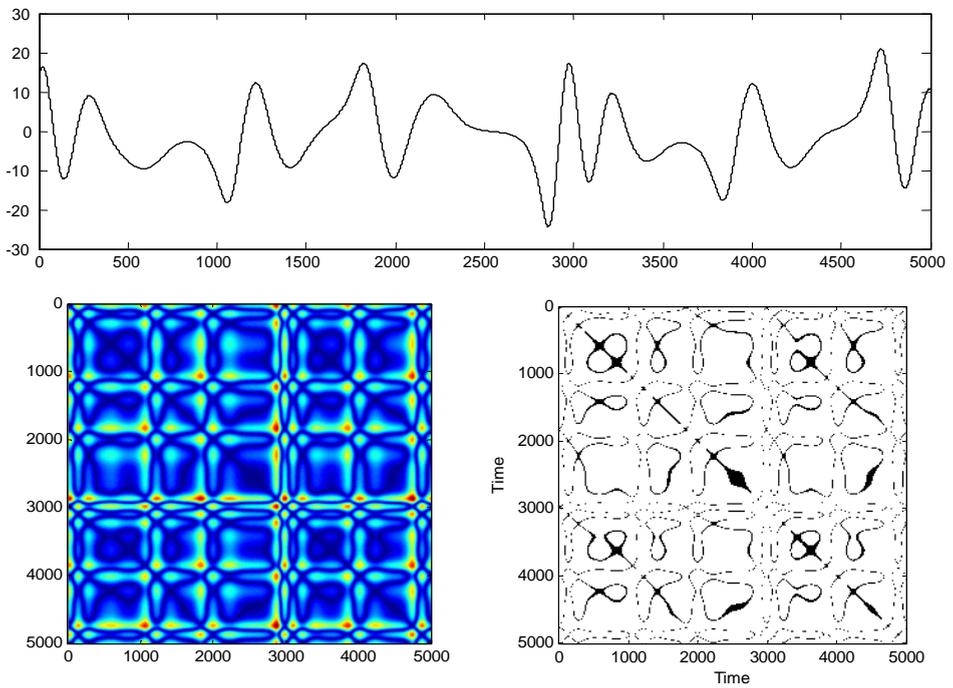
Lorenz attractor



Chua's circuit

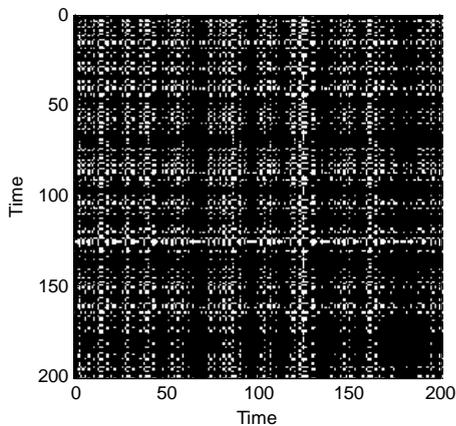
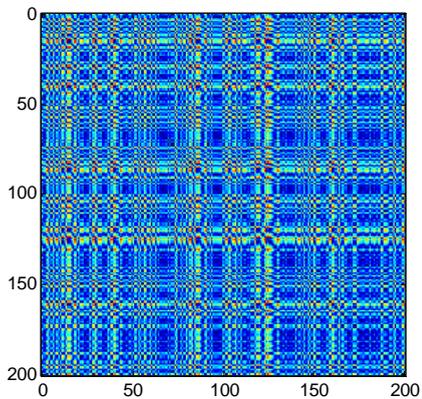
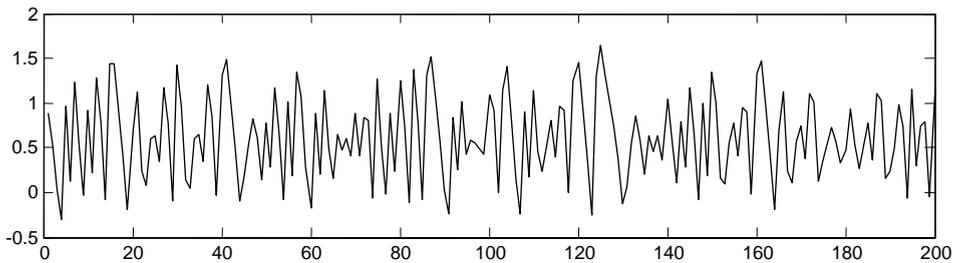


Chen's system

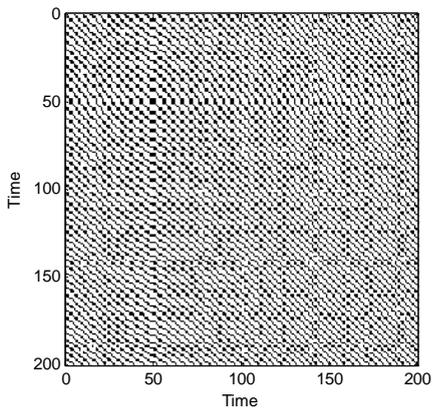
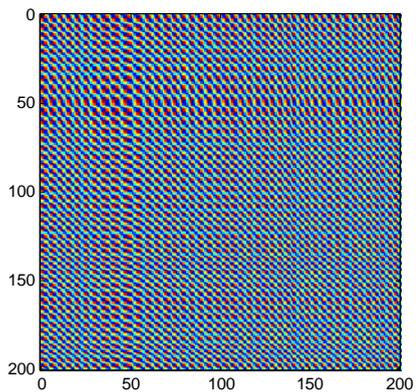
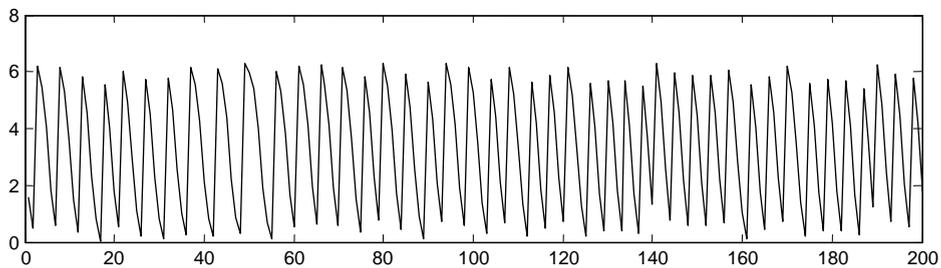


180

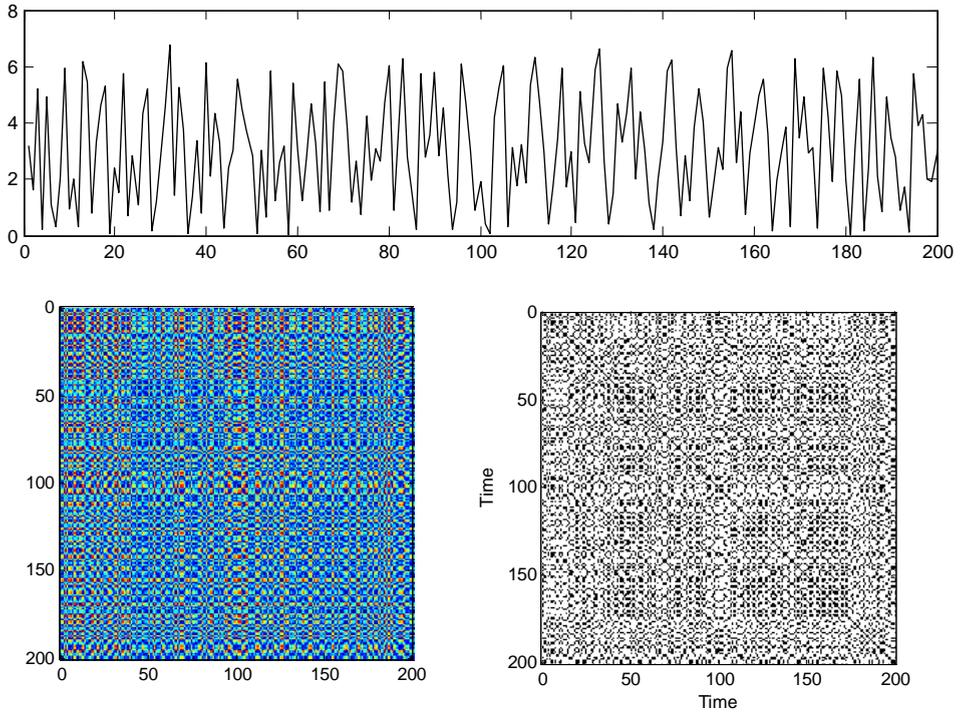
Ikeda map



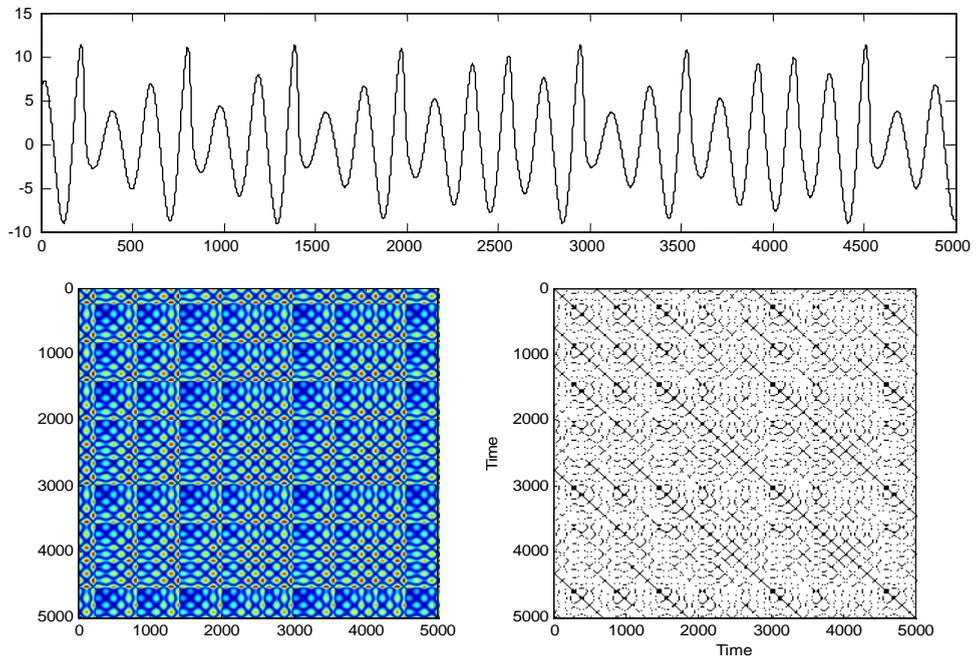
Chirikov (standard) map



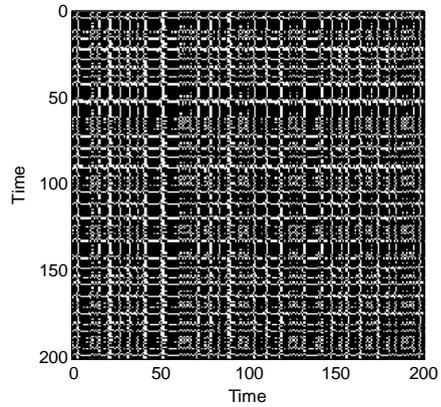
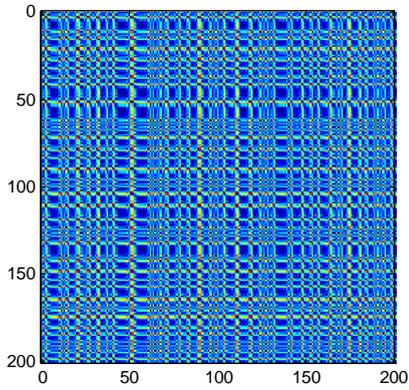
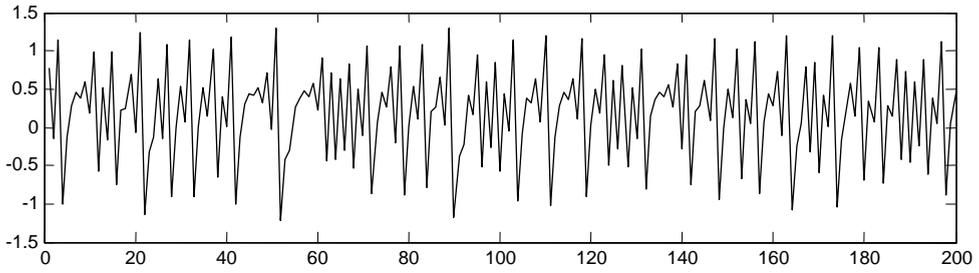
Chaotic web map



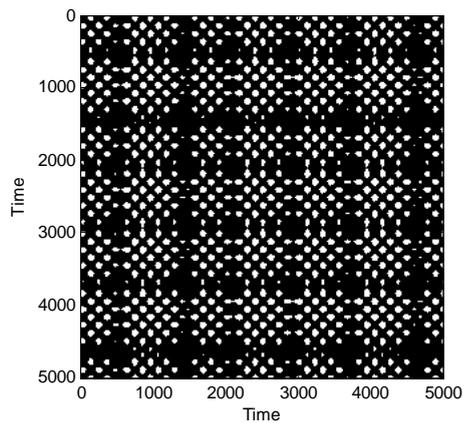
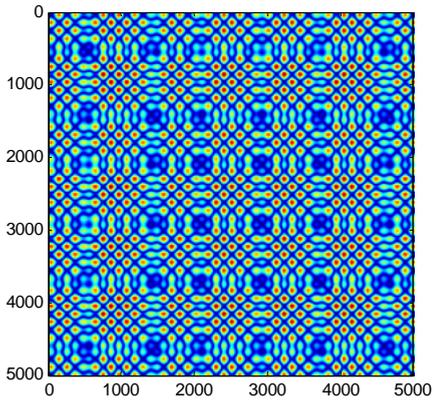
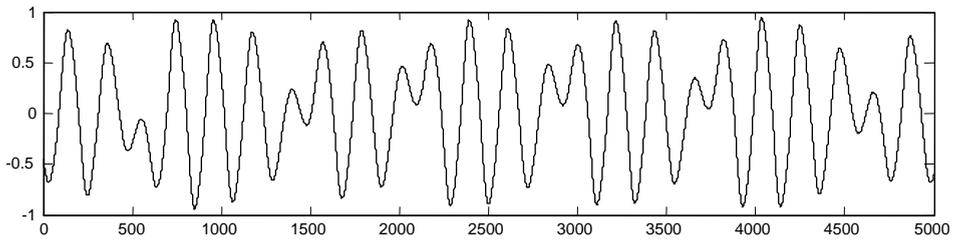
Ressler attractor



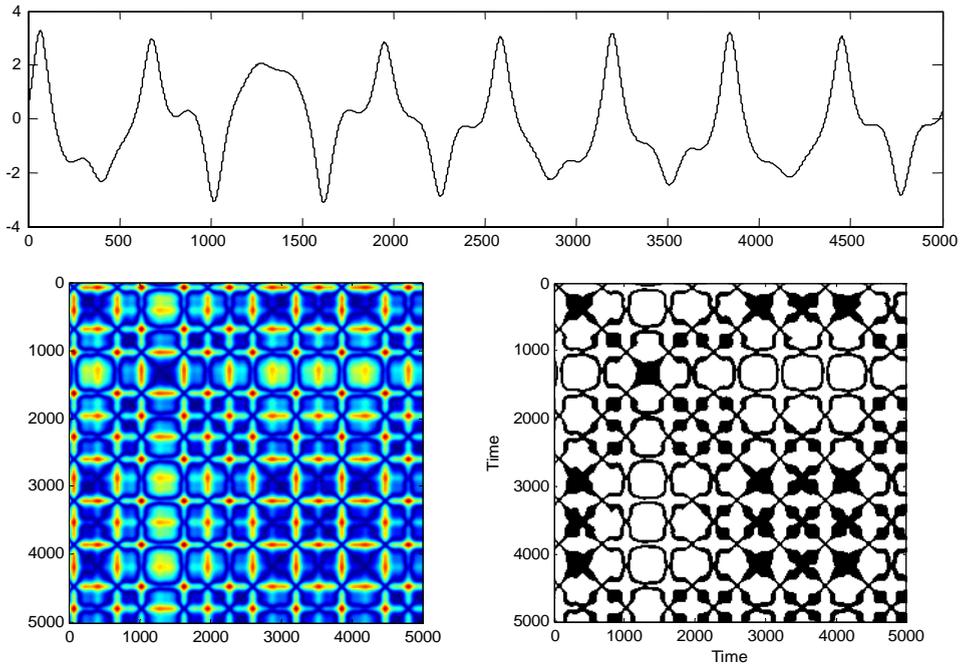
Lozi map



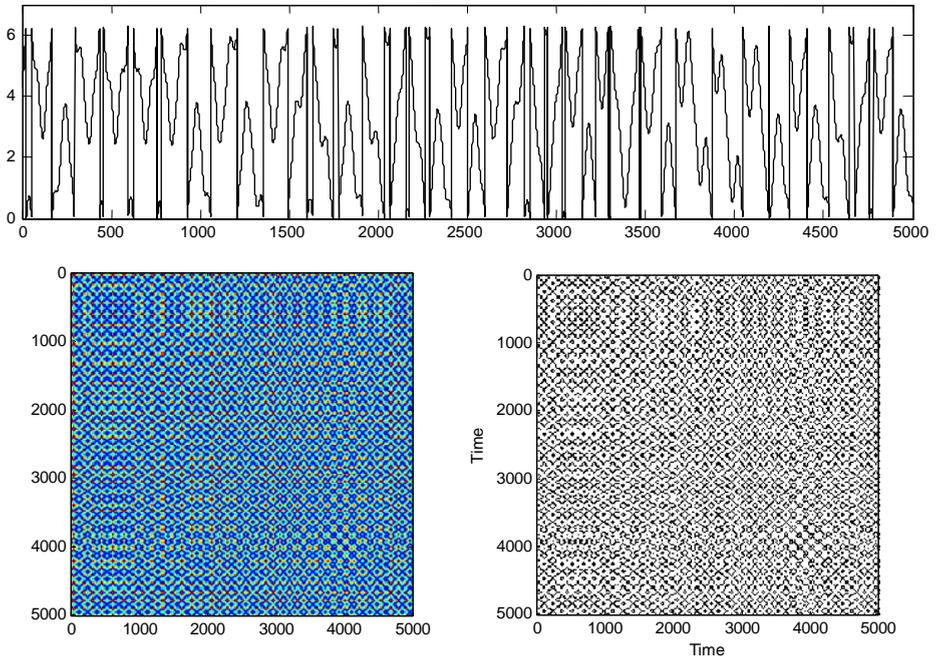
Duffing-van der Pol oscillator



Ueda oscillator



Labyrinth chaos



Dissipative standard map

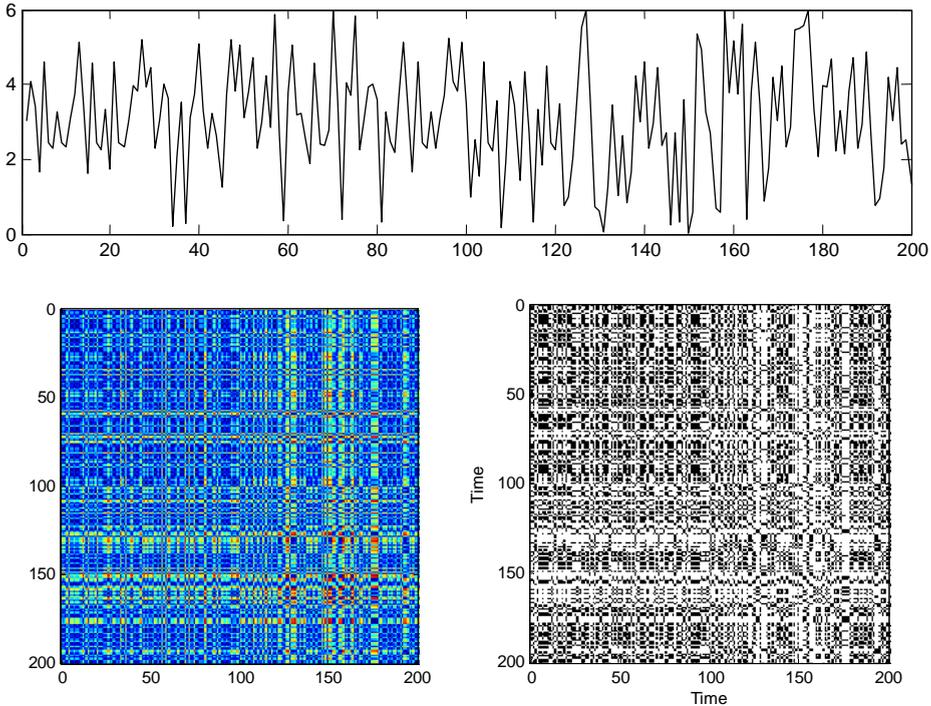


Рисунок 5.6 Визуальные образы различных хаотических систем.

Для репрезентативного анализа РД, наряду с идентификацией их по таким признакам как топология и текстура, необходимо использовать также количественные характеристики признаков.

В работе рассматривается подход, основанный на анализе РД по двум множествам признаков – основным и дополнительным. К основным будем относить фрактальную (ляпуновскую) размерность Каплана – Йорке D_{KY} , ляпуновскую размерность L и корреляционную размерность $C(\varepsilon)$ [14], представленные в таблице 5.1.

К дополнительным количественным признакам следует отнести, разработанный авторами [4] инструментарий вычисления мер сложности структур РД, использующих плотность рекуррентных точек и диагональных структур.

Таблица 5.1

Системы	Ляпуновская экспонента, L	$C(\varepsilon)$	D_{KY}
Аттрактор Лоренца	0,9714,0,-14.943	2.068±0.086	2.062
Аттрактор Ресслера	0.0714,0,-5.3943	1.991±0.065	2.013
Чирикова отображение	0.10497,0,-0.10497	1.954±0.77	2.000
Аттрактор Уеда	0.1034,0,-0.1534	2.675±0.132	2.674
Аттрактор Чена	2.0311,0,-12.0305		2.172
Аттрактор Чуа	0.3271,0,-2.5197		
Аттрактор Икеды	0.503,-0.719		1,197
Хенона отображение	0.41922,0,-1.62319	1.220±0.036	1,258
Лози отображение	0.4721,0,-1.1552	1.38±0.05	1,404
Логистическое отображение	0.69314	1.0	1.000

5.5. Количественный анализ рекуррентных диаграмм (recurrence quantification analysis, RQA)

Ряд исследований показал, что эти меры могут использоваться для выявления точек бифуркации и переходов хаос – порядок.

Позднее были предложены меры, использующие плотность вертикальных структур, позволявшие выявлять переходы хаос – хаос и нечувствительные к стационарности и длине исследуемых рядов.

Для вычисления мер используются РД, построенные с фиксированным значением порога ε .

Мера рекуррентности (recurrence rate, RR)

$$RR = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{i,j}^{m,\varepsilon} \quad (5.9)$$

показывает плотность рекуррентных точек, просто подсчитывая их, включая LOI в пределе

$$P_0 = \lim \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N R_{i,j}^{m,\varepsilon}$$

Данная мера показывает вероятность нахождения рекуррентной точки в РД (вероятность повторения состояния).

Следующая мера рассматривает диагональные линии. Частотное распределение длин l диагональных линий в RP $P^\varepsilon(l) = \{l_i; i = 1 \dots N_l\}$,

где N_l - абсолютное количество диагональных линий (каждая линия считается только один раз). Процессы со стохастическим поведением могут порождать очень короткие диагонали либо вообще не порождать их, в то время как детерминистские процессы дают длинные диагонали и малое количество отдельных рекуррентных точек. Таким образом, отношение рекуррентных точек

$$DET = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N l P^\varepsilon(l)}{\sum_{i,j}^N R_{i,j}^{m,\varepsilon}} \quad (5.10)$$

называется мерой детерминизма (determinism, DET) или предсказуемости системы. Следует отметить, что эта мера не имеет значения реального детерминизма процесса. Пороговое значение l_{min} исключает диагональные линии, образованные тангенциальным движением траектории в фазовом пространстве. При $l_{min} = 1$ $DET = RR$.

Диагональные структуры показывают время, в течение которого участок траектории подходит достаточно близко к другому участку траектории. Таким образом, эти линии позволяют судить о расхождении элементов траектории. Средняя длина диагональных линий

$$L = \frac{\sum_{l=l_{min}}^N l P^\varepsilon(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P^\varepsilon(l)} \quad (5.11)$$

- это среднее время, в течение которого два участка траектории проходят близко один к другому, и может рассматриваться как среднее время предсказуемости. В RQA, однако, используется максимальная длина диагональных структур, либо ее инверсия – дивергенция (divergence, DIV):

$$L_{max} = \max\{l_i; i = 1, \dots, N_l\}, \quad DIV = \frac{1}{L_{max}}. \quad (5.12)$$

Установлено, что длины диагональных линий соотносятся с наибольшим положительным показателем Ляпунова, если он существует для рассматриваемой системы [2]. Разными авторами были предложены методы оценки максимального положительного показателя Ляпунова с использованием длин диагональных линий.

Мера энтропии (entropy, ENTR) соотносится с энтропией Шеннона (Shannon) частотного распределения длин диагональных линий

$$ENTR = - \sum_{l=l_{min}}^N p(l) \ln p(l), \quad \text{где } p(l) = \frac{P^\varepsilon(l)}{\sum_{l=l_{min}}^N P^\varepsilon(l)}$$

(5.13)

и отражает сложность детерминистской составляющей в системе.

Тренд (trend. TREND) – мера, представляющая линейный коэффициент убывания частной плотности рекуррентных точек RR, диагоналей, параллельных к LOL, как функцию времени (расстояния) между этими диагоналями и LOI

$$TREND = \frac{\sum_{i=1}^{\tilde{N}} (i - \tilde{N}/2) (RR_i - \langle RR_i \rangle)}{\sum_{i=1}^{\tilde{N}} (i - \tilde{N}/2)^2}. \quad (5.14)$$

Тренд характеризует нестационарность процесса, особенно – дрейф. Выражение исключает границы RP ($\tilde{N} < N$). Выбор значения \tilde{N} зависит от изучаемого процесса.

Рассмотрим точку траектории \mathbf{x}_i и множество ассоциированных с ней рекуррентных точек $R_i = \{\mathbf{x}_j : R_{i,j} = 1; j \in [1 \dots N]\}$. Определим подмножество этих рекуррентных точек

$r_i = \{\mathbf{x}_k \in R_i : (R_{i,k} \cdot R_{i,k+1}) + (R_{i,k} \cdot R_{i,k-1}) > 0; 1 \in [1 \dots N]; R_{j,0} = R_{i,N+1} = 0\}$, которое содержит рекуррентные точки, формирующие вертикальные линии на RP в колонке $j \{\mathbf{x}_j \notin s_i; \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_{j+v} \in s_i; \mathbf{x}_{j+v-1} \in s_i\}$.

Обозначим $P_i(v) = \{v_k; k = 1, 2, \dots, K\}$ множество длин присутствующих в s_i подмножеств, и из выражения $\bigcup_{i=1}^N P_i(v)$ определяем распределение длин вертикальных линий $P^\varepsilon(v)$ для всего RP в целом.

Мера замирания (laminarity, LAM)

$$LAM = \frac{\sum_{v=v_{min}}^{\tilde{N}} v P^\varepsilon(v)}{\sum_{i,j}^N R_{i,j}^{m,\varepsilon}} \quad (5.15)$$

определяется отношением количества рекуррентных точек, образующих вертикальные линии, к общему количеству рекуррентных точек. LAM характеризует наличие состояний замирания системы (т.е. когда движение системы по фазовой траектории останавливается или продвигается очень медленно). Средняя длина вертикальных структур

$$TT = \frac{\sum_{v=v_{min}}^{\tilde{N}} v P^\varepsilon(v)}{\sum_{i,j}^N P^\varepsilon(v)} \quad (5.16)$$

называется *мерой времени остановки (trapping time, TT)* и характеризует среднее время, которое система может провести в определенном состоянии.

Мера максимальной длины вертикальных структур

$$V_{max} = \max(\{v_k; k = 1 \dots K\}) \quad (5.17)$$

аналогична мере максимальной длины диагональных структур.

Подробнее меры, основанные на анализе вертикальных структур, рассмотрены в [6].

Выводы

В пятой главе рассмотрены вопросы нелинейного рекуррентного анализа, предложенного Экманом и Марваном. Нелинейный рекуррентный анализ позволяет визуально исследовать поведение хаотических временных рядов.

В работе рассматривается подход, основанный на анализе РД по двум множествам признаков – основным – фрактальная (ляпуновская размерность) размерность Каплана – Йорке, D_{KY} , ляпуновская размерность L и корреляционная размерность $C(\varepsilon)$. К дополнительным относится, разработанный Экманом и Марваном инструментарий вычисления мер сложности структур РД.

Литература

1. Packard N.H., Crutchfield J.P., Farmer J.D., Shaw R.S. Geometry from a time series. //Phys. Rev. Lett., 45, p. 712-716, 1980.
2. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. //Vol. 898 of Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, p. 366-381, 1981.
3. Schreiber T. Interdisciplinary application of nonlinear time series methods, //Phys. Reports, 308, p. 1-64, 1999.
4. March T.K., Chapman S.C., Dendy R.O. Recurrence plot statistics and the effect of embedding, //Physica D, 200, p. 171-184, 2005.
5. Zbilut J.P., Webber Jr. C.L. Embeddings and delays as derived from quantification of recurrence plots. //Phys. Lett. A, 171, p. 199-203, 1992.
6. Zbilut J.P., Zaldivar – Comenges J.-M., Strozzi F. Recurrence quantification based Liapunov exponent for monitoring divergence in experimental data. //Phys. Lett. A, 207, p. 173-181, 2002.
7. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. //Эдиториал УРСС, Москва, 2000.
8. Norbert Marwan, M. Carmen Romano, Marco Thiel, Jurgen Kurths. Recurrence plots for the analysis of complex systems. Physics Reports. 438. 2007.-p. 237-239.

9. Eckmann J.-P., Kamphorst O., Ruelle D. Recurrence plots of dynamical systems. //Europhys. Lett., 4, p. 973-977, 1987.

10. Marwan N. Encounters with neighbours (current developments of concepts based on recurrence plots and their applications). //PhD Thesis, University of Potsdam, 2003.

11. Zbilut J.P., Koebbe M., Loeb H., Mayer-Kress G. Use of recurrence plots in the analysis of heart beat intervals. //In: Proc. IEEE Conference on Computers in Cardiology Chicago, p. 263-266, 1991.

12. Zbilut J.P., Webber Jr., C.L. Detecting deterministic signals in exceptionally noisy environments using cross – recurrence quantification. //Phys. Lett. A, 246, p. 122-128, 1998.

13. Sprott J.C., G. Rowlands Improved correlation dimensions calculation. Int. Journ. of Bifurcation and Chaos. Vol.11, №7 (2001) pp.1865-1880.

14. Владимирский Э.И., Тагиев Ф.К. Синергетический подход к формированию интегральных размерностей в интеллектуальных информационно-измерительных системах. Информационные технологии. №6 (166). 2010. – с. 62-67.

ГЛАВА 6. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА, УПРАВЛЕНИЯ И СИНХРОНИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В настоящей главе примеры реализации различных задач будут рассматриваться в двух направлениях:

- к *первому* направлению будут относиться примеры визуализации фазовых траекторий в контексте анализа хаотических систем;

- ко *второму* направлению – примеры визуализации фазовых траекторий в задачах управления и синхронизации.

Как уже отмечалось, главным инструментом (преимуществом) рекуррентных диаграмм является способность визуализировать многомерные фазовые траектории, даже в случае коротких и нестационарных данных, а по виду геометрических структур можно проследить эволюцию во времени выбранного (исследуемого) процесса.

Двадцатилетний период использования парадигмы нелинейного рекуррентного анализа ознаменовался бумом публикаций за рубежом, тематика которых затронула такие области как хаотические системы, экономику, медицину, климатологию, социальные аспекты.

Необходимо отметить, что большинство работ выполнены на высоком профессиональном уровне, что катализирует процессы актуальности и перспективности рассматриваемой проблемы.

Однако вызывает сожаление факт отсутствия публикаций по вопросам использования визуализации для управления хаотическими системами. Заполнение этой ниши стимулировало бы работы в данном направлении и дополнило бы существующие методы управления хаотическими системами.

6.1 Анализ и синхронизация фазовых траекторий хаотических систем

В 1987 году J.-P. Eckmann, S. Oliffson Kamphorst and D. Ruelle предложили новый графический метод оценки типовых постоянных, характеризующих динамические системы.

Используя временные ряды, характеризующие динамические системы, были определены такие параметры как информационная размерность, энтропия, ляпуновская экспонента, корреляционная размерность и др. Таким образом, в предлагаемой работе [1] был продемонстрирован новый диагностический инструмент, называемый

рекуррентной диаграммой (recurrence plot), который позволяет проанализировать как топологию, так и текстуру динамического процесса, что раньше было невозможно визуально осуществить. Алгоритм нового инструментария отражен в Главе 5, а примеры рекуррентных диаграмм из этой работы представлены на рис. 6.1

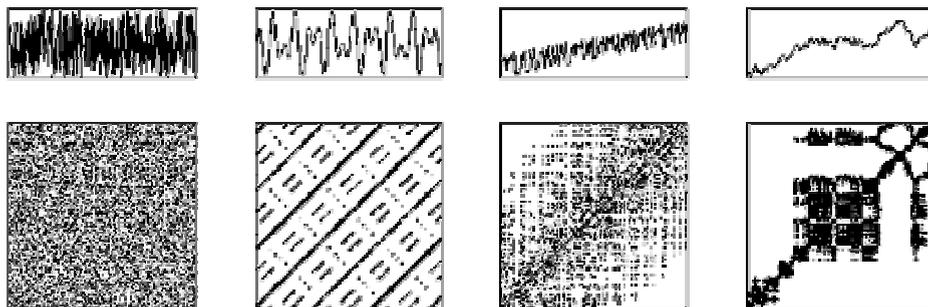


Рисунок 6.1 Примеры построения рекуррентных диаграмм [1].

6.2. Обзор состояния проблемы

Практическая реализация проблемы отображения информационных потоков на междисциплинарном уровне представлена ниже:

Климатология. Порядка через двадцать лет появилась работа российских климатологов Понявина Д.И. и Золотовой Н.В. [2], в которой был использован новый инструментарий [1] для анализа температурных процессов в центральной Англии, Стокгольме (Швеция) и Санкт-Петербурге. Были получены средние температурные данные для изучения синхронизации между климатическими изменениями Северного и Южного полушарий.

Рассмотренное выше иллюстрируется рекуррентными диаграммами, представленными на рис. 6.2 и 6.3.

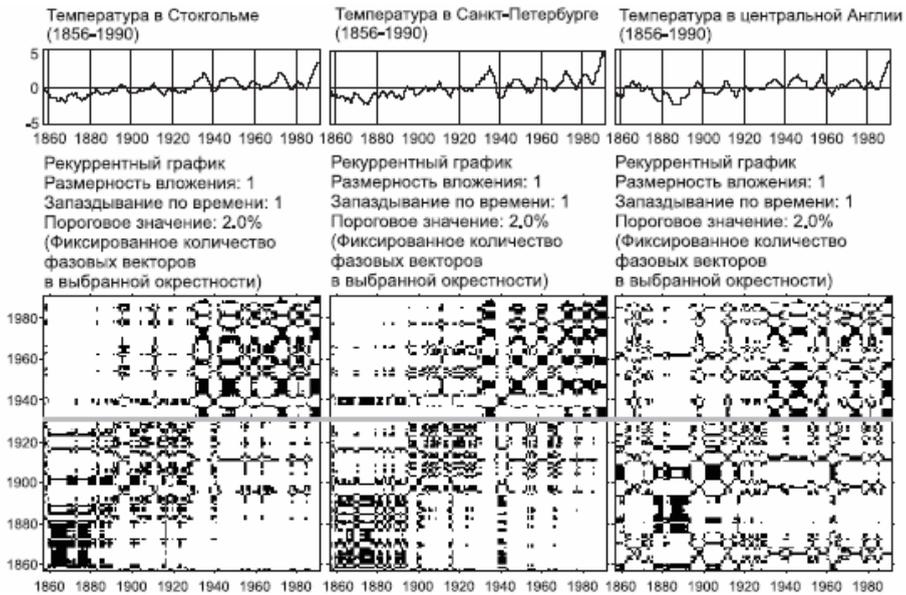


Рисунок 6.2 Анализ температурных процессов в центральной Англии, Стокгольме (Швеция) и Санкт-Петербурге.

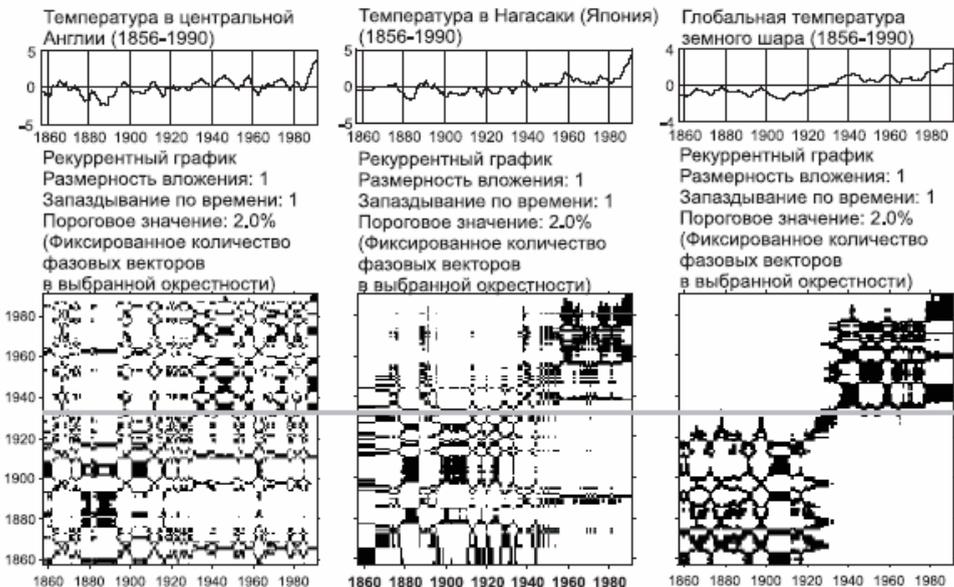


Рисунок 6.2 Анализ температурных процессов Англии, Японии и глобальной температуры земного шара.

В [2] был представлен новый подход к выявлению и анализу рассогласования пятнообразования между северным и южными

полушариями Солнца Основной акцент сделан на исследование фазовой асимметрии пятновобразования в полушариях. Предложен сценарий развития солнечной активности в случае больших фазовых переходов.

Синхронизация процессов. Заслуживает внимания работа Золотовой Н.В. и Понявина Д.И. [3], в которой предлагается методика распознавания неустойчивой и отложенной во времени синхронизации. В целях реализации задачи были последовательно применены два графических метода: нелинейный рекуррентный анализ временных рядов [1] и метод, основанный на преобразовании Хафа [4], для идентификации границ управления и потери связи между системами (рис. 6.3). Такой метод может быть применен и к реальным экспериментальным рядам, когда исследователь не имеет доступа к параметрам и связям рассматриваемых систем.

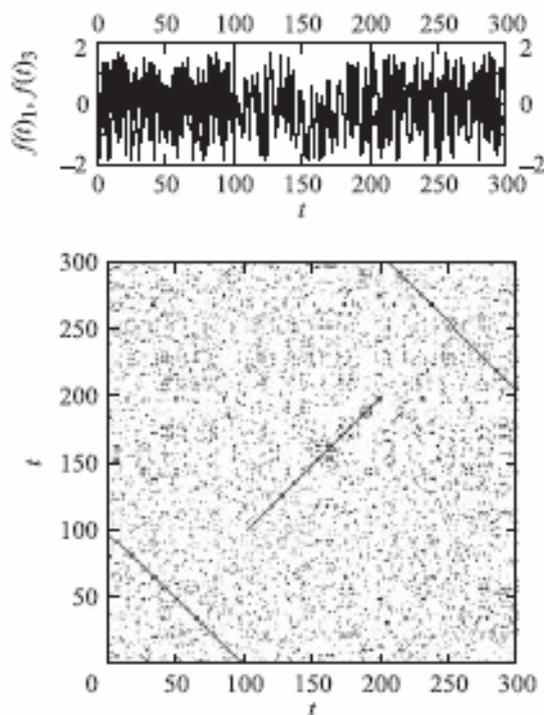


Рисунок 6.3 К выявлению синхронизации временных рядов.

В Украине применению метода нелинейного рекуррентного анализа [1] посвящена работа [5], в которой проиллюстрирован метод реконструкции фазового портрета исследуемого процесса на основе одиночного временного ряда наблюдения, метод построения рекуррентных диаграмм. Данный метод анализа, основанный на

представлении свойств процессов в виде геометрических структур, может служить инструментом для обнаружения зависимостей в наблюдаемых процессах и являться одним из критериев оценки скрытости телекоммуникационных систем.

В 2007 году вышел фундаментальный труд Норберта Марвана (Norbert Marvan), в котором новый инструментарий – нелинейный рекуррентный анализ был отмечен в применении к таким направлениям как процессы синхронизации в хаотических системах, взаимодействие информационных потоков. В [6] предложено исследование процессов фазовой синхронизации на примере двух связанных осцилляторов Ресслера. На рис. 6.4 показана СРД энтропии Реньи для двух связанных осцилляторов Ресслера.

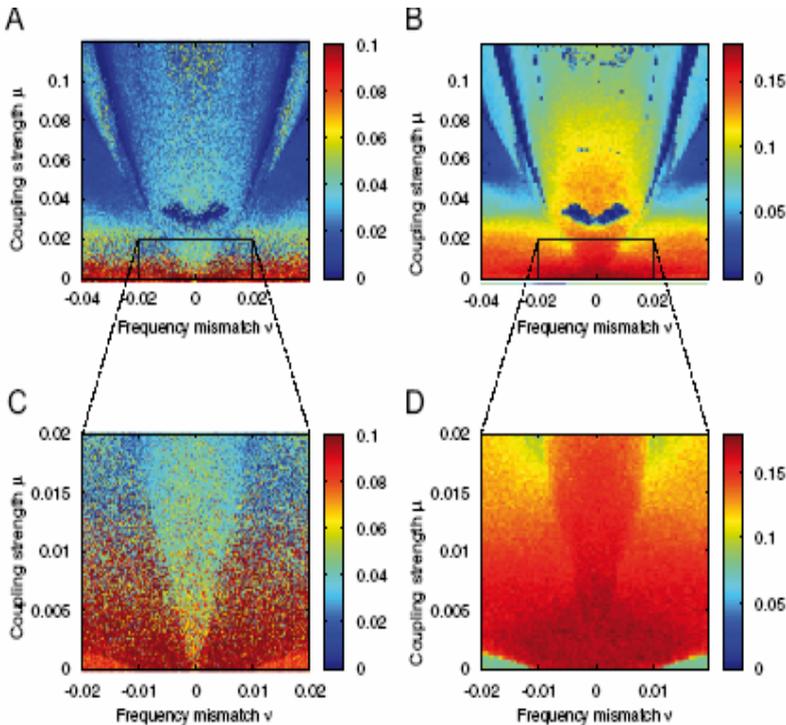


Рисунок 6.4 А – оценка СРД энтропии Реньи двух связанных осцилляторов Ресслера относительно несовпадения частот ν и параметра связи μ ; В – сумма положительных ляпуновских экспонент двух связанных осцилляторов Ресслера относительно несовпадения частот ν и параметра связи μ ; С и D – масштабы СРД энтропии Реньи и суммы ляпуновских экспонент.

На рисунке 6.5 продемонстрировано частотное отображение процесса фазовой синхронизации.

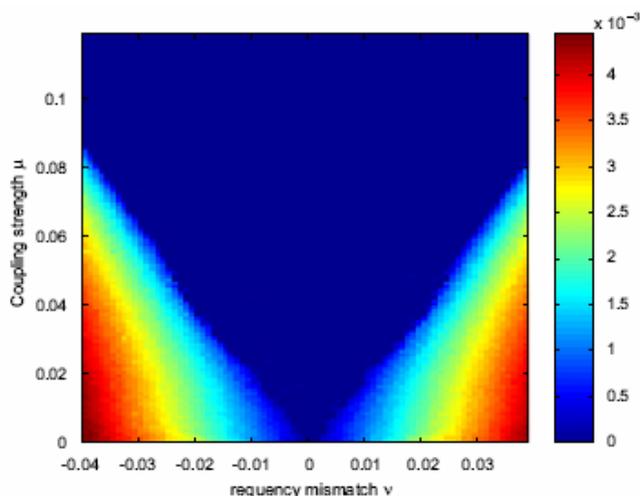


Рисунок 6.5 Разность $\Delta\Omega$ между средней частотой двух связанных осцилляторов Ресслера относительно несовпадения частот ν и параметра связи μ .

Сети. Наряду с [5] появилась работа [7], в которой предлагается новая парадигма – рассматривать рекуррентную сеть как нелинейный анализ временных рядов. В работе демонстрируются фундаментальные решения между топологическими свойствами рекуррентных сетей и статистическими свойствами фазовых структур динамических систем. Следовательно, описание сетей количественными характеристиками, внесет существенное дополнение к оценке рекуррентного анализа. В [7] продемонстрированы глобальные свойства сетей на примерах иллюстрированных Рисунках 6.6 и 6.7.

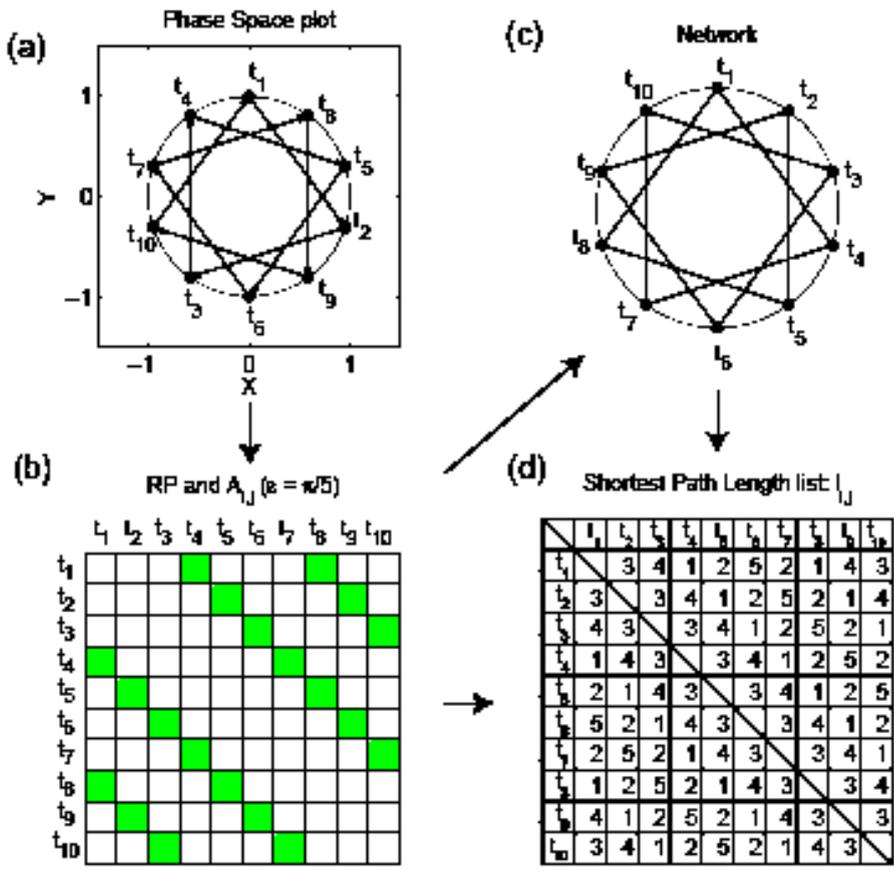


Рисунок 6.6 а – периодическая траектория фазового пространства сети; б – рекуррентная диаграмма; с – рекуррентная сеть; д – таблица расстояний между соседними вершинами.

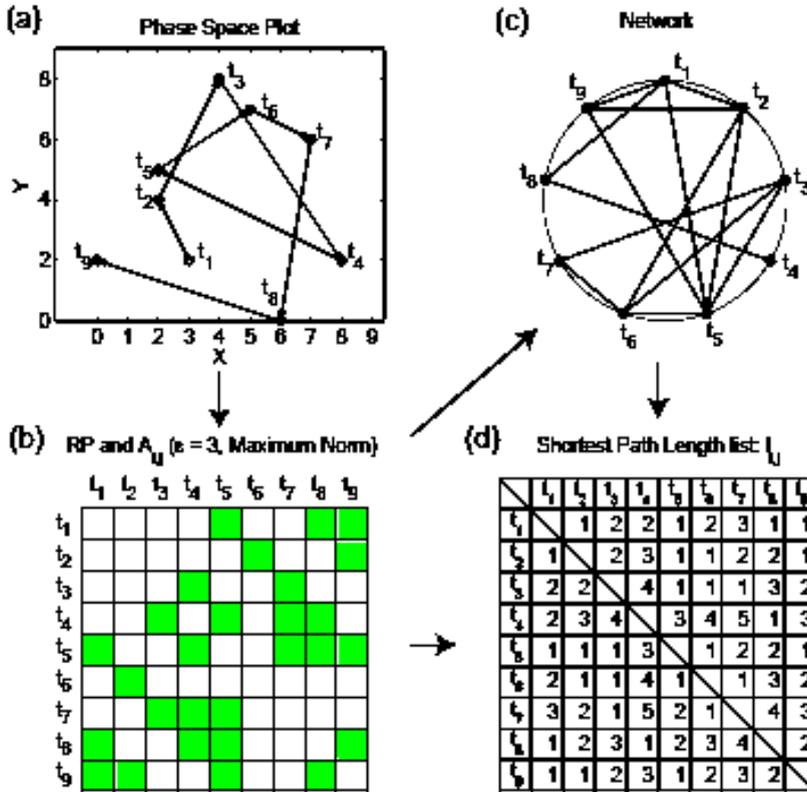


Рисунок 6.7 а – неперIODическая траектория фазового пространства сети; б – рекуррентная диаграмма; с – рекуррентная сеть; д – таблица расстояний между соседними вершинами.

Медицина. В [8] представлена работа, в которой предлагается рассматривать рекуррентные диаграммы как основу для измерения и анализа сложных процессов, таких как сердечно-сосудистая система. Было показано, что наиболее близко для анализа сердечно-сосудистой системы подходит логистическое отображение. Обнаружено, что нормой состояния при переходе хаос-хаос, возможно, является ламинарное состояние, которое имеет место до состояния аритмии сердца. Это позволяет прогнозировать работу сердечно-сосудистой системы.

В [8] проиллюстрированы рекуррентная диаграмма логистического отображения и внешние количественные характеристики диаграммы (рис.6.8).

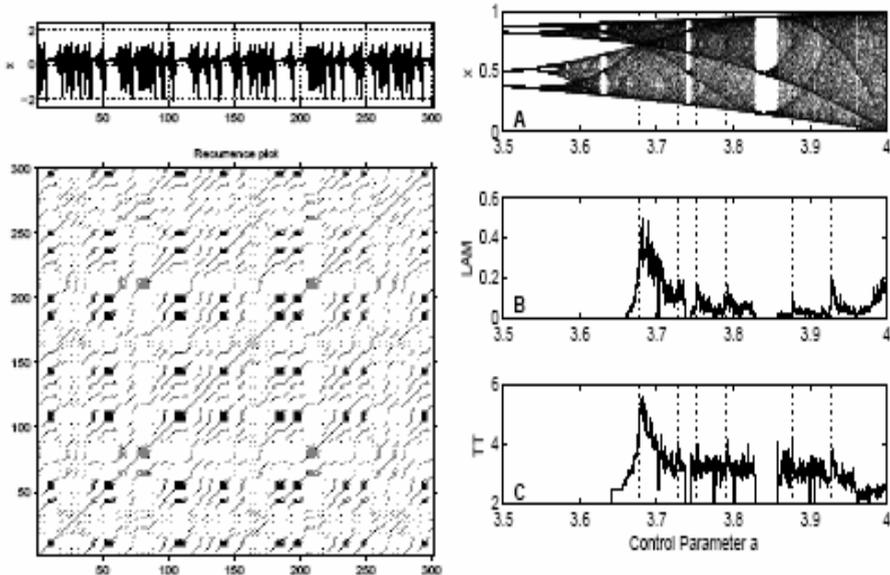


Рис. 6.8 Рекуррентная диаграмма логистического отображения при $\alpha = 3.679$, $m=1$, $r=1$, $\varepsilon = 0.1 \sigma$ (слева); В – процесс замирания системы, С – время остановки системы при вариации параметров логистического отображения А (справа).

Мера замирания (laminarity, LAM), характеризующая наличие замирания системы (т.е. когда движение системы по фазовой траектории останавливается или продвигается очень медленно).

Мера времени остановки (trapping time, TT), характеризующая среднее время, которое система может провести в определенном состоянии.

Экономика. Важное значение в странах, находящихся в едином валютном пространстве, актуализируется проблема синфазности функционирования их экономик. Особую важность приобретает эта проблема, когда отдельные отрасли экономики этих стран тесно кооперируют. Несинхронность взаимодействующих производств, бизнеса некоторых стран сильно влияет на динамику их ВВП и, следовательно, на ценовую политику. В этой связи интересно выглядит комплекс работ Patrick M. Growley [9] по тематике, рассмотренной выше, идеологической основой которых является база нелинейного кросс-рекуррентного анализа [6]. В этих работах, используя критерий квазисинхронизации, было исследовано и показано графически сравнение динамик ВВП между отдельными странами еврозоны (рис. 6.9).

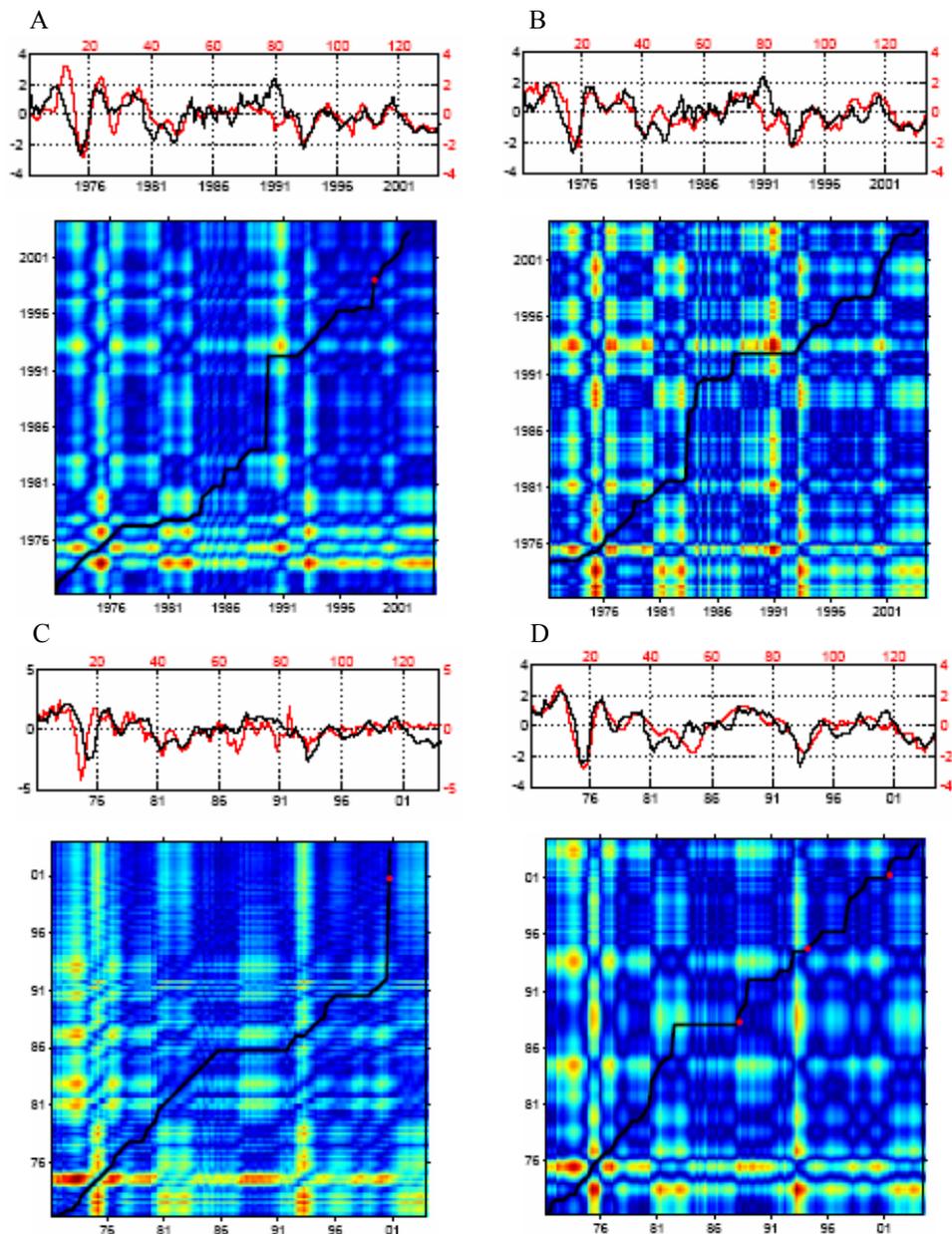


Рисунок 6.9 Иллюстрация синхронности динамик ВВП: А – Италия с Германией; В – Франция с Германией; С – Греция с евро зоной; D – Португалия с евро зоной.

6.3 Примеры анализа и визуализации в задачах управления и синхронизации фазовых траекторий хаотических систем

Проблема предсказуемости поведения хаотических систем, управления их динамикой и возможности подавления хаоса продолжает оставаться важной и актуальной.

Исследования в этой области показали, что хаотические системы чрезвычайно чувствительны к внешним воздействиям, и благодаря этому развивающаяся структура характеризуется возможностью перейти в одно из большого числа допустимых равноправных состояний. Кроме того, как оказалось, для распределенных сред внешнее воздействие при некоторых условиях приводит к рождению сложных пространственно протяженных структур с заданными свойствами.

В этой ситуации возрастает роль управления хаотическими системами в синергетическом аспекте.

Так, управляющее воздействие процессами развития нелинейной системы может быть эффективным тогда и только тогда, когда оно когерентно с внутренними свойствами данной системы, то есть является резонансным.

Необходимо также отметить, что вопросы управления хаосом во взаимодействующих системах непосредственно связаны с задачами управляемой (или принудительной) синхронизации. С помощью целенаправленных воздействий определенные хаотические подмножества, соответствующие синхронным движениям идентичных осцилляторов, можно преобразовать в устойчивые по одним собственным направлениям при сохранении неустойчивости по другим. В результате будет осуществлен управляемый переход от несинхронных хаотических колебаний к режиму полной синхронизации хаоса.

Логическим следствием хаотической синхронизации в автоколебательных процессах является применение этого направления в задачах передачи скрытой информации.

Однако традиционные методы анализа нелинейных процессов требуют значительного объема информации, что естественно, усложняет принятие корректного решения (прогноза).

Фундаментальную перспективу представляет использование метода рекуррентного анализа нелинейных процессов, не предъявляющих особых требований к данным и дающего удовлетворительные результаты, совмещающие в себе визуальные возможности (диаграммы) и мощный численный аппарат (меры).

Нелинейный рекуррентный анализ катализирует реализацию такой важной проблемы как управление динамикой хаотических систем (информационных процессов), то есть посредством достаточно слабых воздействий переводить первоначально хаотические системы на требуемый динамический режим и тем самым стабилизировать их поведение.

Впервые проблеме управления хаотическими системами в контексте использования нелинейного рекуррентного анализа были посвящены работы [10-12]. Так, в [12] предложена структура адаптивной системы «измерение – распознавание – управление», реализующая алгоритм управления хаотическими системами. Структура разработанной системы представлена на рис.6.10.

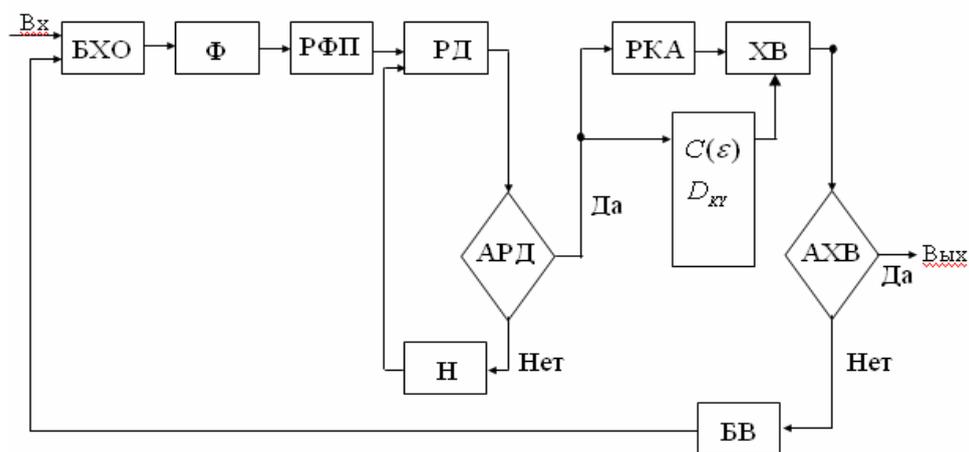


Рисунок 6.10 Структура адаптивной системы.

Структура системы состоит из:

- БХО – блока библиотеки хаотических отображений;
- Ф – блока фильтра;
- РФП - блока реконструкции фазового пространства;
- РД – блока формирования рекуррентных диаграмм;
- РКА – блока количественного анализа рекуррентных диаграмм;
- ХВ – блока формирования характеристического вектора;
- АРД – блока анализа рекуррентных диаграмм;
- АХВ – блока анализа характеристического вектора;
- Н – блока норм (L_1, L_2, L_∞) ;

- Блока определения корреляционного интеграла $C(\varepsilon)$, новой фрактальной размерности Каплана - Йорке D_{KY} и осуществляющего реализацию задач: фильтрации хаотической информации, рекуррентного анализа хаотических процессов и управления хаотическими процессами.

В [12] дана следующая

Постановка задачи. Пусть $\mathbf{x}(t)|_I^N$, $\mathbf{y}(t)|_I^N$ - m -мерные фазовые траектории состояний систем длиной N , $\{\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)\}_I^N \in \mathbf{R}^m$.

Пусть $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ соответствуют временные ряды $\{\mathbf{u}_i\}_I^{\tilde{N}}$, $\{\mathbf{v}_i\}_I^{\tilde{N}}$ соответственно, где $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}(t_i)$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}(t_i)$, $t_i = i\Delta t$, \tilde{N} -длина ряда (количество наблюдений), Δt - интервал выборки.

Пусть заданы (см. Глава 3, п.3.3):

Отображение Чирикова-Тейлора

Получено при решении задачи об устойчивости движения заряженных частиц в магнитных ловушках. Представляет собой уравнение вида:

$$\begin{aligned} x' &= x - k^* \sin(y) \quad (\text{mod } 2 * \pi), \\ y &= y + k^* \sin(y) \quad (\text{mod } 2 * \pi), \end{aligned}$$

где k - параметр, определяющий ширину эргодического слоя отделяющего захваченные частицы от пролетных.

При $k = 0.9$ отображение имеет вид, представленный рисунке 6.11 А, фазовый портрет которого напоминает сэндвич с бесконечным числом чередующихся инвариантных кривых и стохастических слоев.

Красным, голубым, желтым и малиновым цветами отмечены области хаоса.

Отображение Икеды

Возникает при моделировании оптических носителей информации и имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + u(x_n \cos t_n - y_n \sin t_n), \\ y_{n+1} &= 1 + u(x_n \cos t_n + y_n \sin t_n), \end{aligned}$$

где u - параметр и

$$t_n = 0.4 - \frac{b}{1 + x_n^2 + y_n^2}.$$

Для $u = 0.9$ система имеет хаотический аттрактор (Рис. 6.11 В).

Отображение Лози

Представляет уравнение вида:

$$x_{n+1} = 1 - a|x_n| + y_n,$$

$$y_{n+1} = bx_n,$$

где при $a = 1.4$, $b = 0.3$ имеет место отображение, представленное рис. 6.12 А.

Характеризуется множеством неустойчивых периодических орбит хаотического аттрактора.

Пусть длины всех модельных рядов указанных отображений составляют $N = 5000$ точек, длины реальных рядов наблюдений различны. Пусть управление динамикой хаотических процессов будет трактоваться в терминах нелинейного рекуррентного анализа.

Требуется реализовать:

- Рекуррентную диаграмму, характеризующую процесс управления методом резонансных возбуждений.

- Рекуррентную диаграмму, характеризующую процесс управления таким образом, чтобы малые изменения параметров системы не выводили бы ее из окрестности, в которой она находилась, а также:

- Определить корреляционную размерность полученных новых отображений.

- Определить новую фрактальную (ляпуновскую) размерность Каплана-Йорке.

Алгоритм реализации адаптивной системы измерение – распознавание – управление.

- Отображаем временные ряды $\{\mathbf{u}_i\}_i^{\tilde{N}}, \{\mathbf{v}_i\}_i^{\tilde{N}}$ соответствующих хаотических процессов на квадратные матрицы $[M_1, M_2] \in R^2$:

$$M_1 : \{\mathbf{u}_i\}_i^{\tilde{N}} \Rightarrow [\tilde{N} \times \tilde{N}], \quad (6.1)$$

$$M_2 : \{\mathbf{v}_i\}_i^{\tilde{N}} \Rightarrow [\tilde{N} \times \tilde{N}]. \quad (6.2)$$

- Определяем возмущение как

$$G : M_1 \rightarrow M_2. \quad (6.3)$$

- Результирующее возмущенное отображение определяется как

$$M_G = M_1 + M_2, M_G \in R^2. \quad (6.4)$$

- Рекуррентная диаграмма результирующего отображения M_G определяется как

$$M_G \Rightarrow \mathbf{R}_{i,j}^{m,\varepsilon} = \theta(\varepsilon_i - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^m, i, j = \overline{1, N}.$$

(6.5)

- Определяется корреляционная размерность как [13]:

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}} \theta(\varepsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|).$$

- Определяется размерность Каплана-Йорке как [13]:

$$D_{KY} = 2 - \lambda_1 / \lambda_2,$$

где λ_1 и λ_2 - старший и младший показатели экспонент.

- Формируется хаотический вектор XB

$$XB \stackrel{def}{=} \Psi(M_G, C(\varepsilon), D_{KY}).$$

В случае получения неудовлетворительного результата в контексте принятия решений, производится корректировка по нормам N или возмущающим воздействиям. В последнем случае используется интеллектуальный итерационный алгоритм с p – активными интервалами временных рядов, в котором последующее приближение на каждом шаге вычисляется только для части переменных, называемых активными.

Примеры визуализации алгоритма управления

Эксперимент 1, заключающийся в поиске и нахождении квазирегулярной составляющей хаотического процесса (рисунок 6.11).

Эксперимент 2, заключающийся в достижении устойчивости хаотического процесса (рисунок 6.12).

Анализ полученных результатов показал новые возможности в управлении динамическими системами, в контексте использования такого инструментария как нелинейный рекуррентный анализ. Кроме того, внешний вид рекуррентных диаграмм несет информацию о характере протекающих процессов (взаимодействии информационных потоков), наличии и влиянии шума, наличии состояний повторения и замирания (ламинарность), резких изменений и т.д.

Так, на базе работ [10-12] была сформулирована парадигма реализации комплексной задачи под названием *управление хаотическими системами*.

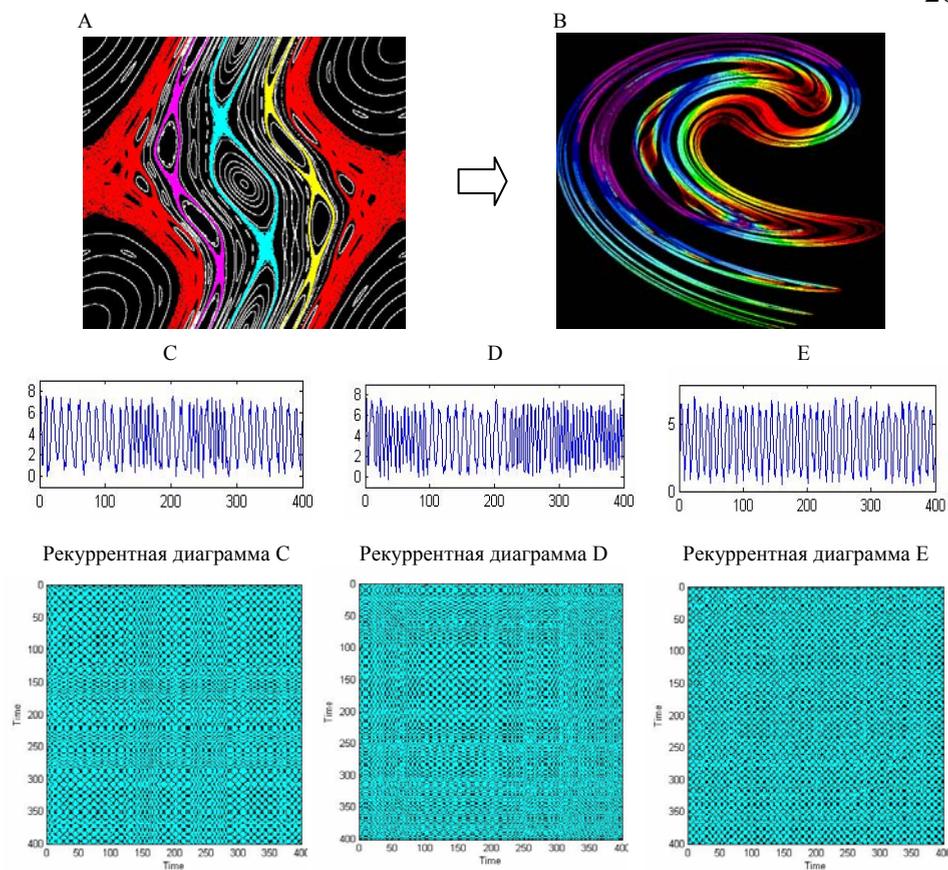


Рисунок 6.11 А – отображение Чирикова ($k=0.9$), где k - параметр, определяющий ширину эргодического слоя отделяющего захваченные частицы от пролетных; В – отображение Икеды ($u=0.9$) где u – параметр Икеды; С, D, E – результаты воздействий фрагментов временных рядов отображения Чирикова на отображение Икеды; рекуррентные диаграммы С и D иллюстрируют хаотический процесс; рекуррентная диаграмма E – квазирегулярность процесса; $C(\epsilon)=1.7072$; $D_{ky}=1.3000$.

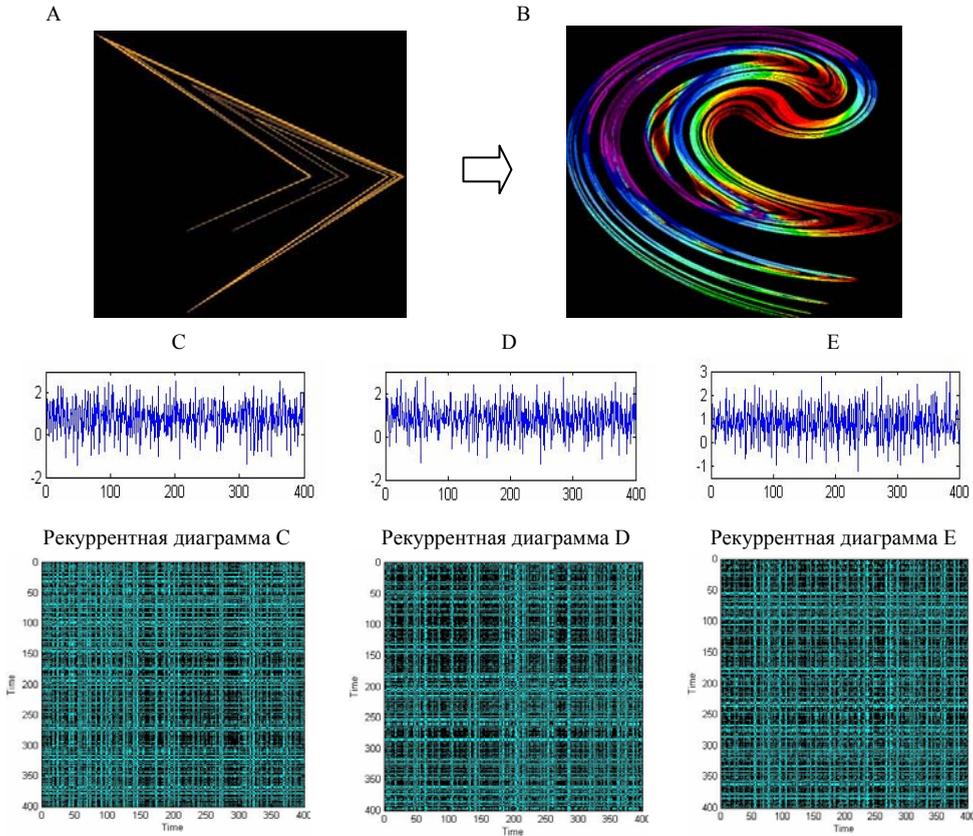


Рисунок 6.12 А – отображение Лози ($a = 1.4$; $b = 0.3$); В – отображение Икеды ($u=0.9$); рекуррентная диаграмма С демонстрирует выход системы за пределы окрестности процесса, рекуррентные диаграммы D и E – эволюцию нахождения процесса в неизменяющейся окрестности; $C(\varepsilon)=1.8012$; $D_{ky}=1.1971$

6.3.1 Синхронизация в управлении хаотическими системами и идентификации скрытой информации

Проблема управления пространственно–распределенными хаотическими системами продолжает оставаться актуальной и важной.

Этой проблеме посвящены работы Анищенко В.С. [14], Лоскутова А.Ю. [15,16], Трубецкого Д.И., Короновского А.А., Храмова А.Е. [17], Фрадкова [18] и др., в которых рассматривались различные, в том числе решеточные модели, аппроксимирующие поведение пространственно–распределенных систем. Однако принципиальным

вопросом является обоснование выбора структуры связей и учет гетерогенности составляющих систему отображений.

В этой связи в работе предлагается комплексный подход в реализации задачи управления пространственно – распределенной хаотической системой.

Так, на первом этапе произвольная структура пространственно – распределенной системы с элементами гетерогенных хаотических отображений натягивается на квадратную перколяционную решетку (решетку протекания), то есть производится операция вложения с целью формирования структуры связей отображений [19].

На втором этапе структура системы в присутствии шума отображается на квадратную матрицу с одновременным формированием портфеля скрытой передачи информации.

Управление системой и идентификация скрытой передачи информации реализуется методом синхронизации в терминах нелинейного рекуррентного анализа [6].

Предлагаемый в работе подход отличается от работ, использующих различные традиционные схемы синхронизации как при анализе хаотических систем, так и при передаче скрытой информации [17].

Вложение пространственно-распределенной системы в перколяционную решетку. Общие положения.

Постановка задачи

Пусть $\tilde{S} = \{s_i\}$, $i = \overline{1, n}$ произвольная пространственно – распределенная система с элементами гетерогенных хаотических отображений \tilde{S}_i , $i = \overline{1, n}$ типа

$$X_{n+1} = f(X_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad X = (x_1, \dots, x_n); \\ f = (f_1, \dots, f_n).$$

Пусть задана перколяционная решетка размерностью $L \times L$ в пространстве E^2 , рассматриваемая как совокупность узлов $M = \{m_i\}$, $i = \overline{1, n}$ и связей $C = \{c_j\}$, $j = \overline{1, k}$. Имеет место

Аксиома вложения [19]. Пусть некоторый оператор τ вложения \tilde{S} в n -мерную решетку $Z = (M, C)$ имеет вид:

$$\tau : G \Rightarrow Z, \tag{6.6}$$

где

$$G \Rightarrow Z = \begin{cases} 1, s_i \in C \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{cases} \quad (6.7)$$

и пусть $\tilde{S} \Rightarrow Z$ будет рассматриваться по ассоциации с процессами протекания, то есть как ситуацию, возникающую при случайном распространении «жидкости через среды» [20].

Тогда перколяционная решетка $Z = (M, C)$ будет представлять собой геометрическую и динамическую реализацию структуру системы $S = \{s_i\}$, $i = \overline{1, n}$ в условиях перколяции (протекания).

Замечание. Полученная структура характеризует фазовую траекторию системы. Основываясь только на одном измерении можно восстановить топологию полной фазовой траектории, как если бы мы использовали для этого все компоненты системы. Такой подход впервые предложен в 1980 году группой американских ученых [1], показавших, что можно получить удовлетворительную картину странного аттрактора, если вместо переменных x , входящих в уравнение динамической системы, использовать m -мерные вектора, получаемые из элементов временного ряда. Это обстоятельство катализировало использование нелинейного рекуррентного анализа [6] в задачах прогнозирования и управления хаотическими системами [10].

Фундаментальным свойством динамических диссипативных систем является рекуррентность (повторяемость) состояний в смысле прохождения последующей траектории достаточно близко к предыдущей. Это свойство было отмечено в 80-х годах XIX века французским математиком Пуанкаре (Poincaré) и сформулировано в виде «теоремы рекуррентности» [6].

Данная теорема лежит в основе современного учения о преобразованиях, сохраняющих меру, известного как эргодическая теория. При ее доказательстве Пуанкаре предвосхитил как понятие меры, так и понятие категории (см. Гл. 5).

Возможности такого анализа сильно ограничены, так как зачастую системы обладают многомерными фазовыми траекториями, что делает возможным изображать только проекции таких траекторий в двух или трехмерных пространствах.

В этой связи использование инструментария, предложенного в [1], позволяет работать практически с любыми рядами.

Кроме того, преимущество используемого графического инструмента состоит в том, что он позволяет исследовать m -размерную траекторию фазового пространства посредством

двумерного представления его рекуррентности и, следовательно, видеть динамическую картину в целом.

Синхронизация. Управление системами в присутствии шума.

Известно, что режим обобщенной синхронизации может наблюдаться в системах с диссипативным и недиссипативным типами связей [21].

Пусть для систем с диссипативной связью уравнения, описывающие динамику взаимодействующих систем в присутствии шума, будут записаны в виде [21]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= G(x(t), g_d), \\ \dot{u}(t) &= H(u(t), g_r) + \varepsilon A(x(t) - u(t) + D\xi(t)),\end{aligned}\quad (6.8)$$

где $x(t)$ и $u(t)$ - векторы состояния ведущей и ведомой систем соответственно, $\xi(t)$ - шумовой сигнал, G и H определяют векторные поля взаимодействующих систем, g_d и g_r - векторы управляющих параметров, $A = \{\delta_{ij}\}$ - матрица связи, $\delta_{ii} = 0$ или $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ ($i \neq j$), ε - параметр связи, D - интенсивность шума.

Пусть ведомая система $u(t)$ будет представлена как модифицированная система [21]:

$$\dot{u}_m(t) = H'(u_m(t); g_r, \varepsilon) \quad (6.9)$$

под внешним воздействием $\varepsilon(ax(t) + D\xi(t))$

$$\dot{u}_m(t) = H'(u_m(t); g_r, \varepsilon) + \varepsilon(Ax(t) + D\xi(t)), \quad (6.10)$$

где $H'(u(t)) = H(u(t)) - \varepsilon Au(t)$. Слагаемое $\varepsilon Au(t)$ вносит дополнительную диссипацию в модифицированную систему (6.9).

Тогда режим обобщенной синхронизации, возникающий в системе (6.8), может быть рассмотрен как следствие двух взаимосвязанных процессов, протекающих одновременно: увеличение диссипации в модифицированной системе (6.9) и возрастания амплитуды внешнего (хаотического и шумового) сигнала [21]. Скрытая информация может быть представлена в виде семантической матрицы (semantic matrices) $m_s \times n_c$, сформированной по критерию

$$m_s \times n_c = \sup_{def} \inf_{sem} I, \quad (6.11)$$

то есть максимально значащей с семантической точки зрения \sup_{sem} и минимальной по объему данных $\inf_v I$.

Таким образом, в контексте выше изложенного имеет место следующая

Постановка задачи

Пусть $x(t)|_I^N$, $y(t)|_I^N$, $z(t)|_I^n$ - m - мерные – фазовые траектории состояний систем длиной N , $\{x(t), y(t), z(t)\}_I^N \in R^m$.

Пусть $x(t)|_I^N$, $y(t)|_I^N$, $z(t)|_I^n$ соответствуют временные ряды $\{u_i\}_I^{\tilde{N}}$, $\{v_i\}_I^{\tilde{N}}$, $\{\omega_i\}_I^{\tilde{N}}$ соответственно, где $u_i = u(t_i)$, $v_i = v(t_i)$, $z_i = z(t_i)$, $t_i = i\Delta t$, \tilde{N} - длина ряда (количество наблюдений), Δt - интервал выборки.

Пусть заданы хаотические системы [14,22,23] (таблица 6.1).

Таблица 6.1

Хаотические системы	Уравнения систем
Отображение Чирикова - Тейлора	$x' = x - k^* \sin(y) \pmod{2^* \pi}$ $y = y + k^* \sin(y) \pmod{2^* \pi}$ $k = 0.9$
Отображение Лози	$x_{n+1} = 1 - a x_n + y_n,$ $y_{n+1} = bx_n, \text{ при } a = 1, b = -1$
Отображение Икеды	$x_{n+1} = 1 + u(x_n \cos t_n - y \sin t_n),$ $y_{n+1} = 1 + u(x_n \cos t_n + y \sin t_n),$ $u = 0.9 \quad t_n = 0.4 - b / 1 + x_n^2 + y_n^2.$
Отображение Хенона	$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + y_n,$ $y_{n+1} = \beta x_n, \quad 0 < \beta < 1.$

Пусть длины всех модельных рядов указанных отображений составляют $N = 5000$ точек, длины реальных рядов наблюдений различны [24].

В качестве взаимодействующих осцилляторов будут выступать два разных отображения, в том числе и с разной размерностью

фазового пространства, а в качестве шумовой составляющей будет использоваться отображение Хенона.

Пусть управление динамикой хаотических процессов будет трактоваться в терминах нелинейного рекуррентного анализа (Nonlinear Recurrence Analysis) [6].

Требуется реализовать:

- задачу структуризации пространственно–распределенной хаотической системы в перколяционной решетке протекания (то есть получить кластер системы);
- рекуррентную диаграмму, характеризующую процесс управления системой с идентификацией скрытой передачи информации.

Реализация алгоритма структуризации системы

Производим вложение модели пространственно – распределенной хаотической системы $\tilde{S} = \{s_i\}$, $i = \overline{1, n}$ (например, диффузионные, сетевые, иерархические, фрактальные модели) в перколяционную решетку размерностью $L \times L$ в пространстве E^2 , по правилу (6.6) и (6.7). На перколяционной решетке образуется произвольный кластер (Рис.6.13). Полученная структура представляет собой последовательно соединенные гетерогенные отображения.

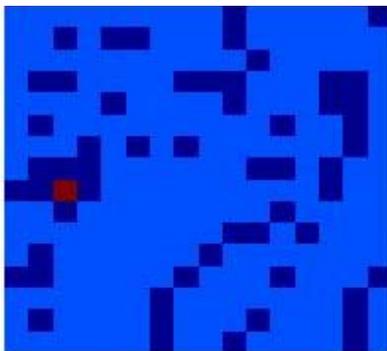


Рис. 6.13 Структуризация пространственно-распределённой системы. Размер решетки: 16 x 16. Доля возмущения: 0.763. Число прогонов программы: 50. Вероятность принадлежности узла к перколяционному кластеру 0.95249. Приведённый средний размер кластера 4.6076. Вероятность возникновения перколяционного кластера 0.96

**Реализация алгоритма управления пространственно –
распределенной системой**

• Отображаем временные ряды $\{u_i\}_I^N, \{v_i\}_I^N, \{\omega_i(t)\}_I^{\tilde{N}}$ соответствующих хаотических процессов на квадратные матрицы $[M_1, M_2, M_3] \in R^2$

$$M_1^3 : \{u_i, v_i, \omega_i\}_I^{\tilde{N}} \Rightarrow [\tilde{N} \times \tilde{N}]_I^3, i = \overline{1, \tilde{N}}. \quad (6.12)$$

• Определяем воздействие помехи как

$$G_1 : M_1 \rightarrow M_2. \quad (6.13)$$

Результирующее возмущенное отображение определяется как

$$M_{G1} = M_1 + M_2, \quad M_{G1} \in R^2. \quad (6.14)$$

Формируем подматрицу $(m_s \times n_c)$ матрицы $M_{G1} \in R^2$ как

$$\sup_{sem} \inf_v I = [X, Y; m_s \times n_c] \subset M_{G1},$$

где X и Y - координаты верхнего левого угла матрицы M_{G1} .

Объединяем в одном квазифазовом пространстве две траектории по правилу

$$M_{G2} = M_{G1} \cdot M_3, \quad M_{G2} \in R^2, \quad (6.15)$$

где $M_3 : \{\omega_i\}_I^{\tilde{N}} \Rightarrow [\tilde{N} \times \tilde{N}]$, $M_3 \in R^2$.

Сравниваем попадание всех точек второй траектории в ε -окрестность всех точек первой траектории по кросс – рекуррентной диаграмме (cross – recurrence plot, CRP) [6]:

$$M_{G2} = CR_{i,j}^\varepsilon = \theta(\varepsilon - \|x_i - y_j\|), \quad x, y \in R^m, \quad i = \overline{1, N_x}, \quad j = \overline{1, N_y}, \quad (6.16)$$

где N - число рассматриваемых состояний x_i , ε_i - граничное расстояние или расстояние от центра выбранной окрестности (точка $x(i)$) до ее границы, $\|\cdot\|$ - норма, $\theta(\cdot)$ - функция Хевисайда.

Здесь попадание точки y_j в ε -окрестности точки x_i отмечается на диаграмме черной точкой в позиции (i, j) (Рис.6.14).

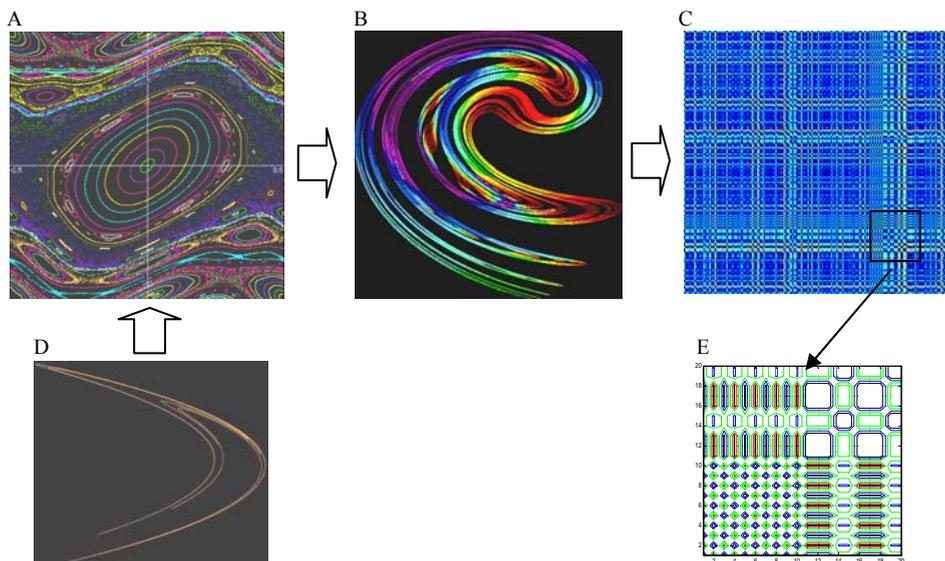


Рис. 6.14 А - отображение Чирикова-Тейлора, В – отображение Икеды, D – отображение Хенона (помеха), С – рекуррентная диаграмма, $\lambda_1 = 0.50354$, $\lambda_3 = -0.62712$, $D_{KY} = 1.1971$, Е – контейнер со скрытой информацией.

Квазисинхронизация имеет место в случае совпадения переменных состояний обеих траекторий (так как находятся в одном фазовом пространстве).

Необходимо отметить, что диагональные структуры CRP отражают подобную эволюцию двух изучаемых траекторий в течение некоторого времени.

Кроме того, критерием существования обобщенной синхронизации является отрицательность старшего условного ляпуновского показателя λ [17] и на этой основе фрактальная (ляпуновская) размерность Каплана-Йорке D_{KY} [25].

Идентификация скрытой информации

На рекуррентной диаграмме С (Рис.6.14) выделяем подматрицу $m_s \times n_c$ матрицы M_{GI} , $(m_s \times n_c) \subset M_{GI}$ по кодированной метке ℓ (label).

Таким образом, рисунок 6.14 демонстрирует процесс квазисинхронизации связанных гетерогенных хаотических систем типа Чириков +

Хенон с отображением Икеды, и операцией идентификации скрытой передачи информации $\{X, Y; m_s \times n_c\} \subset M_{GI}$.

Метод резонансных возбуждений

Для управления поведением хаотических динамических систем в [26] рассмотрен метод так называемых резонансных возбуждений. Этот метод основан на наблюдении что вследствие нелинейных модовых взаимодействий периодически возбуждаемая система не будет проявлять периодического поведения. Поэтому для получения предписанного (т.е. заранее заданного) режима движения представляется естественным возмущать систему специальным образом. Основную роль в данном методе играет допущение, что уравнение движения, на которое выходит система после введенного возмущения, заранее известно.

Для достижения контроля посредством резонансных возбуждений в динамическую систему, находящуюся в хаотическом режиме, аддитивно включают внешнее возмущение $F(t)$:

$$\dot{x} = v(x, \alpha) + F(t), \quad a \in R. \quad (6.17)$$

Далее, пусть требуемая динамика задается функцией $y(t)$, которая удовлетворяет так называемому уравнению предписанного движения:

$$\dot{y} = g(y). \quad (6.18)$$

Теперь, выбирая возмущение в виде $F = g(y(t)) - v(y(t), \alpha)$ и подставляя его в (6.17), получим уравнение контролирования [26]:

$$\dot{x} = v(x, \alpha) + g(y) - v(y, \alpha). \quad (6.19)$$

Таким образом, если устремить $x \rightarrow y$ при $t \rightarrow \infty$, то, в конечном счете, динамика будет представлена уравнением (16).

Искусственное создание в системе устойчивых колебаний посредством внешних мультипликативных возбуждений требует рассмотрения динамической системы вида [26]:

$$\dot{x} = v(x, a), \quad (6.20)$$

где $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $a \in R$, $X(t_0) \equiv X_0$.

Мультипликативное управление заключается в модификации функции v в соотношении (6.20), чтобы новая система $\dot{x} = v'(x, a', t)$ имела требуемое (выбранное заранее) поведение.

Здесь

$$v'(x, a', t) = v(x, a_0 + a, t), \quad (6.21)$$

Иногда введение мультипликативных возмущений в систему невозможно. Тогда фазовый поток $F'(X, G)$ разлагается на две составляющие: часть, соответствующую невозмущенному фазовому потоку, $F'(x)$, и компоненту $F'(G)$, которая инициируется возмущениями вида [26]:

$$F'(x, G) = F'(x) + F'(G). \quad (6.22)$$

В этом случае имеет место аддитивное возмущение, то есть

$$v'(x, a', t) = v(x, a) + g(t),$$

где $g(t)$ - внешнее воздействие.

Отсюда управление динамикой системы подразумевает приложение силовой компоненты к векторной функции. Поэтому данный тип управления поведением динамической системы называется силовым. В свою очередь, если в силовом контроле учитывается обратная связь, то функция v модифицируется как

$$v'_i = v_i(x, a) + g_k(x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Как отмечено в [26], параметрический метод имеет определенные преимущества перед силовым.

Таким образом, проблема управления поведением системы вида (6.20) заключается в том, чтобы найти такое внешнее возмущение G , при котором фазовый поток $F'(x, G)$, порождаемый возмущенной динамической системой $\dot{x} = v'(x, a, G)$, стремился бы к выбранному подмножеству $X(G)$ ее фазовое пространство.

Подмножество $X(G)$ может быть как аттрактором, так и неустойчивым множеством. В последнем случае возмущения G модифицируют систему (6.20) таким образом, что фазовые траектории подходят к подмножеству $X(G)$ и остаются в достаточно малой его окрестности $U \supset X(G)$ под действием G . Как правило, в приложениях в качестве подмножества $X(G)$ выбирается цикл определенного периода.

Однако, графическая визуализация фазовой траектории позволяет определить состояние системы без интегрирования уравнений, указывая, например, на периодическое или хаотическое поведение.

В [1,6] был предложен способ отображения m -мерной фазовой траектории состояния системы $x(t)$ длиной N на двумерную квадратную двоичную матрицу размером $N \times N$, в которой 1 (черная точка) соответствует повторению состояния при некотором времени i в некоторое другое время j , а обе координатные оси являются

осями времени. Такое представление было названо рекуррентной диаграммой (recurrence plot, RP) и формально выглядит как [1]:

$$R_{i,y}^{m,\varepsilon_i} = \theta(\varepsilon_i - \|x_i - x_j\|), x \in R^m, i, j = 1 \dots N, \quad (6.23)$$

где N - количество рассматриваемых состояний x_i , ε_i - размер окрестности точки x в момент i , $\|\cdot\|$ - норма и $\theta(\cdot)$ - функция Хэвисайда. Как отмечено в [6], невозможно обнаружить полную рекуррентность в смысле $x_i \equiv x_j$ (состояние динамической, а особенно – хаотической системы не повторяются полностью эквивалентно начальному состоянию, а подходит к нему сколь угодно близко). Таким образом, рекуррентность определяется как достаточная близость состояния x_j состоянию x_i , то есть рекуррентными являются состояния x_j , попадающие в m -мерную окрестность с радиусом ε_i и центром в x_i . Эти точки x_j называются рекуррентными точками (recurrence points).

Так как $R_{i=j} = 1 (i = 1, \dots, N)$, то рекуррентная диаграмма всегда содержит черную диагональную линию – линию идентичности (line of identity, LOI), под углом $\pi/4$ к осям координат [6].

Здесь важно отметить, что произвольно взятая рекуррентная точка (i, j) не несет какой – либо полезной информации о состояниях во времена i и j . Только вся совокупность рекуррентных точек позволяет восстановить свойства системы.

В этой связи имеет место следующая

Постановка задачи

Пусть $x(t)|_1^N$, $y(t)|_1^N$ - m -мерные фазовые траектории состояний систем длиной N , $\{x(t), y(t)\}_1^N \in R^m$.

Пусть $x(t)$, $y(t)$ соответствуют временные ряды $\{u_i\}_1^{\tilde{N}}$, $\{v_i\}_1^{\tilde{N}}$ соответственно, где $u_i = u(t_i)$, $v_i = v(t_i)$, $t_i = i\Delta t$, \tilde{N} - длина ряда (количество наблюдений), Δt - интервал выборки.

Пусть заданы хаотические системы (таблица 6.1).

Требуется реализовать рекуррентные диаграммы, характеризующие процесс управления методами мультипликативных, аддитивных и импульсных резонансных возбуждений, используя хаотические отображения Чирикова, Икеды, Лози.

Реализация алгоритма

Мультипликативное резонансное возбуждение

- Отображаем временные ряды $\{u_i\}_I^N, \{v_i\}_I^N$ соответствующих хаотических процессов на квадратные матрицы:

$$M_1 : \{u_i\}_I^N \Rightarrow [\tilde{N} \times \tilde{N}], \quad (6.24)$$

$$M_2 : \{v_i\}_I^N \Rightarrow [\tilde{N} \times \tilde{N}].$$

- Определяем возбуждение как

$$G_I : M_1 \rightarrow M_2. \quad (6.25)$$

Результирующее возбужденное отображение определяется как

$$M_{GI} = M_1 \bullet M_2, M_{GI} \in R^2, \quad (6.26)$$

где \bullet - операция умножения матриц.

- Рекуррентная диаграмма результирующего отображения M_{G_i} (Рис. 6.15 F) определяется как (6.23):

$$M_G \Rightarrow R_{i,j}^{m,\varepsilon} = \theta(\varepsilon_i - \|x_i - x_j\|), x \in R^m, i, j = \overline{1, N}.$$

Идентично определяются аддитивное (+ - операция сложения матриц) и импульсное (\otimes - операция свертки матриц) резонансные возбуждения, их рекуррентные диаграммы представлены на рисунках 6.16 – 6.18.

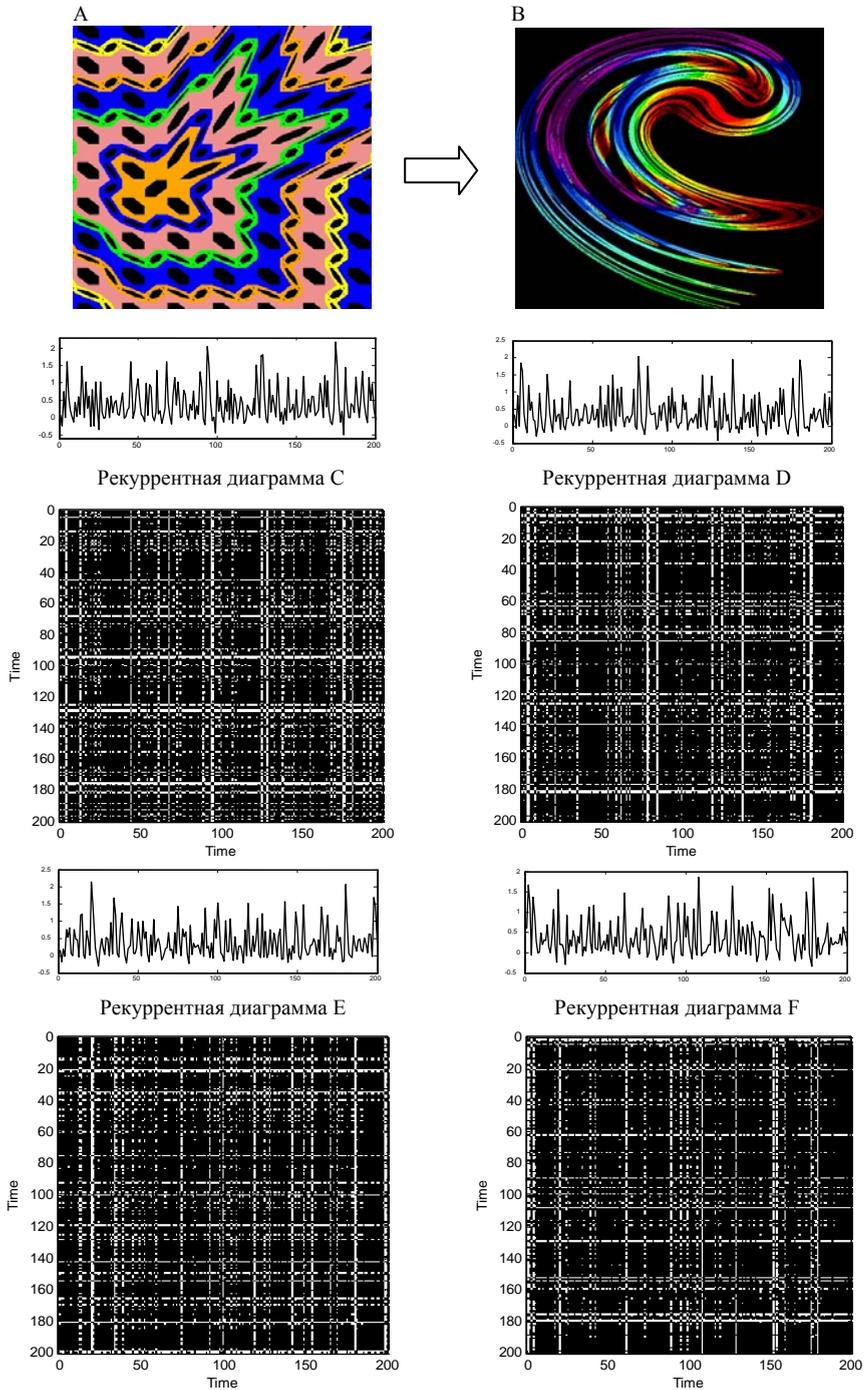


Рис. 6.15 А - отображение Лози; В - отображение Икеды. Рекуррентные диаграммы С, D, E - иллюстрируют эволюцию хаотических процессов, F - квазирегулярность.

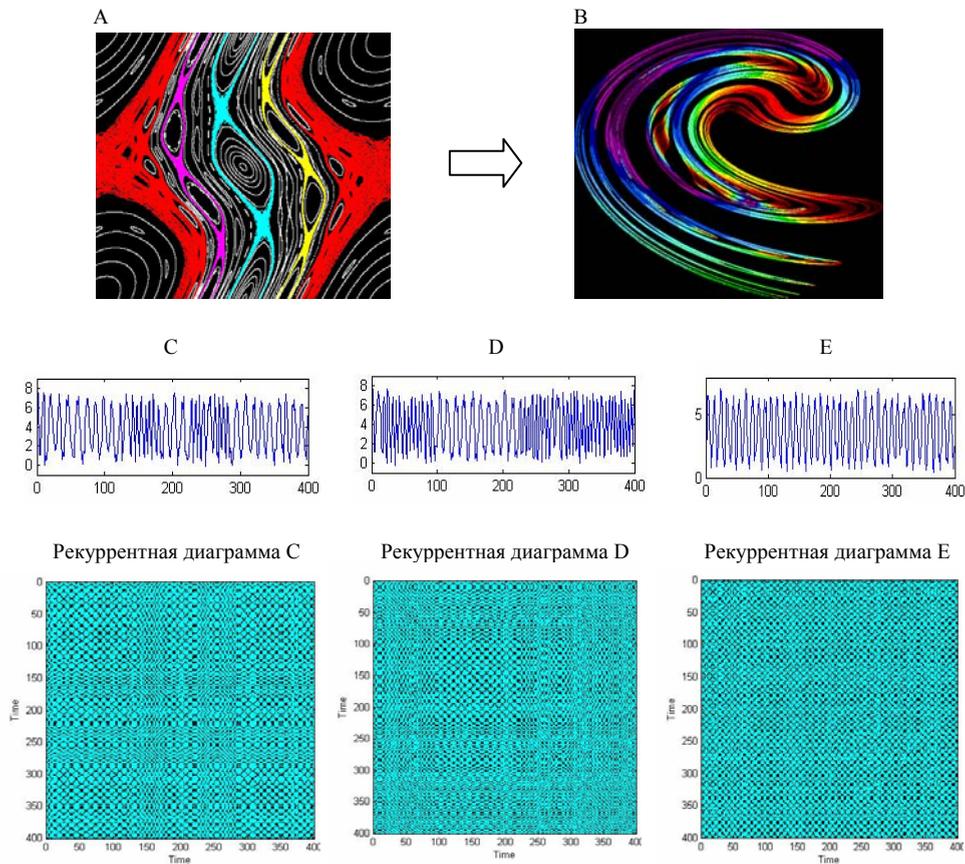


Рис. 6.16 А – отображение Чирикова ($k=0.9$); В – отображение Икеды ($u=0.9$); С, D, E – результаты воздействий фрагментов временных рядов отображения Чирикова на отображение Икеды; рекуррентные диаграммы С и D иллюстрируют хаотический процесс; рекуррентная диаграмма E – квазирегулярность процесса; $C(\varepsilon)=1.7072$; $D_{ky}=1.3000$.

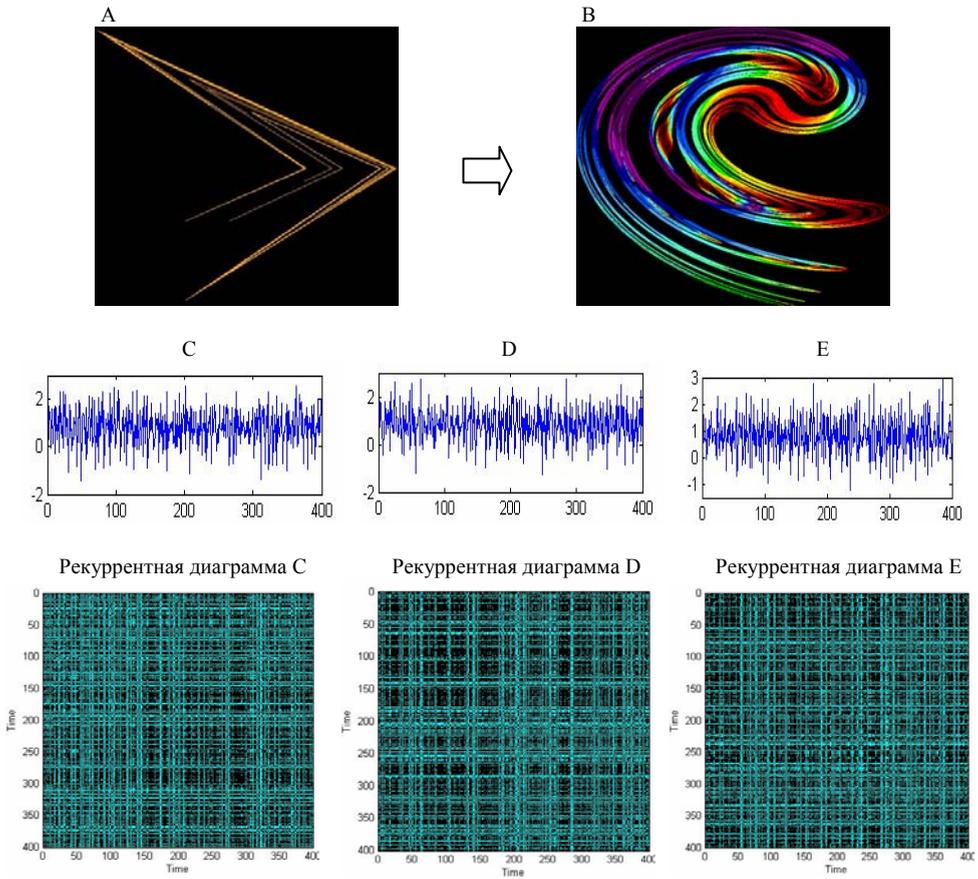


Рис. 6.17 А – отображение Лози ($a = 1.4$; $b = 0.3$); В – отображение Икеды ($\mu=0.9$); рекуррентная диаграмма С демонстрирует выход системы за пределы окрестности процесса, рекуррентные диаграммы D и E – эволюцию нахождения процесса в неизменяющейся окрестности; $C(\epsilon)=1.8012$; $D_{ky}=1.1971$

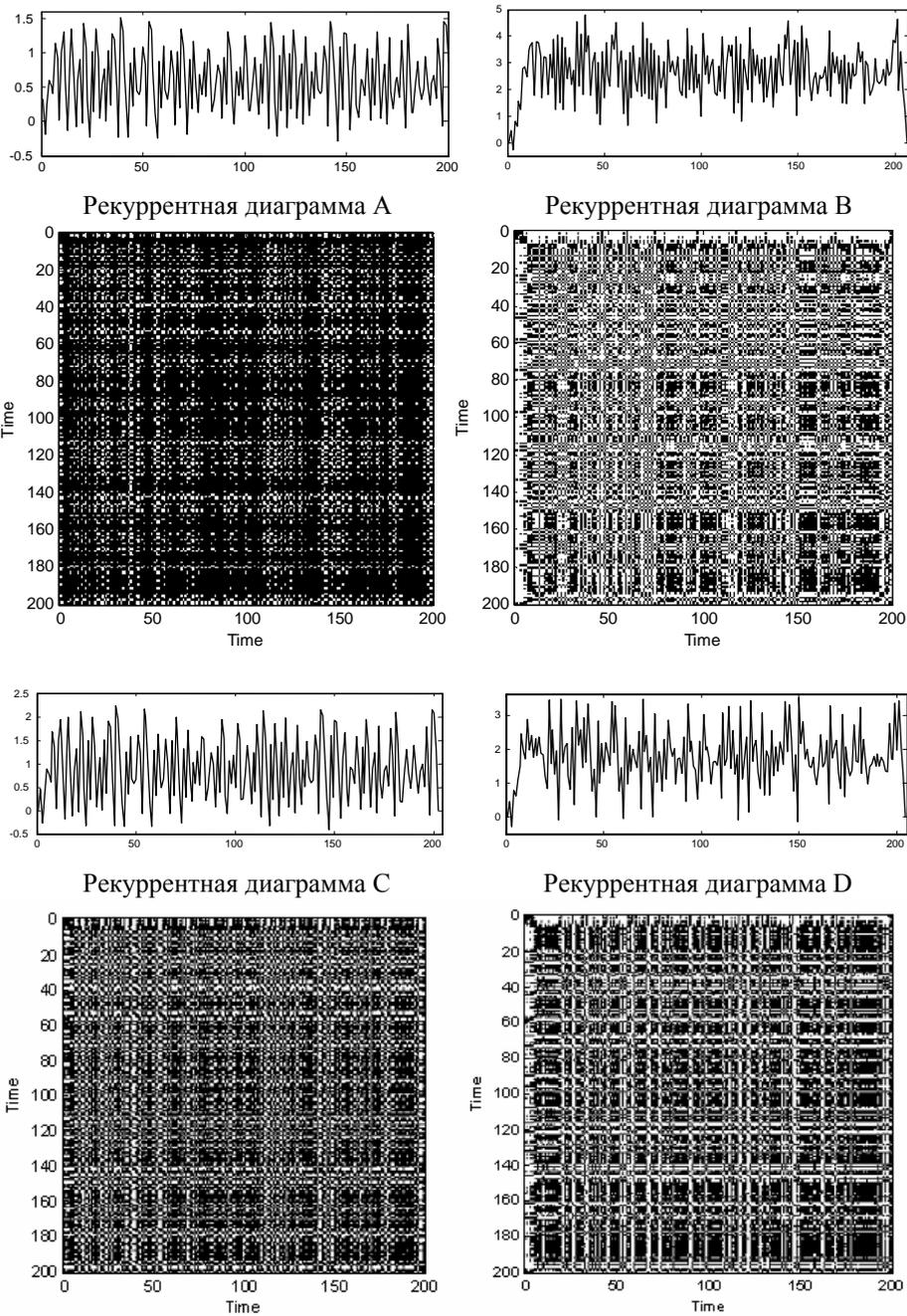


Рис. 6.18 А – рекуррентная диаграмма отображения Лози.; В,С, D – эволюция воздействия импульсных помех на хаотический процесс.

В случае получения неудовлетворительного результата производится корректировка на базе интеллектуального итерационного алгоритма с p - активными интервалами временных рядов, в котором последующее приближение на каждом шаге вычисляется только для части интервалов, называемых активными.

Анализ полученных результатов показал, что возбуждение отображений при различных методах управления, с ярко выраженными хаотическими свойствами, приводят к качественному изменению в динамике: из хаотических они преобразуются в регулярные, обладающие стабилизированным характером [10-12].

В работе отмечено, что режим квазисинхронизации противодействует хаотическому движению и используется как стабилизирующий и управляющий факторы в пространственно-распределенной системе. Показано, что принудительная квазисинхронизация позволяет переводить систему из хаотического режима в регулярный.

Отмечено, что в качестве функциональной зависимости между ведущей и ведомой системами использована кросс-рекуррентная функция (13). Важно также отметить нетрадиционный подход к идентификации скрытой передачи информации.

Кроме того, использование ограниченного объема анализируемой информации и нетрадиционной визуализации в виде рекуррентных диаграмм, позволяет, формируя новые структуры двумерных отображений хаотических систем, повысить эффективность распознавания и управления ими.

6.4 Гидродинамика. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности

Турбулентность является самым распространенным видом движения «космической жидкости» во Вселенной и принадлежит к числу наиболее сложных природных явлений, связанных с возникновением и развитием организованных диссипативных структур (вихрей различного пространственно – временного масштаба) при определенных режимах течения жидкости в существенно нелинейной открытой системе. Процессы самоорганизации на фоне турбулентного движения являются важнейшим механизмом, формирующим свойства астро – и геофизических объектов на разных стадиях их эволюции.

Численное моделирование турбулентных течений на основе точных (мгновенных) гидродинамических уравнений сопряжено с

большими математическими трудностями, а построение общей теории турбулентности из-за сложности механизмов возникновения и эволюции взаимодействующих когерентных структур, вряд ли возможно. Все это требует развития новых оригинальных макроскопических подходов к описанию турбулентности, введения адекватных физических параметров среды, установления (для их определения) универсальных и частных соотношений, дополняющих уже известные соотношения типа законов сохранения массы, энергии, количества движения и т.п.

В работе [27] сделана попытка построения феноменологической модели турбулентности как процесса самоорганизации в открытой системе. Представление турбулизованного континуума в виде термодинамического комплекса, состоящего из двух подсистем – подсистемы осредненного движения и подсистемы турбулентного хаоса, рассматриваемого как конгломерат вихревых структур различных пространственно – временных масштабов, позволило получить методами неравновесной термодинамики определяющие соотношения для турбулентных потоков и сил, которые наиболее полно описывают процессы переноса и структурирования в нем.

Использование двух интерпретаций параметра Колмогорова (как величины, описывающей скорость диссипации энергии в тепло и одновременно являющейся скоростью передачи турбулентной энергии по каскаду вихрей) позволило найти определяющие соотношения и для этой величины, сделав тем самым термодинамический подход самодостаточным. Таким образом, введение в модель внутренних параметров среды, характеризующих возбуждаемые макроскопические степени свободы, дало возможность описать термодинамически Колмогоровский каскадный процесс и получить разнообразные кинетические уравнения (типа Фоккера – Планка в конфигурационном пространстве) для функций распределения мелкомасштабных характеристик турбулентности (в частности, нестационарное кинетическое уравнение для функции распределения вероятности диссипации турбулентной энергии).

Новый взгляд на турбулентность

Согласно общепринятым представлениям, турбулентность является процессом хаотическим. Однако существует и иная точка зрения на турбулентность, высказанная впервые, видимо, Пригожиным [28].

Согласно ей, переход от ламинарного течения к турбулентному является процессом самоорганизации, при котором часть энергии теплового хаоса (связанного с произвольными флуктуациями, происходящими на молекулярном уровне) переходит в макроскопически организованное движение упорядоченных диссипативных структур.

При переходе к турбулентности между отдельными областями течения устанавливаются дополнительные макроскопические связи, обусловленные коллективным взаимодействием образующих ее подсистем. Это обстоятельство повышает внутреннюю упорядоченность системы по сравнению с молекулярным хаосом. В частности, каскадный процесс дробления вихрей, имеющий место в полностью развитой турбулентности, трактуется как неограниченная последовательность процессов самоорганизации.

Таким образом, развитое турбулентное движение отвечает состоянию большей упорядоченности, чем более симметричное ламинарное движение.

Вместе с тем в [29] отмечено, что «в турбулентном хаосе число макроскопических пространственных и временных масштабов столь велико, что поведение системы кажется хаотическим».

Важно также подчеркнуть, что развитая турбулентность, характеризуемая спектрами Фурье (как временными, так и пространственными), позволяет свидетельствовать о существовании многомасштабной структуры поля скорости. Именно многомасштабность и является важнейшим признаком развитой турбулентности, приводя к возбуждению гигантского числа степеней свободы [30].

Необходимо отметить, что именно в этом и есть основное отличие турбулентности от хаоса в динамических системах невысокого порядка: в турбулентном потоке хаос и пространственный, и временной, а хаотическое поведение маломодовых систем представляет собой хаотическую во времени эволюцию мод с относительно простой пространственной структурой.

В то же время, говоря о развитой турбулентности, подразумевается, что числа Рейнольдса столь велики, что остается широкий диапазон возбужденных масштабов, удовлетворяющих условию $\lambda \ll \ell \ll L$, где λ - микромасштаб турбулентности, характеризующий масштабы пульсаций скорости, на которых становится существенной вязкая диссипация [30].

Традиционно уравнение Навье-Стокса записывается в виде:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f},$$

(6.27)

где ρ - плотность, p - давление, μ - динамическая вязкость, \mathbf{f} - представляется как сила тяжести.

Однако на междисциплинарном уровне пусть развитая турбулентность будет представлена как некоторое хаотическое движение. Тогда использование нелинейного рекуррентного анализа позволит получить визуальную диаграмму этого процесса.

Реализация такой парадигмы будет отличаться от работ [27,30].

6.4.1 Уравнение Навье-Стокса как логистическое отображение. Математическая модель

Уравнение несжимаемой жидкости Навье-Стокса имеет вид [31]:

$$\mathbf{u}_i + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad (6.28)$$

где ρ - плотность, \mathbf{u} - трехмерный вектор, ∇ - векторный дифференциальный оператор (оператор Гамильтона), Re - число Рейнольдса, ∇^2 - скалярный оператор, называемый оператором Лапласа, \mathbf{f} - представляется как сила тяжести; $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$.

При $\rho = const$ уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + Re^{-1} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (6.29)$$

Упростим выражение (6.29)

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_i} = -\nabla^2 p. \quad (6.30)$$

Преобразование Фурье для \mathbf{u} представляется как:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \alpha_i(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

Аналогично преобразование Фурье для ρ выглядит как:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i b_i(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

и

$$\sum_V m_i n_j a_j(\mathbf{m}, t) a_i(\mathbf{n}, t) e^{i(\mathbf{m} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{x})} d\mathbf{m} d\mathbf{n} = m^2 \sum_V b(\mathbf{m}, t) e^{i\mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{m}.$$

При увеличении $e^{jk \cdot x}$ и интеграции для всех \mathbf{x} уравнение принимает вид:

$$\sum_V m_i n_j a_j(\mathbf{m}, t) a_i(\mathbf{n}, t) \delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k}) d\mathbf{m} d\mathbf{n} = k^2 b(\mathbf{k}, t). \quad (6.31)$$

Теперь уравнение (6.28) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a_i(\mathbf{k}, t) + i \sum_V n_j a_j(\mathbf{m}, t) a_i(\mathbf{n}, t) \delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k}) d\mathbf{m} d\mathbf{n} \\ = i \sum_V \frac{k_i m_r n_j}{k^2} a_j(\mathbf{m}, t) a_r(\mathbf{n}, t) \delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k}) d\mathbf{m} d\mathbf{n} - Re^{-1} k^2 a_i(\mathbf{k}, t). \end{aligned} \quad (6.32)$$

Упростим выражение (6.32):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a_i(\mathbf{k}, t) = \sum_V A_{ijr}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{r}) a_j(\mathbf{m}, t) a_r(\mathbf{n}, t) \delta(\mathbf{m} + \mathbf{n} - \mathbf{k}) d\mathbf{m} d\mathbf{n} \\ - Re^{-1} k^2 a_i(\mathbf{k}, t), \end{aligned} \quad (6.33)$$

где A_{ijr} — нелинейный коэффициент, равный

$$A_{ijr}(\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{r}) = i \left(\frac{k_i n_j m_r - n_j \delta(i, r) k^2}{k^2} \right).$$

Если образ действия волны фокусируется единственным образом, то сечение Галеркина представляется в виде:

$$\dot{a} = -Aa^2 - Re^{-1} |\mathbf{k}|^2 a. \quad (6.34)$$

Используя метод Эйлера, имеем:

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\tau} = -Aa_n^2 - Re^{-1} |\mathbf{k}|^2 a_n. \quad (6.35)$$

Трансформируем уравнение (6.35) в виде:

$$a_{n+1} = \tau A a_n \left(\frac{1 - Re^{-1} \tau |\mathbf{k}|^2}{\tau A} - a_n \right). \quad (6.36)$$

Представив (6.32) в виде:

$$\frac{1 - Re^{-1} r[\mathbf{k}]^2}{\tau A} = 1,$$

и перестраивая его получаем

$$(1 - Re^{-1} r[\mathbf{k}]^2) = \tau A, \quad (6.37)$$

И, следовательно, имеем выражение, показывающее зависимость между уравнением Навье – Стокса и хаотическим логистическим отображением:

$$a_{n+1} = 4(1 - Re^{-1} \tau[\mathbf{k}]^2) a_n (1 - a_n) = r a_n (1 - a_n). \quad (6.38)$$

Рассмотрим анализ развитой турбулентности в контексте использования нелинейного рекуррентного алгоритма.

Пусть $x|t|_p^N$ - m - мерная фазовая траектории состояний системы длиной N , $x(t)|_I^N \in R^m$. Пусть $x|t|_I^N$ соответствует временной ряд $\{U_i\}_I^N$, где $U_i = U(t_i)$, $t_i = i\Delta t$, \tilde{N} - длина ряда (количество наблюдений), Δt - интервал выборки. Реализация алгоритма производится согласно раздела 5.2.1 и представлена на рисунке 6.19.

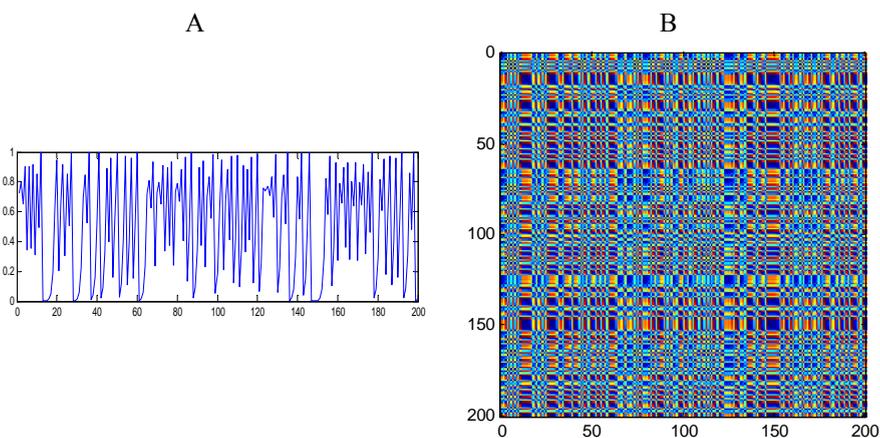


Рисунок 6.19 А – график функции турбулентного процесса,
В – рекуррентная диаграмма (евклидово расстояние).

В работе [33] дан анализ хаотической траектории логистического отображения в контексте ее стабилизации. Анализируется хаотическая траектория в вариативной области, охватывающей порядка 100 точек (рис. 6.20) с параметрами $r_0=3.90$ и $r_1=3.91$.

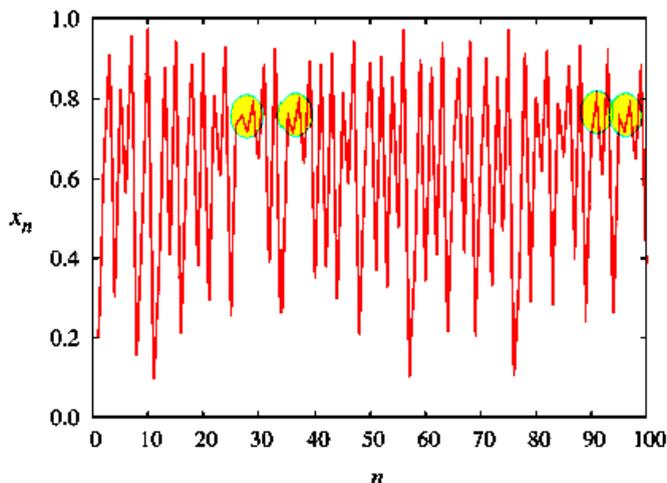


Рисунок 6.20 Анализ хаотической траектории в вариативной области.

Используя метод OGY, (С.Grebogi, E.Ott and J.A.Yorke. Chaos, Strange Attractor and Fractal basin boundaries in nonlinear dynamics science, 238: 632-638, 1987) при значении $r_0=3.90$ в логистическом уравнении удается стабилизировать хаотическую траекторию (рис. 6.21), характеризующую ограниченную область турбулентного движения «жидкости».

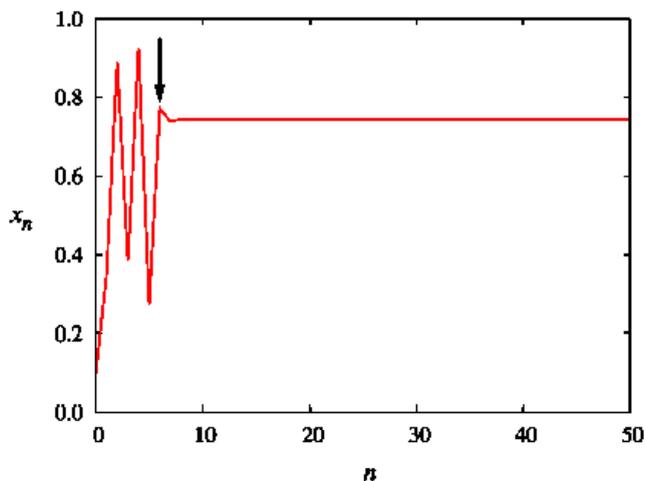


Рисунок 6.21 Стабилизация хаотической траектории.

Для визуализации и анализа процесса стабилизации хаотической траектории процесса и характерного участка траектории, (см. рис. 6.21), авторами была построена его РД, представленная на рисунке 6.22.

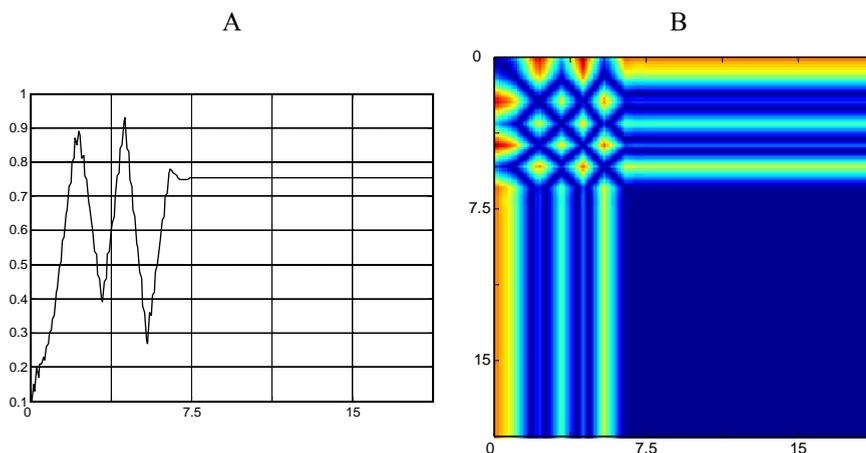


Рисунок 6.22 А – график функции стабилизированного участка процесса, В – рекуррентная диаграмма (евклидово расстояние).

6.4.2 Контроль и интерпретация вибрационных процессов

Гидроэнергетика. Примером практического применения нелинейного рекуррентного анализа может служить контроль и интерпретация вибрационных процессов, протекающих в узлах и механизмах единичных и уникальных гидросооружений, таких как ГЭС.

В процессе эксплуатации силовое оборудование ГЭС подвергается воздействиям гидравлических, механических и электромагнитных возмущающих воздействий как внутренних, так и внешних, проявляющихся в широком амплитудном и частотном диапазонах. Рассматривая ГЭС как информационный объект можно отметить, что наиболее важным и ответственным узлом является гидроагрегат, состоящий из гидротурбины, вала, гидрогенератора и комплекса дополнительного вспомогательного оборудования (направляющий аппарат, затворы, решетки, система возбуждения генератора, подшипники, компрессорное хозяйство и др.).

Основными источниками возмущающих вибрационных воздействий на гидроагрегат являются:

- энергоноситель – через пульсации давления турбулентного потока воды;

- основное и вспомогательное механическое оборудование – проявление вибрации технологического и внешнего происхождения;
- гидрогенератор – посредством электромагнитного воздействия хаотически изменяющейся нагрузки.

Кроме того, каждый гидроагрегат подвергается вибрационному влиянию со стороны параллельно работающего с ним гидроагрегатов через общие среды: энергоноситель, фундамент и электрическую сеть [34-36].

Контроль и диагностика технического состояния силового оборудования на ГЭС сопровождается сбором, обработкой и представлением большого объема вибрационной измерительной информации. Анализ параметров вибрации производится с учётом специфики рабочих режимов, от проявления воздействия гидравлических, механических и электромагнитных возмущающих сил и моментов. Принятие решения по результатам этих исследований требует осмысления и оценки большого объема измерительной, нормативной и технологической информации. Добавление экспертной системы в состав измерительно-диагностической аппаратуры позволит обобщать знания, накопленные в процессе эксплуатации оборудования и повысить эффективность проводимых исследований [35]. Ещё большего повышения эффективности и достоверности проводимых вибрационных измерительных экспериментов можно добиться проведением нелинейного рекуррентного анализа собранных данных.

Анализ причин и источников возмущающих сил и моментов, вызывающих вибрационные процессы в узлах и элементах силового оборудования гидроагрегата позволяет оценить природу этих процессов. Так, как было отмечено выше, энергоноситель – турбулентный поток воды (приводящий в движение гидротурбину), по своей природе имеет хаотический характер, нагрузка гидрогенератора – хаотически изменяющийся по всем параметрам процесс, а сам гидроагрегат подвергающийся со стороны гидротурбины и гидрогенератора хаотически изменяющимся значениям параметров вибрации передает их через систему опор, подшипники и фундамент параллельно с ним работающим гидроагрегатам. К этим частотам добавляются основные технологические частоты: в виде оборотной, лопастной и полюсной частот, частота кавитационных процессов, биения от дисбаланса, резонансы узлов и др. Следовательно, как показывает анализ вибрационных процессов, протекающих в силовом оборудовании гидроагрегата мы имеем дело с хаотически

изменяющимися процессами и применение нелинейного рекуррентного анализа для их изучения оправдано.

Описание нелинейного рекуррентного анализа и его возможностей и преимуществ при исследовании динамических систем, а также рекуррентных диаграмм, получаемых в результате проведения этого анализа подробно описаны в 5-ой главе.

Используя одно из основных преимуществ нелинейного рекуррентного анализа для исследования вибрационных процессов как достаточность наличия небольшого объема данных измерительного эксперимента, авторами были получены нижеприведенные рекуррентные диаграммы.

Рассмотрим результаты проведения нелинейного рекуррентного анализа при обработке реальных вибрационных сигналов [36,37]. На рисунках 6.23–6.26 в качестве примеров представлены рекуррентные диаграммы и диаграммы расстояний (норм) вибрационных процессов зафиксированных на лопатке направляющего аппарата при турбинном и насосном режимах работы гидроагрегата.

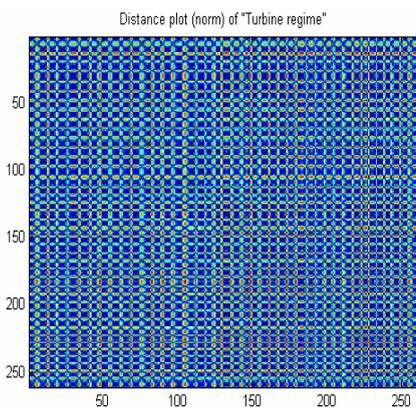


Рисунок 6.23.

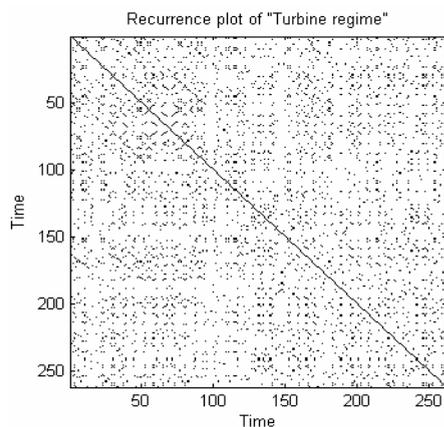


Рисунок 6.24

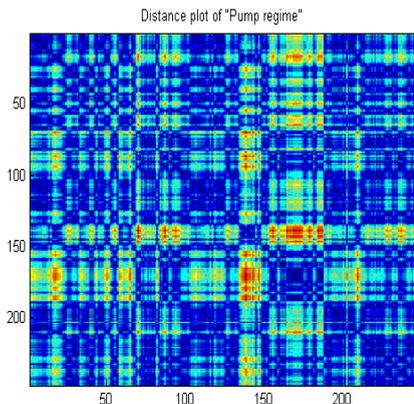


Рисунок 6.25.

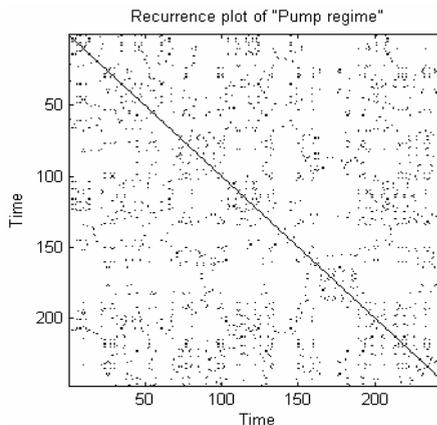


Рисунок 6.26

Графические образы рекуррентных диаграмм и диаграмм расстояний (норм) сигнала «Turbine regime» говорят о явно выраженной гармонической составляющей сигнала, на котором просматриваются шумовые искажения. Характер строения этой диаграммы позволяет судить о наличии некоторого установившегося режима, на который наложены случайные возмущающие сигналы. Графические образы сигнала «Pump regime», сильно искажены случайными составляющими с широким частотным спектром. Такая диаграмма говорит о наличии неустановившегося режима и широком частотном спектре сигнала.

Практическая ценность применения рекуррентного анализа и использование рекуррентных диаграмм заключается в том, что по сравнению с осмысливанием большого объема измерительной информации, визуальный контроль позволяет быстрее понять и оценить сущность протекающих процессов, прогнозировать изменение их состояний и принять решение по упреждению негативных последствий [10,11]. Так, например, применение алгоритмов управления хаотическими процессами, описанные в 6.3 позволит по результатам проведенного нелинейного рекуррентного анализа контролируемых вибрационных процессов сгенерировать управляющий сигнал – воздействие на энергоноситель с целью ослабить или видоизменить установившиеся гармонические вибрационные процессы (значения которых превышают допустимый уровень или близки к нему), преобразуя их в хаотический вид. Подобное преобразование вибрационного процесса преследует цель ослабление его воздействия на силовое оборудование гидроагрегата и

таким путем уменьшить значения накапливающихся усталостных напряжений, прогрессирующих кавитационных процессов резонансов и других проявлений вибрации, негативно сказывающихся на ресурсе и надежности дорогостоящего и уникального оборудования.

В заключение необходимо отметить актуальность затронутой проблемы, применение которой в синергетическом аспекте, даст стимул в понимании протекающих процессов, развитии визуального мышления и через них к возможности прогнозирования и управления ими. Решение рассмотренных проблем на синергетическом уровне станет весомым дополнением к традиционным методам исследований в этих областях.

Литература

- 1 Eckmann J.P., Kamphorst S.O., Ruelle D., Recurrence Plots of Dynamical Systems.// Europhysics Letters 5. – 1987. – P. 973-977.
- 2 Ponyavin D.I. and Zolotova N.V. Nonlinear Analysis of Climatic Time Series with Cross – Recurrence Plot. Proceedings of 5-th Int. Conf. “Problem of Geocosmos”. St.Peterburg, Prtrodvorets, may 24-28, 2004. – p.259-262.
- 3 Золотова Н.В., Понявин Д.И. Метод обнаружения скрытой информации. Письма в ЖТФ, том32, вып.21,2006. – с.84-94.
- 4 Ching Y-T// Pattern Recognition Lrrt.,v.22,2001,p.421.
- 5 Васюта К.С. Рекуррентный анализ процессов в телекоммуникационных системах. Наукові записки. УНДІЗ, №6(8),2008. – с.90-96.
- 6 Norbert Marwan, M. Carmen Romano, Marco Thiel. Jurgen Kurths. Recurrence plots for the analysis of complex systems. Phycics Reports 438, 2007. – p. 237-238.
- 7 Donner Reik V., Zou Yong, Donges J.F., Marvan anorbert, Kurths J. Recurrence networks – A novel paradigm for nonlinear time series analisis., New Journal of Phisics., 12(3), 033025 (2010). - p.1-35.
- 8 Kurths J., Marvan N., Wessel N. Recurrence Plot Based Measures of Complexity to Predict Life – Threatening Cardiac Arrhythmias, In: Proceedings ECCTD 03, Krakov (2003). - p.1-4.
- 9 Crowley Patrick M. Analyzing Convergence and Synchronicity of Business and Growth Cycles in the Euro Area using Cross Recurrence Plots. European Physical Journal – Special Topics, 164 (1). 2007. - p.1-23.

10 Владимирский Э.И., Исмаилов Б.И. «Синергетические аспекты нелинейного рекуррентного анализа хаотической информации». Тезисы докладов международной научно-практической конференции «Информационные технологии и компьютерная инженерия», Винница, Украина, 19-21 мая 2010. – с. 96-97.

11 Исмаилов Б.И. «Нелинейный рекуррентный анализ в задачах управления пространственно-распределёнными хаотическими системами». Труды III ежегодной Международной научно-практической конференции «Перспективы развития информационных технологий» Новосибирск, 17 марта 2011. – с.49-54.

12 Владимирский Э.И., Исмаилов Б.И. Нелинейный рекуррентный анализ как математическая модель управления хаотическими процессами. Информационные технологии. №5(177).2011. – с.42-45.

13 Chlowerakis Konstantinos E., Sprott J.C. A comparison of correlation an Lyapunov dimensions//Physica D 200, 2005. – p.156-164.

14 Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических систем. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1999. – 368с.

15 Лоскутов А.Ю., Прохоров А.К., Рыбалко С.Д. Динамика неоднородных цепочек связанных квадратичных отображений. Теор. и математ. физика, т.132, №1, 2002. – с.105-125.

16 Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. – Ъ: - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. – 620с.

17 Короновский А.А., Москаленко О.И., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Обобщенная синхронизация и синхронизация, индуцированная шумом – единый тип поведения связанных хаотических систем. Доклады Академии наук. Т. 407, №6, 2006. – с. 1-5.

18 Андриевский Б.Р., Матвеев А.С., Фрадков Ф.Л. Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи. АиТ, вып.4, 2010. – с.34-99.

19 Владимирский Э.И. Фрактальность алгебраических структур. Тр. IV Международной конференции «Идентификация систем в задачах управления» SICPRO'05 Москва. 25-2 января 2005. М.: Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН, 2005. С.492-501.

20 Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. - 254с.

21 Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. Скрытая передача информации на основе режима обобщенной синхронизации в присутствии шумов. ЖТФ, Т. 80, вып.4, 2010.- с. 1-8.

22 Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. Москва – Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2003. – 304с.

23 Кузнецов А.П., Савин А.В., Савин Д.В. Особенности динамики почти консервативного отображения Икеды. Письма в ЖТФ. т.33, вып.3, 2007. – с.57-63.

24 Sprott J.C. Time-Series Analysis/ Oxford University Press, 2003/ - p.528.

25 Владимирский Э.И., Тагиев Ф.К. Синергетический подход к формированию интегральных размерностей в интеллектуальных информационно-измерительных системах. Информационные технологии. №6 (166). 2010. – с. 62-67.

26 Лоскутов А.Ю. Проблемы нелинейной динамики II. Подавление хаоса и управление динамическими системами. Вестник Московского ун-та. серия 3. Физика. Астрономия. №3. 2001. – с. 3-21.

27 Колесниченко А.В. Синергетический подход к описанию развитой турбулентности. Астрономический вестник, том.30, №2, 2002. – с.121-139.

28 Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 100с.

29 Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Эдиториал УСССР, 2000. – 310с.

30 Фрик П.Г. Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть II. Перм. Гос. Техн. ун-т. Пермь.: 1999. – 136с.

31 Tim Majoribanks. Chaos within a turbulent time series. 2009. p.80.

32 Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 264 с.

33 R.V.B. Santos and J.C. Gzaveg. Extracting chaos control parameters from time series analysis. Journal of Physics: Conference series 285 (2011) p.1-7.

34 Исмаилов Б.И. «Контроль вибрации силового оборудования гидроэлектростанции, учитывающий их причинно-следственные связи». Научные труды – фундаментальные науки. Азербайджанский Технический Университет. Том 8 (29), №1, Баку 2009г., с.12-16.

35 Исмаилов Б.И. «Система поддержки принятия решения при эксплуатационном контроле вибрации силового оборудования гидроэлектростанций». Международная Академия Информатизации, Таганрогский Научно-исследовательский Институт Связи. Вопросы специальной радиоэлектроники. Научно-технический сборник. Серия

«Общие вопросы радиоэлектроники (ОВР). Выпуск 1., Москва – Таганрог, 2009. с. 107-113.

36 Исмаилов Б.И. Графический пользовательский интерфейс ИИС контроля вибрации. Труды III международной научно-практической конференции «Методы и средства кодирования, защиты и сжатия информации» Винница, Украина, 20-22 апреля 2011г., с.166-167.

37 Ismailov B.I. «Recurrence analysis of hydroelectric power station force equipment vibration signals». The third International conference “Problems of cybernetics and informatics” Vol. III. September 6-8, Baku, 2010. –pp. 221-224.

Заключение

В заключение необходимо отметить, что несмотря на автономность написанных глав со своими выводами и литературой, красной нитью через всю книгу проходит междисциплинарный аспект, отражающий философско-математическую связь проблемы визуализации анализа и управления инвариантными множествами.

Включение инвариантных множеств в синергетические методы анализа и управления хаотическими системами вносит, на наш взгляд, весомый вклад, дополняющий существующие традиционные направления в пространстве управлений.

Важно также добавить, что анализ визуальных образов рекуррентных диаграмм исследуемых систем (процессов) с развитием навыков визуального мышления окажут экспресс поддержку при принятии решения в сложных ситуациях.

Авторы выражают благодарность Академику РАН, д.т.н., профессору А.М.Керимову и д.т.н., профессору Н.Г.Фарзانه взявших на себя труд рецензирования рукописи, их ценные советы и пожелания. Особую благодарность выражаем Леонюк И., оказавшей помощь при подготовке рукописи к печати.

Список дополнительной литературы

1. P.M.Crowley, A.Schultz: Measuring the Intermittent Synchronicity of Macroeconomic Growth in Europe, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(4), 1215–1231 (2011).
2. W. Duch, K. Dobosz: Visualization for understanding of neurodynamical systems, *Cognitive Neurodynamics*, 5(2), 145–160 (2011).
3. H. Ghomashchi: Dynamic patterns of postural fluctuations during quiet standing: a recurrence quantification approach, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(4), 1163–1172 (2011).
4. Y. Hirata, K. Aihara: Statistical tests for serial dependence and laminarity on recurrence plots, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(4), 1077–1084 (2011).
5. S. Karagianni, C. Kyrtsov: Analysing the Dynamics between U. S. Inflation and Dow Jones Index Using Non-Linear Methods, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 15(2), 4 (2011).
6. I. Konvalinka, D. Xygalatas, J. Bulbulia, U. Schjodt, E. M. Jegindo, S. Wallot, G. Van Orden, A. Roepstorff: Adaptive Noise Reduction Method for Chaotic Signals Using Dual-lifting Wavelet Transform, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 108(20), 8514–8519 (2011).
7. A. Kulkarni, N. Marwan, L. Parrott, R. Proulx, C. L. Webber Jr.: Recurrence plots at the crossroad between theory and application, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(4), 997–1001 (2011).
8. Y. Liu, X. Liao: Adaptive chaotic noise reduction method based on dual-lifting wavelet, *Expert Systems with Applications*, 38(3), 1346–1355 (2011).
9. N. Marwan: How to avoid potential pitfalls in recurrence plot based data analysis, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(4), 1003–1017 (2011).
10. C. Mocenni, A. Facchini, A. Vicino: Comparison of recurrence quantification methods for the analysis of temporal and spatial chaos, *Mathematical and Computer Modelling*, 53(7–8), 1535–1545 (2011).
11. P. J. Ramos-Villagrasa, A. L. García-Izquierdo: Analysis techniques of chaotic patterns: A review of empirical studies in psychology, *Anales de Psicología*, 27(1), 239–248 (2011).
12. Y. Saiki, M. Yamada: Recognition of transition patterns in a business cycle model using unstable periodic orbits, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(4), 1203–1214 (2011).

13. F. Strozzi, K. Poljansek, F. Bono, E. Gutiérrez, J. M. Zaldívar: Recurrence Networks: Evolution and Robustness, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(4), 1047–1063 (2011).
14. Z. Vavrilová, J. Zvelebil, M. Palus: Complex system approach to interpretation of monitoring time series: Two case histories from NW Bohemia, *Landslides*, 8(2), 207–220 (2011).
15. C. L. Webber Jr., J. Akar, Z. Hu: Unstable Cardiac Singularities May Lead to Atrial Fibrillation, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(4), 1141–1151 (2011).
16. Z. Q. Zhao, S. C. Li: Identifying spatial patterns and dynamic of climate change using recurrence quantification analysis – case study of Qinghai-Tibet Plateau, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(4), 1127–1139 (2011).
17. Y. Zou, M. C. Romano, M. Thiel, N. Marwan, J. Kurths: Inferring Indirect Coupling by Means of Recurrences, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 21(4), 1099–1111 (2011).

Старший научный сотрудник кафедры «Информационно-измерительная и вычислительная техника» АГНА, к.т.н.
ВЛАДИМИРСКИЙ ЭДУАРД ИОСИФОВИЧ

Научный сотрудник кафедры «Информационно-измерительная и вычислительная техника» АГНА,
ИСМАЙЛОВ БАХРАМ ИСРАФИЛ ОГЛЫ

СИНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ ХАОТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

**VLADIMIRSKI E.I., İSMAYİLOV B.I.
SİNERQETİK ÜSULLARIN KÖMƏYİ İLƏ XAOTİK
SİSTEMLƏRİN İDARƏEDİLMƏSİ**

Kitab xaoitik sistemləri idarəetmə məsələlərini realizə etdikdə invariant çoxluqların vizual təsvirinə və analizinə həsr olunmuşdur. Subyektin qəbul etdiyi qərarların intellektual əsası kimi qeyri-xətti sistemlərin idarəetmə sistemlərinin sintezinə sinergetik yanaşma nəzərdən keçirilir. Bunun ideoloji əsası qaneetmə nəzəriyyəsi və səliss və qeyri-səliss konsepsiyalardakı genişləndirilmiş filtrlərin topologiyasıdır. İdarəetmə məsələsi Çirikov, Lozi, İkeda və digər ikiölçülü xaoitik sistemlərin tətbiqinin istifadə edilməsi ilə təsvir edilmişdir. Xaoitik sistemləri idarəetmə məsələlərini həll etdikdə alınan yeni invariant çoxluqların vizuallaşdırılması üçün MATLAB mühitində alqoritmlər və proqramlar işlənilməsi sahəsində rekurrent analizin qeyri-xətti aparatı istifadə olunmuşdur.

Kitab elmlərarası istiqamətlərdə işləyən aspirantlar, doktorantlar və elmi işçilər üçün nəzərdə tutulur.

**VLADIMIRSKY E.I., ISMAYLOV B.I.
SYNERGETIC METHODS OF CONTROL THE CHAOTIC SYSTEMS**

The book is devoted to visual representation and analysis of invariant sets at realization of tasks of control of chaotic systems. As the intellectual support of accept the subject decisions, is used the synergetic approach to synthesis of the new control systems of nonlinear systems. Their ideological basis is the theory of satisfaction and topology of the extended filters in the precise and indistinct concepts. For visualization of new invariant sets received at the decision of tasks of control by chaotic systems, the device nonlinear recurrence analysis in a context of development of algorithms and programs in MATLAB.

The book is focused on the post-graduate students, doctors and science officers working on synergetic directions of a science.

На обложке показано взаимодействие хаотических систем Чирикова-Икеды

Формат..... 70x100
Заказ56
Тираж200
Цена договорная.

Отпечатано в типографии АГНА.